MEGOLDÓKULCS

1. 1p { A kérdéses diffegyenlet szeparábilis.

Két eset van:

1p { I. eset: $\underbrace{y^2+y-2}_{(y+2)(y-1)} \equiv 0$ azaz $\boxed{\begin{matrix} y(x)\equiv -2 \\ \text{vagy} \\ y(x)\equiv 1 \end{matrix}}$

1p { II. eset: y^2+y-2 sosem nulla és

$$\int \frac{1}{y^2+y-2}\,dy = \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

4p { $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \arctan(x+1) + \text{konst.}$

9p {

$$\int \frac{1}{y^2+y-2}\,dy = \int \frac{1}{(y+2)(y-1)}\,dy = \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+2}\right] dy =$$

parciális törtekre bontás!

$$= \frac{1}{3}\ln|y-1| - \frac{1}{3}\ln|y+2| + \text{konst.}$$

Tehát a II. típusú megoldások ált. alakja:

$$\underbrace{\frac{1}{3}\ln|y-1| - \frac{1}{3}\ln|y+2|}_{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right|} = \arctan(x) + C$$

ahol C tetszőleges konstans.

2.

4p
$$\begin{cases} y_a(x) = \sin(x)\big(\sin(x)+\cos(x)\big)+\cos(x)^2 = \\ = \sin(x)^2 + \sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 = \\ = 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) \end{cases}$$

5p

Tehát a kérdéses diffegyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\underline{\lambda = 0,\ \pm 2i}$$

és az ált. megoldás

$$y(x) = A + B\sin(2x) + C\cos(2x)$$

5p

kezdeti feltételből:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= A + C \overset{!}{=} 0 \\ y'(0) &= 2B \overset{!}{=} 2 \\ y''(0) &= -4C \overset{!}{=} 4 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

azaz a keresett megoldás:

$$\boxed{y(x) = 1 + \sin(2x) - \cos(2x)}$$

3. a)

$x \mapsto y(x)$? $\quad y' = \dfrac{\ln(1+y^2)}{x} \quad (x \neq 0)$.

3p Szeparábilis típusú diffegyenlet, és mivel $\ln(1+0^2) = \ln(1) = 0$, ezért az $y(x) \equiv 0$ egy megoldás.

b)

10p

$$y'' = \left(\frac{\ln(1+y^2)}{x}\right)' = \frac{\frac{2y}{1+y^2} \cdot y' \cdot x - \ln(1+y^2)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{2y}{1+y^2}\left(\frac{\ln(1+y^2)}{x}\right) \cdot x - \ln(1+y^2)}{x^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\ln(1+y^2)}{x^2}\left(\frac{2y}{1+y^2} - 1\right)}}$$

c)

4p Ha y'' sose nulla, akkor biztos nem lesz inflexiós pont.

Ha $y(1) < 0$, akkor $y(x) < 0$ $\forall x$-re, mert a megoldás nem keresztezheti az a) pont megoldását. Ilyenkor $\ln(1+y^2) > 0$ és $\left(\frac{2y}{1+y^2} - 1\right) < 0$, tehát a b) pont alapján $y'' \neq 0$.

4. 1p { A kérdéses diffegyenlet <u>inhomogén lineáris</u>.

4p { A homogén változat: $y_H' = 2x y_H$ megoldása

$$y_H(x) = C\, e^{\int 2x\,dx} = C e^{x^2}.$$

2p { Ezért az eredeti diffegyenlet megoldását

$$y(x) = C(x)\, e^{x^2}$$ alakban keressük.

2p { Visszahelyettesítés és egyszerűsítés után:

$$C'(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} \implies C(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

5p { Az integrálást parciális törtekre való bontással végezzük el:

$$C(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K$$

tehát a megoldások ált. alakja:

$$y(x) = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K\right) e^{x^2}$$

3p { Kezdeti feltételből:

$$e \overset{!}{=} y(-1) = \left(\ln|-1| - \frac{1}{2}\ln(1^2+1) + K\right) e^{1^2} = \left(-\frac{1}{2}\ln(2) + K\right) e$$

azaz $K = 1 + \frac{1}{2}\ln(2)$ és a mi általunk keresett megoldás:

$$\underline{\underline{y(x) = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 1 + \frac{1}{2}\ln(2)\right) e^{x^2}}}$$

5. a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-5}{n+3}\right)^{n^2}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n \quad \text{ahol} \quad a_n = \left(\frac{n-5}{n+3}\right)^{n^2}.$$

6p $$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-5}{n+3}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{-5}}{e^3} = e^{-8}$$

3p Tehát a sor konvergens, ha $x^2 < \frac{1}{e^{-8}} = e^8$
és divergens, ha $x^2 > e^8$.
Azaz az <u>x-re vonatkozó</u> bázispont és konv.-sugár:
$x_0 = 0$, $R = \sqrt{e^8} = e^4$

b) 2p $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(3x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^n}\cdot 3^n}_{=:a_n}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n$$

A bázispont $x_0 = -\frac{1}{3}$.

7p $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,3^{n+1}}{\frac{n!}{n^n}\cdot 3^n} = 3\,\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 3\cdot(n+1)\,\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{(n+1)} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3\cdot e^{-1} = 3/e$$

Tehát a konv.-sugár $R = \frac{1}{3/e} = \frac{1}{3}e$.

---

6. Legyen $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!\,(n+2)}}_{=:a_n} x^{n+2}$$

Mivel $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ezért a kifejezés konvergencia-sugara ∞ és

6p

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{d}{dx}x^{n+2}}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = xe^x.$$

4p

Tehát $f(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx =$

$= xe^x - e^x + C$ valamilyen C-re.

4p

Mivel

$$\underbrace{0\cdot e^0 - e^0}_{-1} + C = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^{n+2}}{n!(n+2)} = 0 + 0 + \ldots = 0,$$

ezért C-nek $+1$-nek kell lennie. Tehát

$\underline{f(x) = xe^x - e^x + 1}$ és

3p

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!(n+2)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9\cdot 3^n}{n!(n+2)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n!(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{9}f(3) = \frac{1}{9}\left[3e^3 - e^3 + 1\right] = \underline{\underline{\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}}}.$$