Megoldás

ANALÍZIS(1) **II. ZÁRTHELYI** **2001. november 8.**

Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

A megfelelő definíció segítségével bizonyítsa be az alábbi állításokat!

a) $\lim_{x\to-\infty}(5-2x^2) = -\infty$ b) $\lim_{x\to3}\frac{1-x}{x+2} = \frac{-2}{5}$

a) $\forall\ \Omega>0$-hoz $\exists\ P(\Omega)$: $f(x)<-\Omega$, ha $x<-P(\Omega)$

$5-2x^2<-\Omega \ \rightarrow\ \frac{5+\Omega}{2}<x^2 \ \rightarrow\ x<-\sqrt{\frac{5+\Omega}{2}}$ (vagy $x>\sqrt{\frac{5+\Omega}{2}}$)

Tehát $P(\Omega)=\sqrt{\frac{5+\Omega}{2}}$

b) $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)$: $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$

$x_0=3$, $A=-\frac{2}{5}$

$\left|\frac{1-x}{x+2}+\frac{2}{5}\right| = \frac{|9-3x|}{5|x+2|} = \frac{3}{5}\frac{|x-3|}{|x+2|} := A$

Ha $x>0$: $A<\frac{3}{5}\frac{|x-3|}{2}<\varepsilon \ \rightarrow\ |x-3|<\frac{10\varepsilon}{3}$

$\delta(\varepsilon)=\min\left\{\frac{10\varepsilon}{3},3\right\}$

Vagy pl. $|x+2|>1$, vagyis $x>-1$ (vagy $x<-3$) esetén:

$A<\frac{3}{5}\frac{|x-3|}{1}<\varepsilon \ \rightarrow\ |x-3|<\frac{5\varepsilon}{3}$

$\delta(\varepsilon)=\min\left\{\frac{5\varepsilon}{3},4\right\}$

2. feladat (6 pont)

Definiálja a következő fogalmakat!

a) Az f függvény lokálisan növekedően halad át az értelmezési tartomány x_0 belső pontján.

b) f alulról konvex az $[a,b]$ intervallumon.

a.) $\exists\ K_{x_0,\delta}$: $x\in(x_0-\delta, x_0)$-ra $f(x)\le f(x_0)$ és $x\in(x_0, x_0+\delta)$-ra $f(x_0)\le f(x)$

b.) $\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$-re

$f(x)\le h_{x_1,x_2}(x) = f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) = f(x_2)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)$

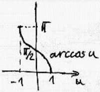
3. feladat (17 pont)

$$f(x) = \arccos \frac{6}{5+x^2}.$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Indoklással adja meg azt a legbővebb I intervallumot, melyen létezik f^{-1} és $-2 \in I$! Írja fel itt az inverzfüggvényt! $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

a) D_f: $\left|\frac{6}{5+x^2}\right| = \frac{6}{5+x^2} \le 1 \to x^2 \ge 1$



Tehát $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$R_f = [0, \frac{\pi}{2})$, mert $0 < \frac{6}{5+x^2} \le 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{6}{5+x^2}\right)^2}} \quad 6\,(-1)(5+x^2)^{-2} \cdot 2x$$

b.) $I = (-\infty, -1]$, mert

f folytonos $(-\infty,-1]$-en és $(-\infty,-1)$-en $f' < 0 \Rightarrow$

f szigorúan monoton csökkenő I-n $\Rightarrow \exists f^{-1}$ I-n

$y = \arccos \frac{6}{5+x^2} \to \cos y = \frac{6}{5+x^2} \to x^2 = \frac{6}{\cos y} - 5$

$\to x = -\sqrt{\frac{6}{\cos y} - 5}$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{6}{\cos x} - 5}$ $\quad D_{f^{-1}} = R_f = [0, \frac{\pi}{2})$; $R_{f^{-1}} = D_{f^{-1}} = (-\infty, -1]$

4. feladat (16 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin\left\{\frac{x}{2}\right\}\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{2x^2} = ?$ $\quad$ ({ } : törtrész)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^4\right)^{\left(\frac{1}{1-\cos 2x}\right)} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch} 5x}{\operatorname{sh} 5x} = ?$

a.) Ha $x \in (0,2)$: $\left\{\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot \sin\frac{\pi}{8}x}{2x^2\cdot\cos\frac{\pi}{8}x} = \lim_{x\to+0} \underbrace{\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{8}x}}_{1}\ \underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\ \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{8}x}{\frac{\pi}{8}x}}_{1} = \frac{\pi}{32}$$

b.) $$\lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x^4)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}}_{1^\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos 2x}\ln(1+x^4)} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x^4)}{1-\cos 2x}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3}{\sin 2x\cdot 2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{1+x^4}}_{0}\ \underbrace{\frac{2x}{\sin 2x}}_{1} = 0$$

c.) (A L'Hospital szabály alkalmazása nem vezet eredményre.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch} 5x}{\operatorname{sh} 5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{5x}+e^{-5x}}{e^{5x}-e^{-5x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-10x}}{1-e^{-10x}} = 1$$

5. feladat (15 pont)

a) $f(x) = \left(1+2x^4\right)^{\left(\operatorname{sh}^2 3x\right)}$ $\qquad f'(x) = ?$

b) Az $y(x)$ függvény az $x_0 = 1$ pont környezetében differenciálható és kielégíti az

$$x + \sqrt{2}\,y^3 \sin\frac{\pi x}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi y}{8} = 10$$

implicit függvénykapcsolatot. Határozza meg ezen függvény görbéje érintő egyenesének egyenletét az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ pontban!

a.) $f(x) = e^{\operatorname{sh}^2 3x\cdot \ln(1+2x^4)}$

$$f'(x) = (1+2x^4)^{\operatorname{sh}^2 3x}\left(2\cdot\operatorname{sh}3x\cdot\operatorname{ch}3x\cdot 3\cdot\ln(1+2x^4) + \operatorname{sh}^2 3x\,\frac{8x^3}{1+2x^4}\right)$$

b.) $1+\sqrt{2}\, 8 \sin\frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} \overset{?}{=} 10$ ✓

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$1+\sqrt{2}\, 3y^2 y' \sin\frac{\pi x}{4} + \sqrt{2}\, y^3 \cos\frac{\pi x}{4}\, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi y}{8}}\, \frac{\pi}{8} y' = 0 \qquad \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}$$

$$1+\sqrt{2}\cdot 3\cdot 4\, y'(1)\cdot \sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cdot 8\cdot \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\, \frac{\pi}{8}\, y'(1) = 0$$

$$\longrightarrow y'(1) = -\frac{1+2\pi}{12+\pi/4}$$

$$y_{é} = y(1) + y'(1)(x-1) = 2 - \frac{1+2\pi}{12+\frac{\pi}{4}}(x-1)$$

6. feladat (13 pont)

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| \sin(x-2), & \text{ha } x \geq 0 \\ 2^{-\frac{1}{x-1}}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Írja fel $f'(x)$ -et, ahol az létezik!

$f(-0) = 2 \neq f(+0) = -2\sin 2 \Rightarrow f$ nem folytonos $x=0$-ban, tehát $\nexists f'(0)$

Ha $x<0$: $f'(x) = 2^{-\frac{1}{x-1}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$

Ha $x\in(0,2)$: $f'(x) = \left((2-x)\cdot\sin(x-2)\right)' = -1\cdot\sin(x-2) + (2-x)\cos(x-2) := g(x)$

Ha $x\in(2,\infty) = f'(x) = \left((x-2)\sin(x-2)\right)' = -\left((2-x)\sin(x-2)\right)' = -g(x)$

Ha $x=2$: $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{|x-2|\,\overbrace{\sin(x-2)}^{}-0}{\underbrace{x-2}_{\to 1}} = 0$

7. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$f(x) = (x-1)^4\,(x+2)^3$$

függvény legbővebb monotonitási intervallumait és lokális szélsőértékeit!

$$f'(x) = 4(x-1)^3(x+2)^3 + (x-1)^4\cdot 3(x+2)^2 = (x-1)^3(x+2)^2\left(4(x+2)+3(x-1)\right) =$$
$$= (x-1)^3(x+2)^2(7x+5)$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\frac{5}{7})$	$-\frac{5}{7}$	$(-\frac{5}{7},1)$	1	$(1,\infty)$
f'	+	0	+	0	−	0	+
f	↗		↗	lok. max.	↘	lok. min	↗

Tehát f monoton nő: $\left(-\infty, -\frac{5}{7}\right]$ és az $[1, \infty)$ intervallumon

f monoton csökken: $\left[-\frac{5}{7}, 1\right]$-en

Lok. max. van: $x = -\frac{5}{7}$ pontban $f\left(-\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{12}{7}\right)^4 \left(\frac{9}{7}\right)^3$ értékkel

Lok. min. van: $\underline{x = 1 \text{ pontban}}$ $f(1) = 0$ értékkel

8. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

függvény lineáris aszimptotáját a $-\infty$-ben!

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+6x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{9x^2}}{x}}_{\frac{3|x|}{x} = -3} \underbrace{\sqrt{1+\frac{6}{9x}+\frac{1}{9x^2}}}_{\to 1} = -3$$

$$B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\sqrt{9x^2+6x+1} + 3x\right)}_{\infty - \infty} = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\cdots} + 3x\right) \frac{\sqrt{\cdots} - 3x}{\sqrt{\cdots} - 3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\cancel{9x^2} + 6x + 1 - \cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+6x+1} - 3x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x+1}{\underbrace{\sqrt{9x^2}}_{=3|x|=-3x} \sqrt{1+\frac{6}{9x}+\frac{1}{9x^2}} - 3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{-3x} \frac{1 + \frac{1}{6x}}{\sqrt{1+\frac{6}{9x}+\frac{1}{9x^2}} + 1} = \frac{6}{-3} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$g_a(x) = Ax + B = -3x - 1$$

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-7}{x-3}$$

a) Keresse meg az alábbi határértékeket!

$\lim\limits_{x\to3+0} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x\to3-0} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x\to3} f(x) = ?$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$

$$\lim_{x\to3-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{\overset{-4}{(x-7)}}{\underset{-0}{(x-3)}}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2} \neq \lim_{x\to3+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x-7}{x-3}}_{\frac{-4}{+0} \to -\infty} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x) \nexists$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-7}{x-3}\right)^2} \frac{1\cdot(x-3) - (x-7)\cdot 1}{(x-3)^2}, \text{ ha } x \neq 3$$