

P, NP

1. Álljon az L nyelv azokból az irányítatlan gráfokból, melyekben nincs kör. Igazolja, hogy $L \in P$.
2. Az L nyelv álljon az olyan (G, s, t) hármassokból, ahol G egy irányított gráf, s és t a gráfnak két csúcsa és G -ben van út s -ből t -be. Igazolja, hogy $L \in P$.
3. Álljon az L nyelv azokból az (n, m) párokból, amelyekben n és m egy-egy pozitív egész szám bináris alakja, és ez a két szám relatív prím. Igaz-e, hogy $L \in P$?
4. Bizonyítsa be az alábbi két nyelvről, hogy NP-beliek! Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?
 - (a) G irányítatlan gráfok nyelve, amelyekben van legfeljebb 100 élből álló kör.
 - (b) (G, k) párokból álló nyelv, ahol a G irányítatlan gráfban van legfeljebb k élből álló kör.
5. Igazolja, hogy a
 - (a) $\text{MAXKLIKK} = \{(G, k) : G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ pontú klikk}\}$ nyelv NP-ben van.
 - (b) $\text{5KLIKK} = \{G : G \text{ irányítatlan gráfban van } 5 \text{ pontú klikk}\}$ nyelv
 - NP-ben van,
 - co NP-ben van,
 - P-ben van.
6. Bizonyítsa be, hogy az alábbi nyelvek co NP-beliek!
 - (a) Az olyan páros gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás
 - (b) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás
 - (c) A síkbarajzolható gráfok nyelve
 - (d) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben akárhogyan színezzük ki az éleket 2 színnel, mindig keletkezik egyszínű háromszög
7. Álljon a nyelv az olyan (G, t) párokból, ahol G egy súlyozott, irányítatlan gráf, $t > 0$ egész, és G -ben minden, t darab élből álló párosítás súlya legalább t^2 .
Igazolja, hogy ez a nyelv co NP-ben van!
8. s-T-HAMÚT jelölje az olyan (G, s, t) hármassokból álló nyelvet, ahol a G irányítatlan gráf s és t csúcsa között van Hamilton-út. Igazolja, hogy az alábbi nyelvekre az s-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!
 - (a) HAMÚT: a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve
 - (b) HAM: a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve
9. Adjon meg egy $\text{HAM} \leq \text{s-T-HAMÚT}$ Karp-redukciót!
10. Legyen $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ olyan polinom időben kiszámolható, bijektív függvény, aminél minden $x \in \{0, 1\}^*$ szóra teljesül, hogy $|f(x)| = |x|$. Legyen $L = \{y : \text{van olyan } 1\text{-gyel kezdődő } x \text{ amire } f(x) = y\}$. Igaz-e, hogy $L \in \text{NP} \cap \text{co NP}$?
11. Igazolja, hogy az a nyelv, ami az összes olyan M determinisztikus véges automata leírásából áll, melyre $L(M) \neq \emptyset$ teljesül, NP-ben van.