

# Alaptagok Nyquist és Bode diagramjai

Luspay Tamás, Bauer Péter

BME Közlekedésautomatikai Tanszék  
2012. január 10.

# 1. Bevezetés - Átviteli függvény, frekvenciafüggvény

Dinamikus rendszerek leírásának egyik módja az átviteli függvények segítségével történik. Az átviteli függvényeket a rendszer differenciálegyenletéből kiindulva a Laplace transzformáció alkalmazásával vezethetjük be (lásd [1] A függelék). Vegyük a differenciálegyenlet  $\mathcal{L}$ -transzformáltját zérus kezdeti értékekkel, majd rendezzük a benne szereplő  $Y(s)$  és  $U(s)$  tagok szerint, ahonnan kapjuk a  $G(s)$  racionális törtfüggvényt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

Az átviteli függvény tehát a kimenőjel és a bemenőjel zérus kezdeti feltételekkel vett  $\mathcal{L}$ -transzformáltjainak hányadosa.

Az átviteli függvényt ún. pólus-zérus alakban is felírhatjuk:

$$G(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2)$$

ahol  $z_j$  a rendszer zérusai, vagyis a  $b(s) = 0$  egyenlet gyökei, míg  $p_i$  jelöli a rendszer pólusait, az  $a(s) = 0$  egyenlet gyökeit.

A  $G(s)$  leírásának egy további lehetséges módja az időállandós alak. Alaptagok általános időállandós alakja a következő:

$$G(s) = \frac{C(s)}{T_n s^n + T_{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + \underbrace{1}_{0T}} \quad (3)$$

Itt a nevező polinom fokszáma adja meg, hogy hány tárolás a tag. Így egy  $n$ -edfokú nevező polinom  $n$  tárolás tagot jelent, rövid jelölése  $nT$ . A számláló  $C(s)$  eleme háromféle alakú lehet:

1. A ekkor a tag arányos (P)
2.  $A_d s$  ekkor a tag differenciáló (D)
3.  $\frac{A_I}{s}$  ekkor a tag integráló (I)

A lineáris dinamikus időinvariáns rendszerek frekvenciatartományban való vizsgálatát szinuszos lefutású bemenőjelekre adott válaszfüggvényeik segítségével végezhetjük el. Ehhez bevezetjük a frekvenciafüggvény fogalmát. Egy rendszer frekvencia-válaszfüggvényének (vagy egyszerűbben frekvenciafüggvényének) a rendszer egység amplitúdójú szinuszos bemenőjelre állandósult állapotban adott válaszfüggvényét nevezzük.

A frekvenciafüggvényt a differenciálegyenletből a jelek exponenciális alakjának és az exponenciális függvény differenciálási szabályának felhasználásával egyszerű átrendezéssel, míg az átviteli függvényből formálisan az  $s = i\omega$  helyettesítéssel kapjuk. Ez utóbbi kapcsolat mutatja azt is, hogy a frekvenciafüggvényeket a differenciálegyenletekből az ún. Fourier transzformációval, zérus kezdeti feltételekkel közvetlenül is megkaphatjuk [1]. A  $G(i\omega)$  függvényeket a rendszer frekvenciafüggvényének nevezzük, és az  $\omega$  körfrekvencia szerint ábrázoljuk.

*Nyquist diagram:* A Nyquist diagramon való ábrázolás kétféle módon is felfogható. A frekvenciafüggvény értéke egy adott  $\omega_0$  frekvencián egy komplex szám:

$$G(i\omega_0) = \operatorname{Re}G(i\omega_0) + i\operatorname{Im}G(i\omega_0)$$

Ez a szám komplex számsíkon ábrázolható és így  $\omega = 0 \dots \infty$  tartományon a pontokat ábrázolva adódik a Nyquist diagram.

A másik szemlélethez definiálni kell egy adott  $\omega_0$  frekvenciára vonatkozóan az amplitúdót  $A(\omega_0)$  és fázisszöget  $\varphi(\omega_0)$ :

$$A(\omega_0) = \sqrt{\operatorname{Re}G(i\omega_0)^2 + \operatorname{Im}G(i\omega_0)^2}$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctan \frac{\operatorname{Im}G(i\omega_0)}{\operatorname{Re}G(i\omega_0)}$$

Így az amplitúdó, mint a fázisszöggel irányított szakasz ábrázolható derékszögű koordinátarendszerben. Ez a koordinátarendszer lehet a komplex számsík is, ahol ha a  $\operatorname{Re}$  valós tengellyel bezárt szög a fázisszög akkor a kétféle szemlélet azonos ábrázolást ad. (márpedig definíció szerint a fázisszög a  $\operatorname{Re}$  tengellyel bezárt szög).

A továbbiakban az alap tagok (0-tól 2 tárolóig) Nyquist és Bode diagramjainak alakját ismertetjük a jellegzetes pontok meghatározását is leírva (és a frekvenciafüggvényt az ábrázoláshoz használt paraméterekkel is megadva). Az ezekhez kapcsolódó hosszabb levezetések és az állítások igazolását a függelék tartalmazza.

*Összetett tagok Nyquist diagramját* a következő módon ábrázoljuk: A frekvenciafüggvényt felbontjuk alaptagok összegére. Az így kiadódott alaptagok Nyquist diagramjait pontonként összeadva (az azonos  $\omega$  frekvenciához tartozó vektorokat összegezve) kapjuk az eredő Nyquist diagramot.

*Összetett tagok Bode diagramját* a következő módon ábrázoljuk: A frekvenciafüggvényt felbontjuk alaptagok szorzatára. Az így kiadódott alaptagok Bode diagramjait pontonként összeadva (az azonos  $\omega$  frekvenciához tartozó pontokat összegezve) kapjuk az eredő Bode diagramot. Ennek igazolását lásd a függelékben!

## 2. Alaptagok frekvenciatartományi vizsgálata

### 2.1. OTP 0 tárolós arányos tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = A$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = A = 2$$

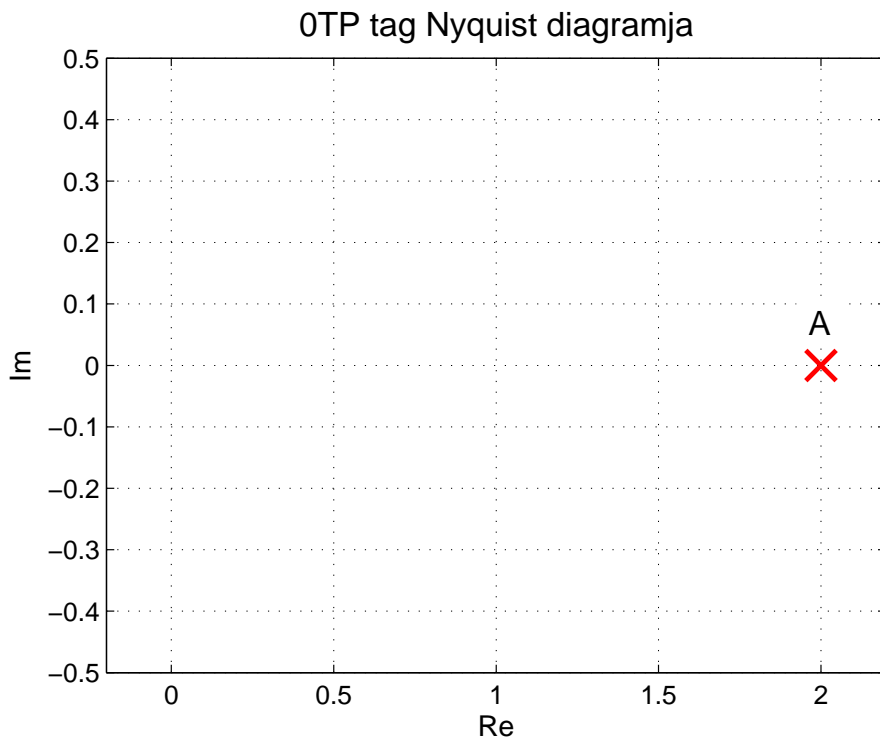
A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = A$$

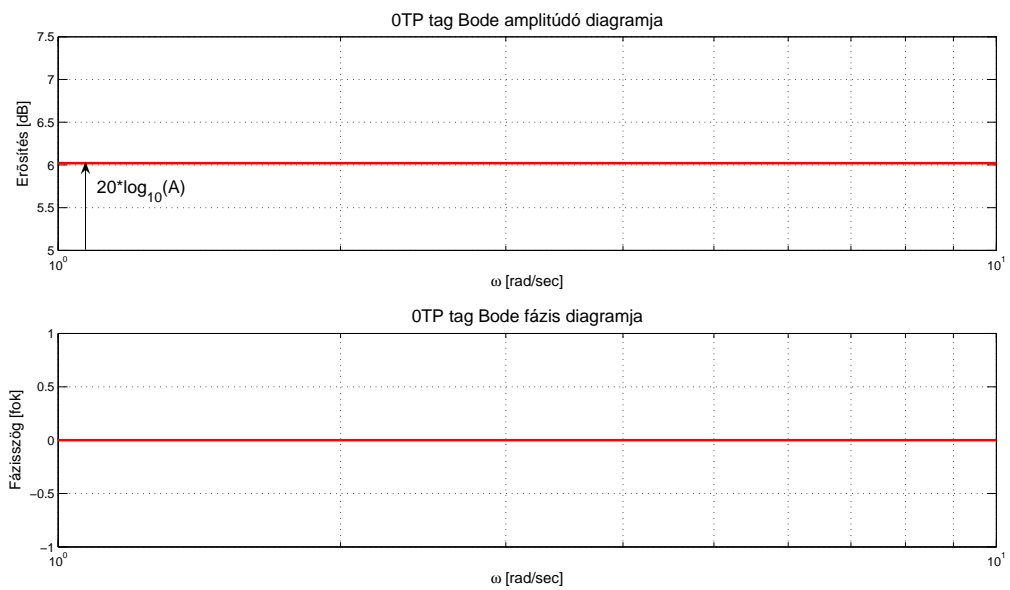
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = A$$

Nyquist diagramja egyetlen pont (lásd 1. ábra).

Bode amplitúdó diagramja egy a 0dB-es tengellyel párhuzamos egyenes  $20 \lg(A)$  magasságban. Bode fázis diagramja konstans nulla (lásd 2. ábra). Itt  $a(\omega) = 20 \lg|A(\omega)|$  az amplitúdó felhasznált definíciója, mely az amplitúdót decibel [dB] mértékegységben adja eredményül.



1. ábra. 0TP alaptag Nyquist diagramja



2. ábra. 0TP alaptag Bode diagramja

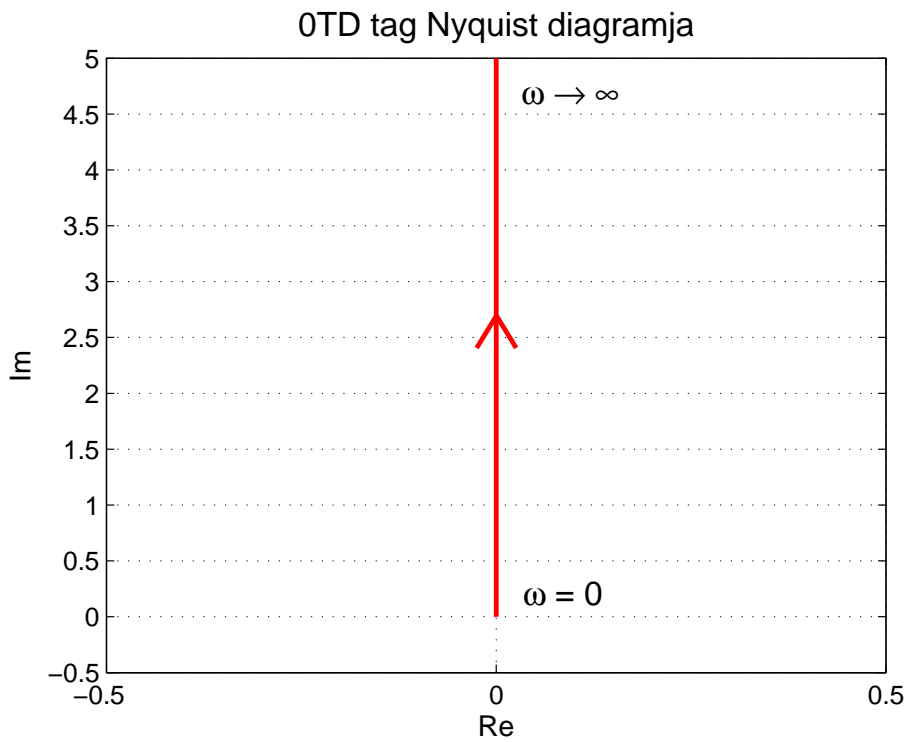
## 2.2. 0TD 0 tárolós differenciáló tag

Átviteli függvénye:

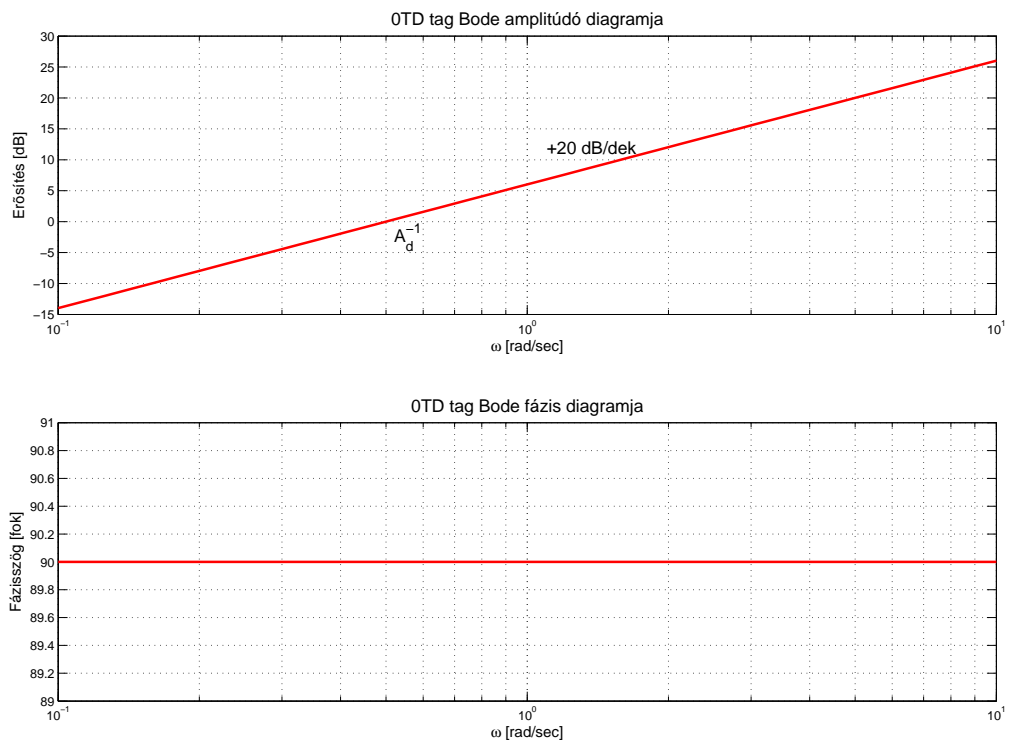
$$G(s) = A_d s$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = A_d i\omega = 2i\omega$$



3. ábra. OTD alaptag Nyquist diagramja



4. ábra. OTD alaptag Bode diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

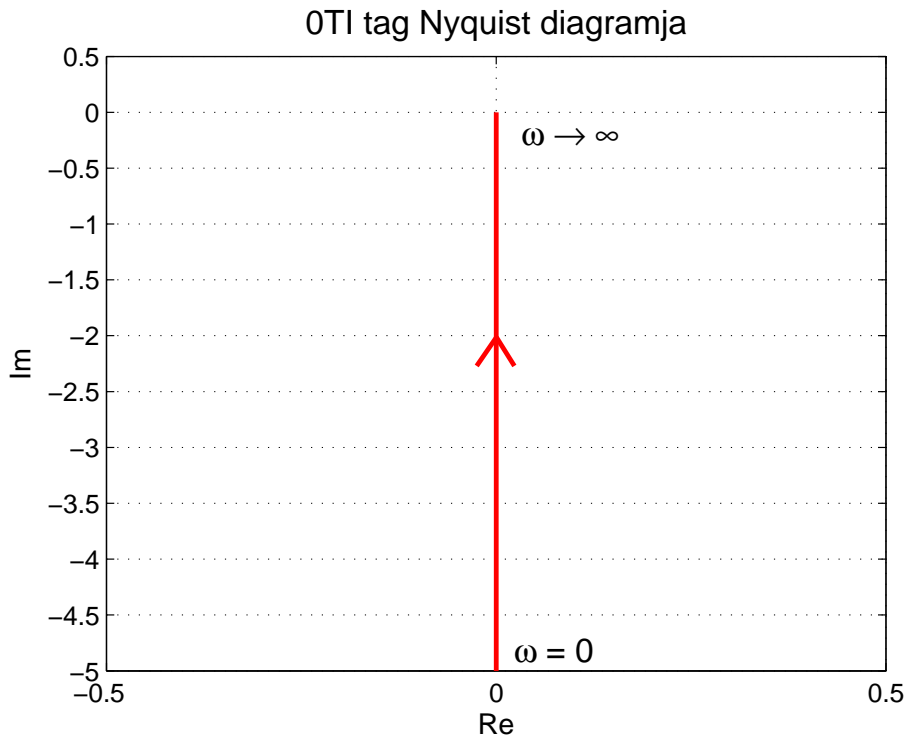
$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = i\infty$$

Nyquist diagramja egy egyenes 0-ból  $i\infty$ -be (lásd 3. ábra).

Bode amplitúdó diagramja egy a  $+20\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes, mely a 0dB-es tengelyt az  $\frac{1}{A_d}$  frekvencián metszi. Bode fázis diagramja konstans  $+90$  fok (lásd 4. ábra). Ennek igazolását a függelék tartalmazza. 1 dekád a tízes alapú logaritmikus skálán a 10 két egymást követő hatványa közti távolságot jellemzi. Például 1 dekád a távolság  $10^k$  és  $10^{k+1}$  közt, de ugyanígy  $0,25 * 10^k$  és  $0,25 * 10^{k+1}$  közt is.

### 2.3. OTI 0 tárolós integráló tag



5. ábra. OTI alaptag Nyquist diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_I}{i\omega} = -\frac{A_I i}{\omega} = -\frac{2i}{\omega}$$

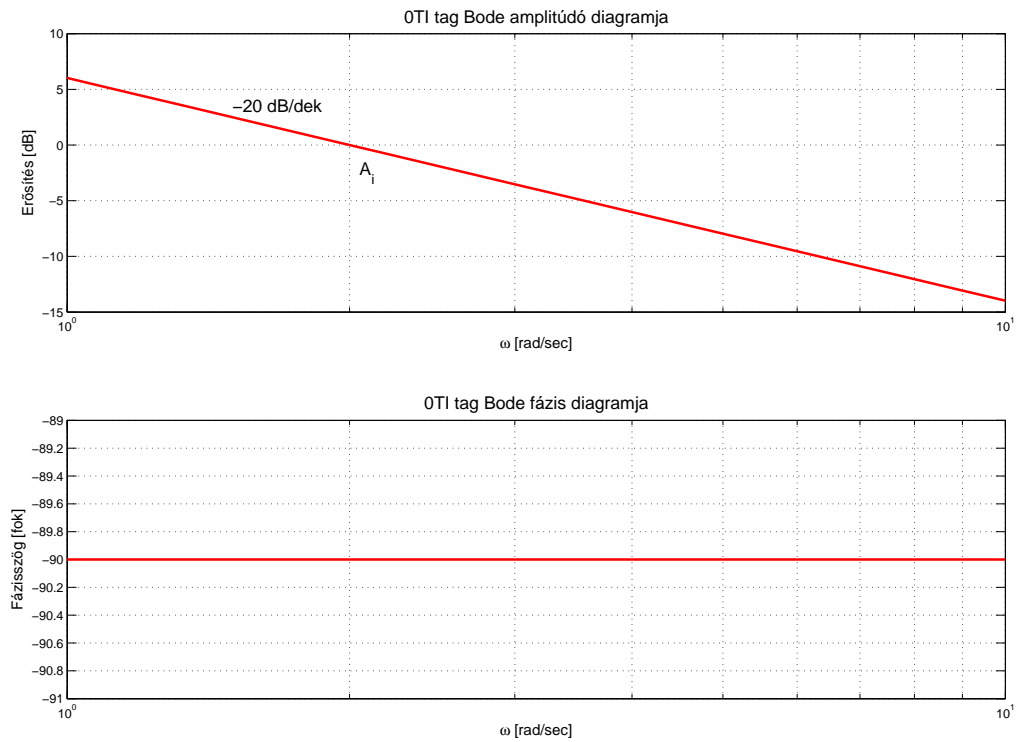
A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -i\infty$$

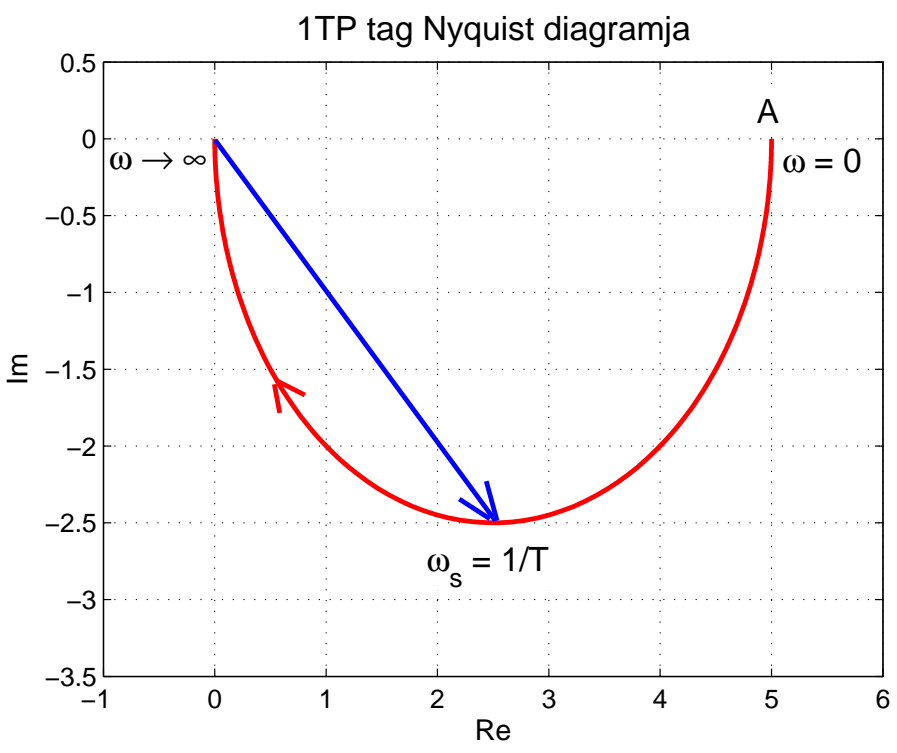
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

Nyquist diagramja egy egyenes  $-i\infty$ -ből 0-ba (lásd 5. ábra).

Bode amplitúdó diagramja egy  $-20\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes, mely a 0dB-es tengelyt az  $A_I$  frekvencián metszi. Bode fázis diagramja konstans  $-90$  fok (lásd 6. ábra). Ennek igazolását a függelék tartalmazza.



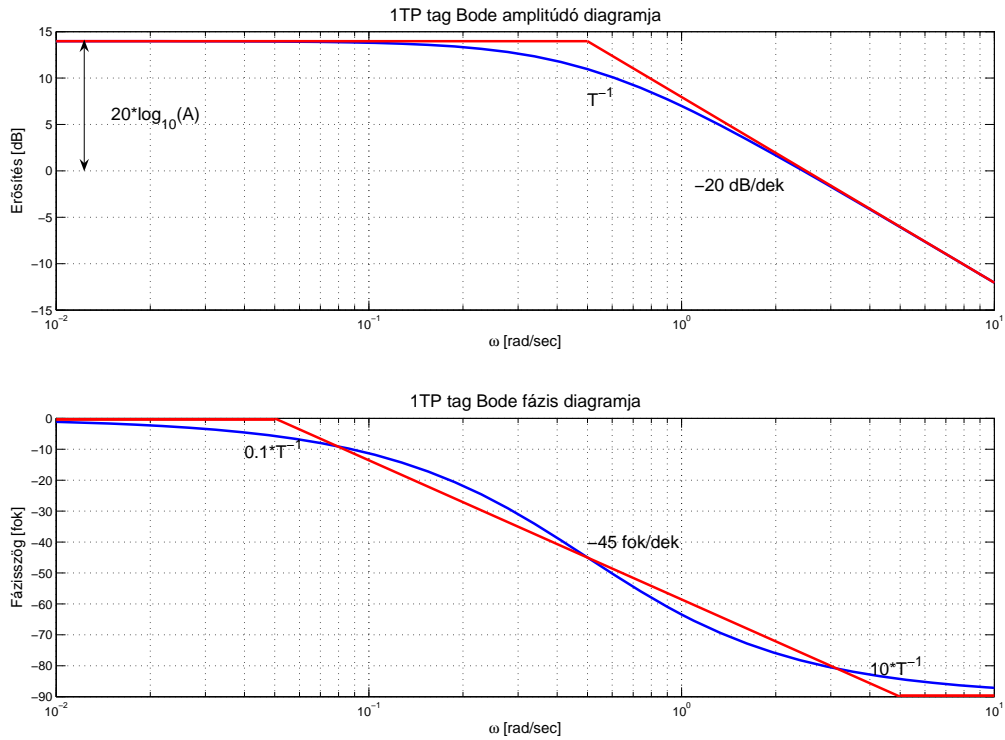
6. ábra. OTI alaptag Bode diagramja



7. ábra. 1TP alaptag Nyquist diagramja

2.4. 1TP 1 tárolós arányos tag

Átviteli függvénye:



8. ábra. 1TP alaptag Bode diagramja

$$G(s) = \frac{A}{Ts + 1}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A}{Ti\omega + 1} = \frac{A - AT\omega i}{1 + T^2\omega^2} = \frac{5}{2i\omega + 1}$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = A$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A - Ai}{2} = \frac{A}{2} - \frac{Ai}{2}$$

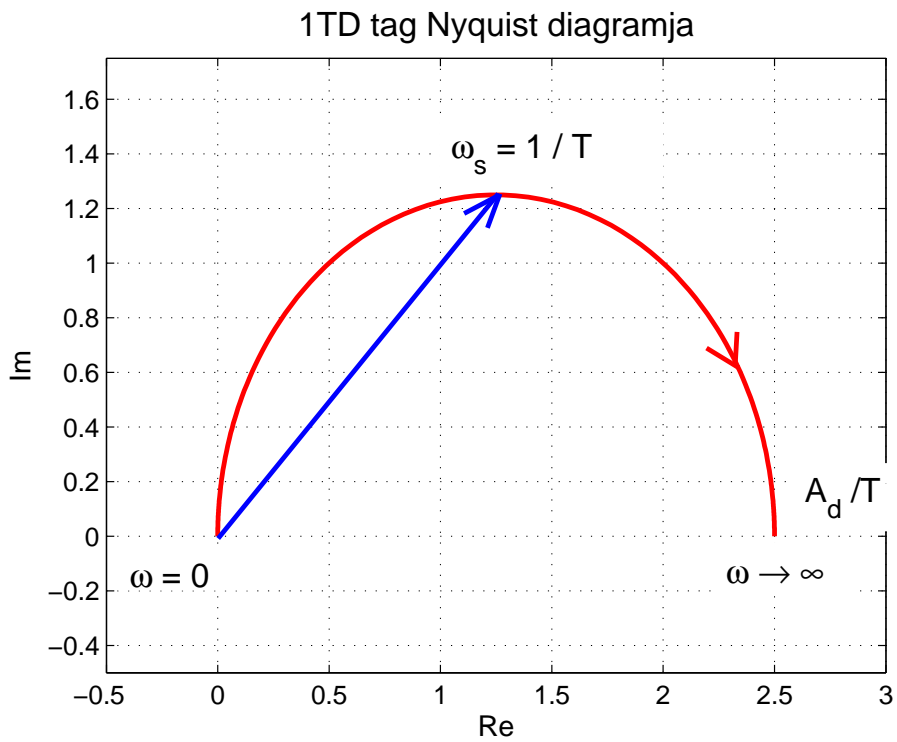
A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt  $\varphi(\omega_s) = -45^\circ$ . A tag Nyquist diagramja egy félkör az alsó síknegyedben A-ból 0-ba (lásd 7. ábra). A félkör alak igazolása a függelékben megtalálható.

A Bode diagram esetében a továbbiakban az aszimptotikus szerkesztés módszerét ismer-tetjük. A diagramokon piros színnel jelöljük az aszimptotikus közelítést, míg késsel a valódi frekvencia válaszokat.

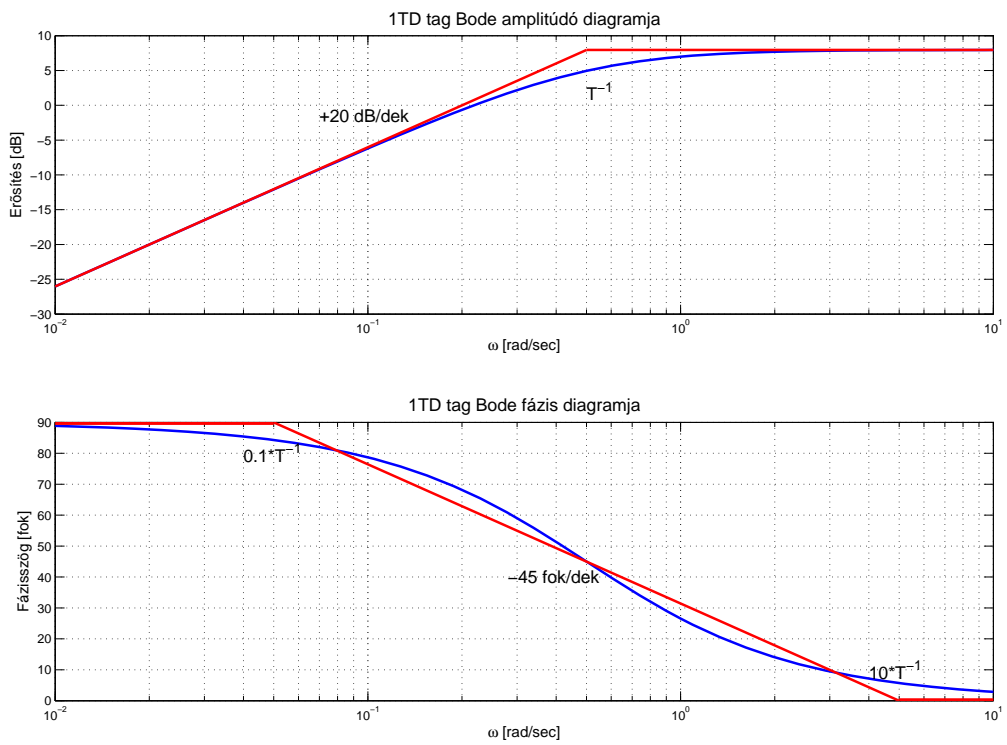
1TP tag Bode amplitúdó diagramja  $\omega_s = \frac{1}{T}$  frekvenciáig egy  $20 \lg(A)$  magasságban haladó vízszintes egyenes, majd a sarokfrekvenciától  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. Fázisdiag-ramja  $0^\circ$  a sarokfrekvencia tizedénél kisebb frekvenciákra,  $-45 \frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1\omega_s$  és  $10\omega_s$  frekvenciák között és  $-90^\circ$  a sarokfrekvencia tízszeresénél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 8. ábra). Ennek igazolását a függelék tartalmazza. Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-45^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.



## 2.5. 1TD 1 tárolós differenciáló tag



9. ábra. 1TD alaptag Nyquist diagramja



10. ábra. 1TD alaptag Bode diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_d s}{T s + 1}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_d i\omega}{T i\omega + 1} = \frac{A_d T \omega^2 + A_d \omega i}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{5i\omega}{2i\omega + 1}$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = \frac{A_d}{T}$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A_d + A_d i}{2T} = \frac{A_d}{2T} + \frac{A_d i}{2T}$$

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt  $\varphi(\omega_s) = +45^\circ$ . A tag Nyquist diagramja egy félkör a felső síknegyedben 0-ból  $\frac{A_d}{T}$ -be (lásd 9. ábra). A félkör alak igazolása a függelékben megtalálható.

Az 1TD tag Bode diagramját legkönnyebben szerkesztéssel határozhatjuk meg. Figyelembe véve az összetett tagok ábrázolására vonatkozó tételt (lásd függelék), az 1TD tag felfogható mint egy 0TD és 1TP alaptagok sorba kapcsolt eredője. Az alaptagok amplitúdó és fázis görbéit megrajzolva, majd minden frekvencián összegezve kapjuk az eredő görbéket, melyről a következőket mondhatjuk:

- az amplitúdó görbe egy  $+20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes  $\omega < \frac{1}{T}$  frekvenciákon, mely az  $\frac{1}{A_d}$  pontban metszi (metszené) a 0 dB-es tengelyt, majd  $\frac{1}{T} < \omega$  frekvenciákra egy  $20 \lg \frac{A_d}{T}$  erősítésű vízszintes egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés az  $\frac{1}{T}$  és  $\frac{1}{A_d}$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $\frac{1}{T} > \frac{1}{A_d}$  akkor létrejön a metsződés, ha  $\frac{1}{T} < \frac{1}{A_d}$  akkor nem jön létre metsződés, ha  $\frac{1}{T} = \frac{1}{A_d}$  akkor a diagram éppen a 0dB-es tengelyre törik.
- a fázis  $90^\circ$  és  $0^\circ$  között változik,  $0.1\omega_s$ -nél kisebb frekvenciák esetén  $90^\circ$ ,  $0.1\omega_s$  és  $10\omega_s$  frekvenciatartományon  $-45 \frac{o}{dek}$  meredekségű egyenes,  $10\omega_s$ -nél nagyobb frekvenciák esetén  $0^\circ$  (lásd 10. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $+45^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

## 2.6. 1TI 1 tárolós integráló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s(Ts + 1)}$$

Frekvenciafüggvénye:

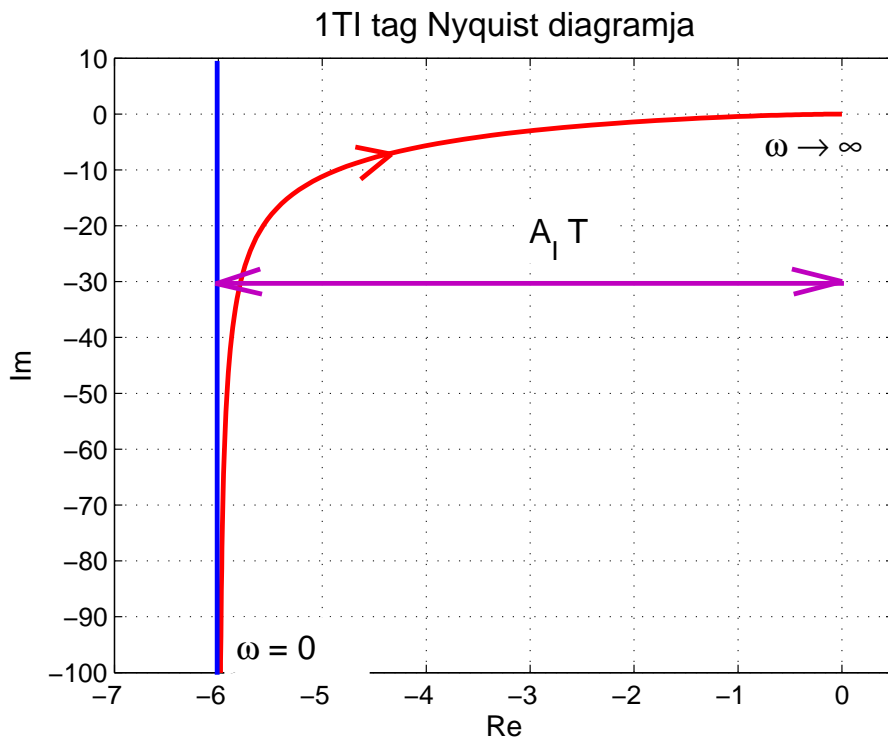
$$G(i\omega) = \frac{A_I}{i\omega(Ti\omega + 1)} = \frac{-A_I T \omega^2 - A_I \omega i}{T^2 \omega^4 + \omega^2} = \frac{-A_I T - \frac{A_I}{\omega} i}{T^2 \omega^2 + 1} = \frac{2}{3(i\omega)^2 + i\omega}$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

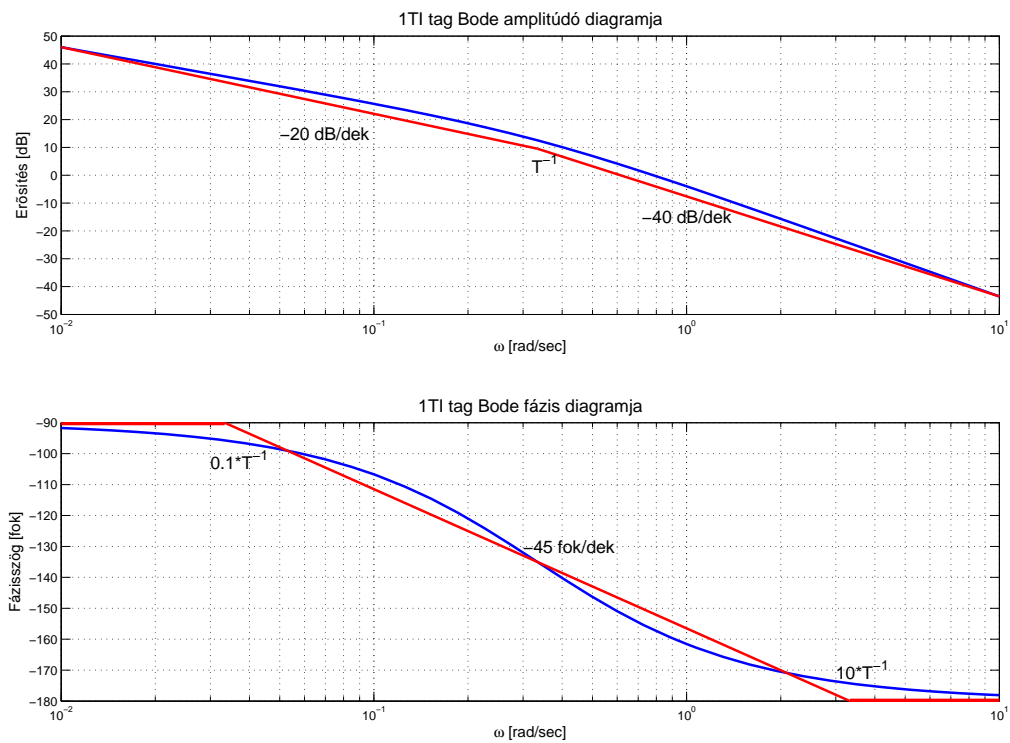
$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -A_I T - i\infty$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{-A_I T - A_I T i}{2} = -\frac{A_I T}{2} - \frac{A_I T i}{2}$$



11. ábra. 1TI alaptag Nyquist diagramja



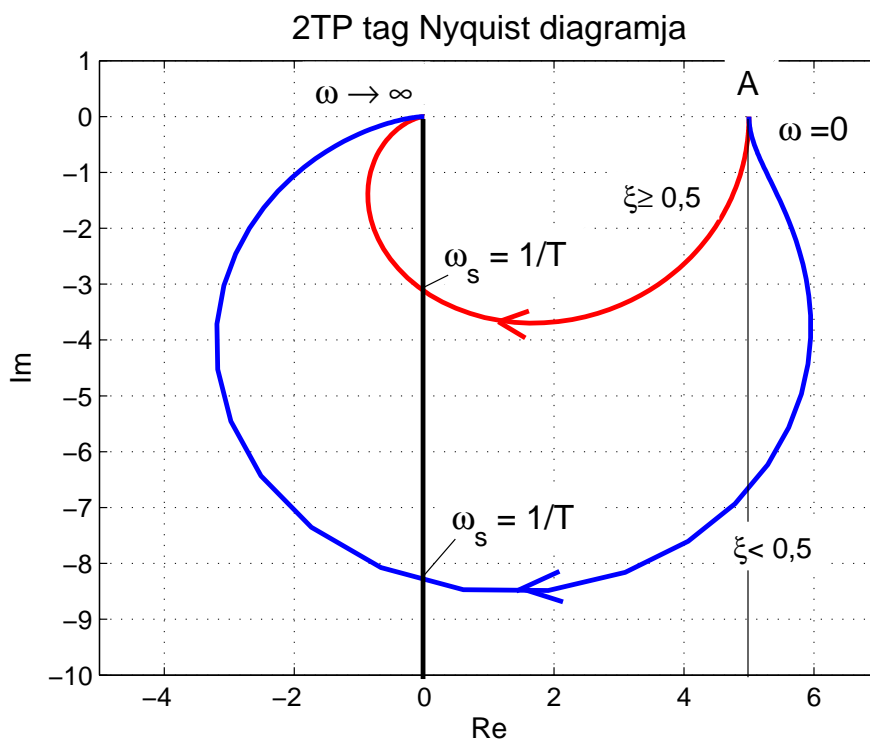
12. ábra. 1TI alaptag Bode diagramja

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokkörfrekvencia, itt  $\varphi(\omega_s) = -135^\circ$ . A tag Nyquist diagramja  $\omega = 0$ -ban az  $A_I T - i\infty$  pontból indul és a 0 pontba fut be. Aszimptotája az  $A_I T$ -vel jellemzett egyenes (lásd 11. ábra).

Az 1TI tagot mint 0TI és 1TP soros kapcsolásának tekintve a Bode diagramok:

- az amplitúdó görbe egy  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes  $\omega < \frac{1}{T}$  frekvenciákon, majd  $\frac{1}{T} < \omega$  frekvenciákra egy  $-40 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés az  $\frac{1}{T}$  és  $A_I$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $\frac{1}{T} > A_I$  akkor  $-20 \frac{dB}{dek}$ , egyéb esetben  $-40 \frac{dB}{dek}$  meredekséggel metszi a görbe a 0dB-es tengelyt.
- a fázis  $-90^\circ$  és  $-180^\circ$  között változik,  $0.1\omega_s$ -nél kisebb frekvenciák esetén  $-90^\circ$ ,  $0.1\omega_s$  és  $10\omega_s$  frekvenciatartományon  $-45 \frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes,  $10\omega_s$ -nél nagyobb frekvenciák esetén  $-180^\circ$  (lásd 12. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-135^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

## 2.7. 2TP 2 tárolós arányos tag



13. ábra. 2TP alaptag Nyquist diagramja

Átviteli függvénye:

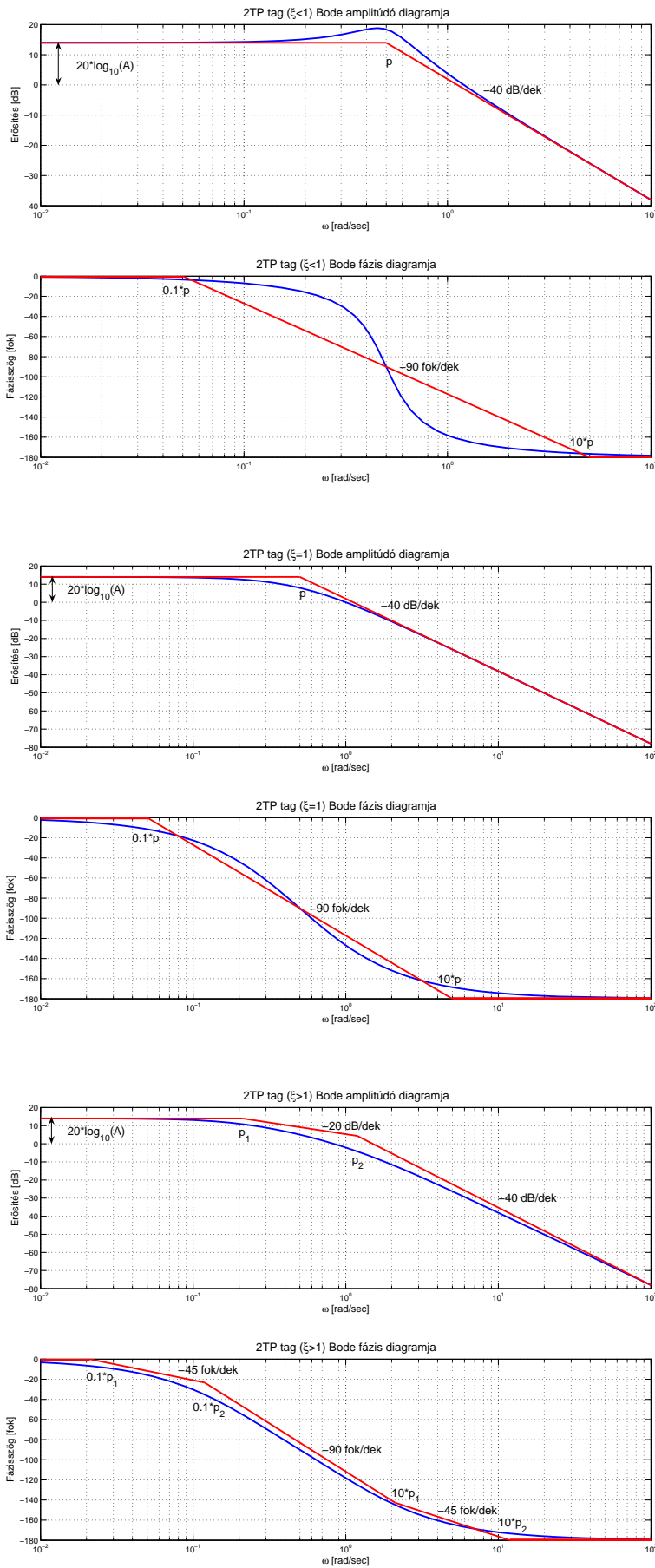
$$G(s) = \frac{A}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A}{T^2(i\omega)^2 + 2T\xi i\omega + 1} = \frac{A(1 - T^2\omega^2 - 2T\xi\omega i)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} = \frac{A - AT^2\omega^2 - 2AT\xi\omega i}{T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1}$$

$$\xi = 0,8 \quad G(i\omega) = \frac{5}{4(i\omega)^2 + 3,2i\omega + 1}$$

$$\xi = 0,3 \quad G(i\omega) = \frac{5}{4(i\omega)^2 + 1,2i\omega + 1}$$



14. ábra. 2TP alaptag Bode diagramjai

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = A$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{A - A - 2A\xi i}{4\xi^2} = 0 - \frac{2A\xi i}{4\xi^2}$$

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán képzetes  $\varphi(\omega_s) = -90^\circ$ . A tag Nyquist diagramja egy torz "félkör" az alsó két síknegyedben A-ból 0-ba (ahány tárolás a tag, annyi síknegyeden halad át a Nyquist diagramja) (lásd 13. ábra). Bizonyítható (lásd függelék), hogy az A pontba húzott függőleges egyenest  $\xi < 0,5$  csillapítás esetén fogja a diagram kétszer metszeni (ekkor "lóg át" rajta jobbra) egyébként minden pontja az egyenesen, vagy annak bal oldalán helyezkedik el.

A kéttárolós tagok esetében a rendszer viselkedését a  $\xi$  csillapítási tényező befolyásolja, három esetet különböztetünk meg (tipikus kéttárolós tag az egytömegű csillapított lengőrendszer):

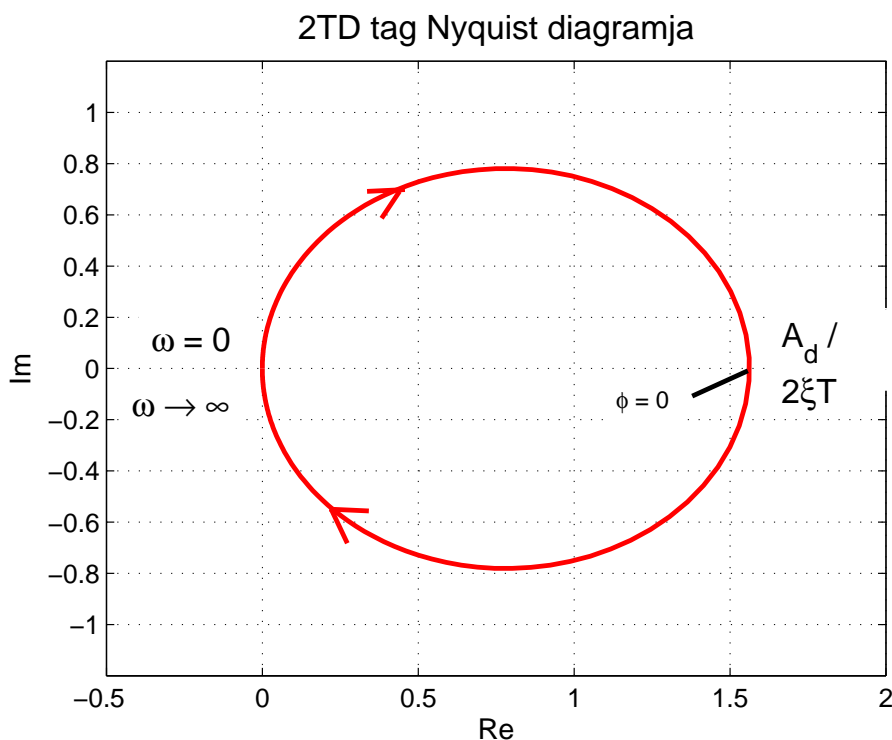
- $\xi < 1$  a rendszer gyengén csillapított, ekkor a rendszernek komplex konjugált póluspárja van,
- $\xi = 1$  esetén a rendszer aperiodikus-periodikus határhelyzetben van, a rendszernek egy darab kétszeres multiplicitású valós pólusa van (kritikus csillapítás),
- $\xi > 1$  esetén a rendszer túlcsillapított, két eltérő valós pólusa van ( $|p_1| < |p_2|$ ).

A kéttárolós tagok Bode diagramjait szorzatra bontással és az alaptagok ábrázolása utáni eredő számítással kaphatjuk meg.

A pólusok alapján a 2TP aszimptotikus Bode diagramokról a következőket mondhatjuk:

- – Komplex konjugált póluspár vagy kétszeres multiplicitású valós pólus esetén az amplitúdó diagram  $20 \lg(A)$  erősítésű vízszintes egyenes az  $|p_1| = |p_2| = |p|$  frekvenciáig, majd onnan  $-40 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes.
- A fázisfüggvény  $0^\circ$  és  $-180^\circ$  között forog:  $0^\circ$  a  $0.1|p|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-90 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p|$  és  $10|p|$  frekvenciák között és  $-180^\circ$   $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 14. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-90^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.
- A valós Bode amplitúdó diagramon a  $|p|$  frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben. Határeset a  $\xi = 0$  csillapítatlan rendszer ahol az  $\omega_s = |p|$  sajátlengési (vagy sarok) frekvencián végtelen nagy amplitúdó és ezért végtelen nagy kiemelés alakul ki.
- – Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram  $20 \lg(A)$  erősítésű vízszintes egyenes az  $|p_1|$  frekvenciáig, majd onnan  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes a  $|p_2|$  frekvenciáig.  $|p_2|$  frekvenciától pedig  $-40 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes.
- A fázisfüggvény  $0^\circ$  és  $-180^\circ$  között forog:  $0^\circ$  a  $0.1|p_1|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-45 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_1|$  és  $0.1|p_2|$  frekvenciák között,  $-90 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_2|$  és  $10|p_1|$  frekvenciák között,  $-45 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $10|p_1|$  és  $10|p_2|$  frekvenciák között, és  $-180^\circ$   $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 14. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-90^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

## 2.8. 2TD 2 tárolós differenciáló tag



15. ábra. 2TD alaptag Nyquist diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_d s}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = \frac{A_d i\omega}{T^2 (i\omega)^2 + 2T\xi i\omega + 1} = \frac{A_d i\omega(1 - T^2\omega^2 - 2T\xi\omega i)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\xi^2\omega^2} = \frac{(1 - T^2\omega^2) A_d i\omega + 2A_d T\xi\omega^2}{T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1}$$

$$\xi = 0,8 \quad G(i\omega) = \frac{5i\omega}{4(i\omega)^2 + 3,2i\omega + 1}$$

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

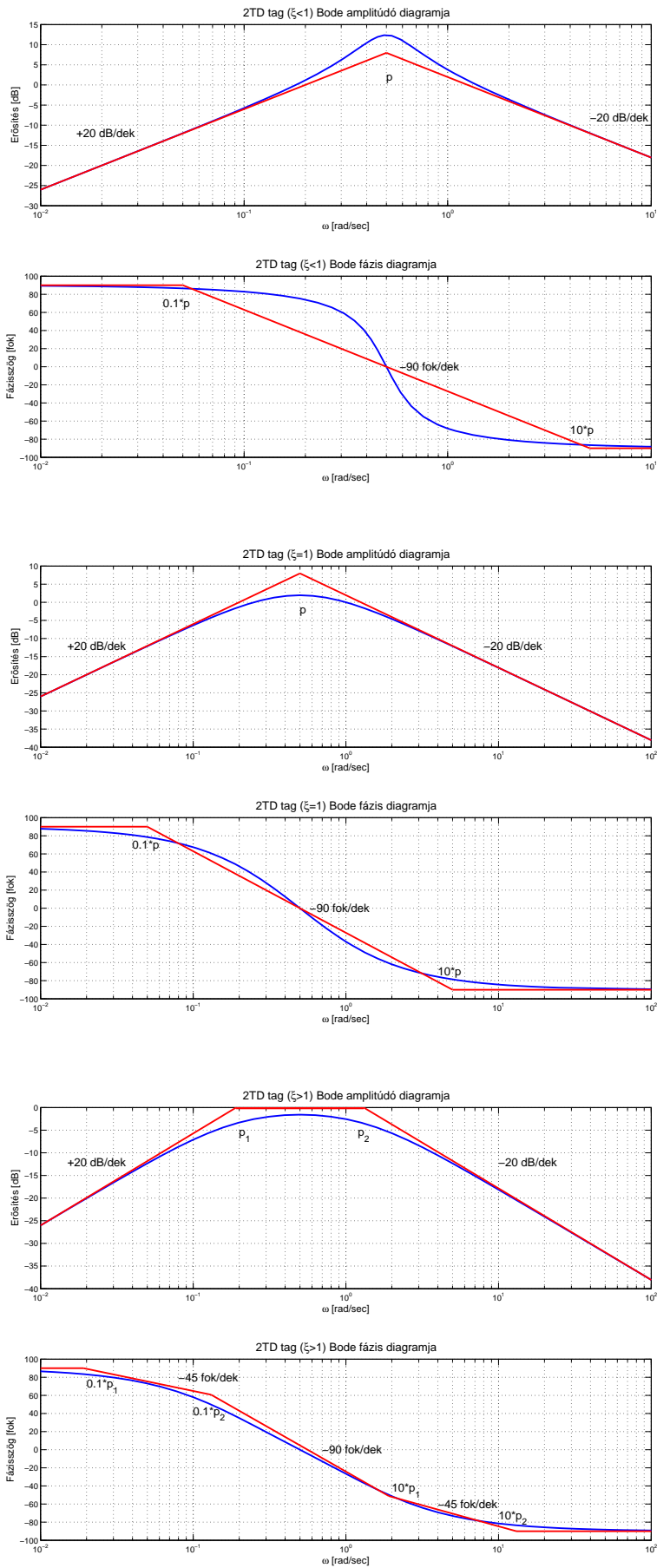
$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{0 + \frac{2A_d\xi}{T}}{4\xi^2} = \frac{A_d}{2\xi T} + 0i$$

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán valós ( $\varphi(\omega_s) = 0$ ). A tag Nyquist diagramja egy teljes kör a felső és alsó két síknegyedben 0-ból 0-ba (ahány tárolós a tag, annyi síknegyeden halad át a Nyquist diagramja) (lásd 15. ábra). A teljes kör alak igazolása a függelékben megtalálható.

A pólusok alapján az 1TD aszimptotikus Bode diagramokról a következőket mondhatjuk:



16. ábra. 2TD alaptag Bode diagramjai



- Komplex konjugált póluspár vagy egy darab kétszeres multiplicitású pólus esetén az amplitúdó diagram  $+20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes az  $|p_1| = |p_2|$  frekvenciáig (mely 0dB-es tengelyt az  $\frac{1}{A_d}$  frekvencián metszi), majd onnan  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés az  $\frac{1}{T}$  és  $\frac{1}{A_d}$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $\frac{1}{T} > \frac{1}{A_d}$  akkor létrejön a metsződés, ha  $\frac{1}{T} < \frac{1}{A_d}$  akkor nem jön létre metsződés.
- A fázisfüggvény  $90^\circ$  és  $-90^\circ$  között forog:  $90^\circ$  a  $0.1|p|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-90 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p|$  és  $10|p|$  frekvenciák között és  $-90^\circ$   $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 16. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $0^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.
- A valós Bode amplitúdó diagramon a  $|p|$  frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben. Határeset a  $\xi = 0$  csillapítatlan rendszer ahol az  $\omega_s = |p|$  sajátlengési (vagy sarok) frekvencián végtelen nagy amplitúdó és ezért végtelen nagy kiemelés alakul ki.
- Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram  $+20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes az  $|p_1|$  frekvenciáig (mely 0dB-es tengelyt az  $\frac{1}{A_d}$  frekvencián metszi), majd onnan vízszintes egyenes a  $|p_2|$  frekvenciáig.  $|p_2|$  frekvenciától pedig  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés az  $|p_1|$  és  $\frac{1}{A_d}$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $|p_1| > \frac{1}{A_d}$  akkor létrejön a metsződés, ha  $|p_1| < \frac{1}{A_d}$  akkor nem jön létre metsződés.
- A fázisfüggvény  $90^\circ$  és  $-90^\circ$  között forog:  $90^\circ$  a  $0.1|p_1|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-45 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_1|$  és  $0.1|p_2|$  frekvenciák között,  $-90 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_2|$  és  $10|p_1|$  frekvenciák között,  $-45 \frac{\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $10|p_1|$  és  $10|p_2|$  frekvenciák között, és  $-90^\circ$   $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 16. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $0^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

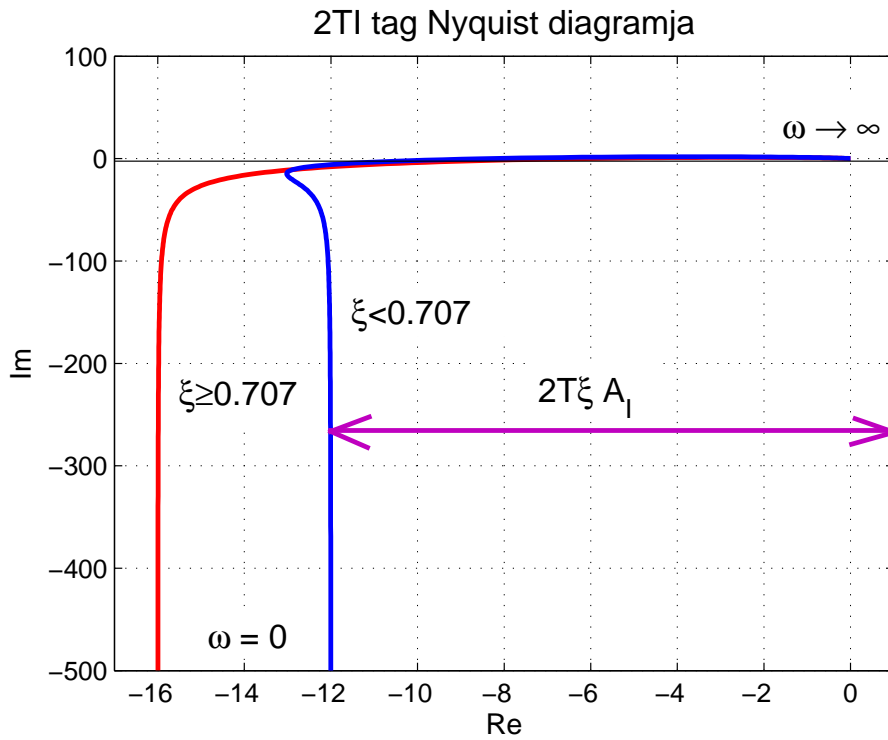
## 2.9. 2TI 2 tárolós integráló tag

Átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{A_I}{s(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)}$$

Frekvenciafüggvénye:

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{A_I}{T^2(i\omega)^3 + 2T\xi(i\omega)^2 + i\omega} = \frac{A_I(-2T\xi\omega^2 - \omega i + T^2\omega^3 i)}{4T^2\xi^2\omega^4 + \omega^2 - 2T^2\omega^4 + T^4\omega^6} = \\ &= \frac{-2T\xi A_I - \frac{A_I}{\omega} i + T^2 A_I \omega i}{4T^2\xi^2\omega^2 + 1 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4} \\ G(i\omega)|_{\xi=0,8} &= \frac{5}{4(i\omega)^3 + 3,2(i\omega)^2 + i\omega} \quad G(i\omega)|_{\xi=0,6} = \frac{5}{4(i\omega)^3 + 2,4(i\omega)^2 + i\omega} \end{aligned}$$



17. ábra. 2TI alaptag Nyquist diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = -2TA_I\xi - i\infty$$

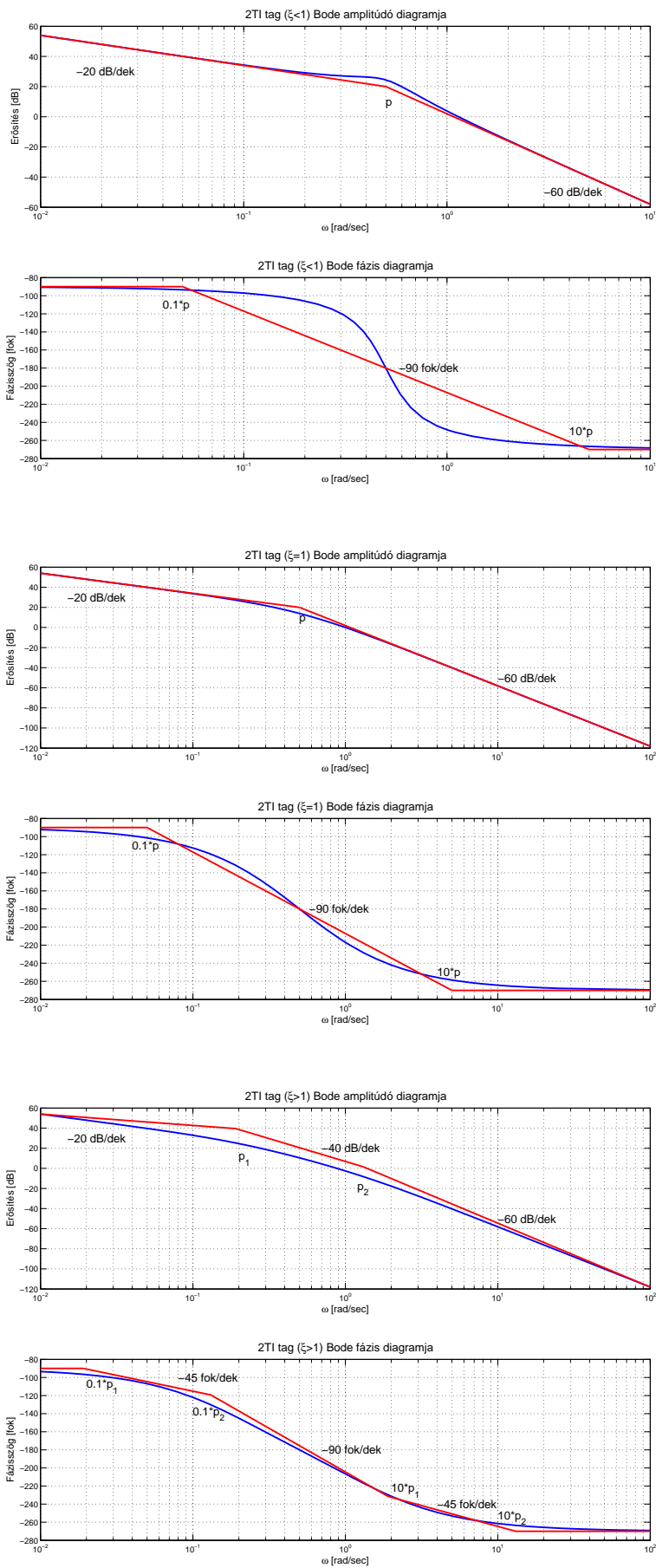
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 0$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = \frac{-2TA_I\xi + (TA_I - TA_I)i}{4\xi^2} = \frac{-TA_I}{2\xi} + 0i$$

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt a frekvenciafüggvény értéke tisztán valós ( $\varphi(\omega_s) = -180^\circ$ ). A tag Nyquist diagramja az 1TI tag diagramjának torzítása (két síknyegyden halad át)  $2TA_I\xi$  értékkel jellemzett aszimptotával (lásd 17. ábra). Bizonyítható (lásd függelék), hogy a  $2TA_I\xi$  pontba húzott függőleges egyenest  $\xi < 1/\sqrt{2}$  csillapítás esetén fogja a diagram kétszer metszeni (ekkor "lóg át" rajta balra) egyébként minden pontja az egyenesen, vagy annak jobb oldalán helyezkedik el.

A pólusok alapján az 1TI aszimptotikus Bode diagramokról a következőket mondhatjuk:

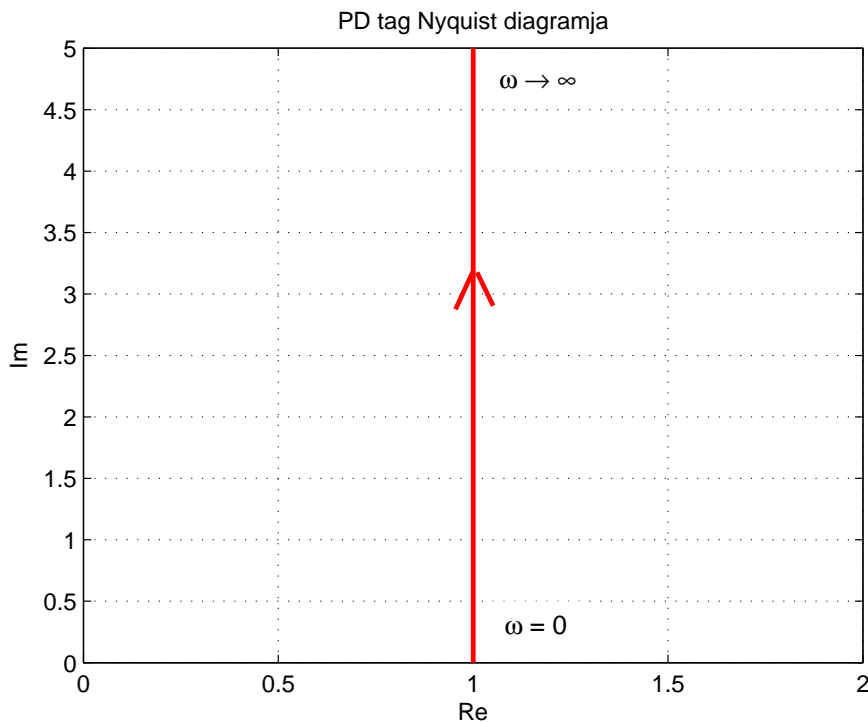
- – Komplex konjugált póluspár vagy egy darab kétszeres multiplicitású pólus esetén az amplitúdó diagram  $-20\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes az  $|p_1| = |p_2| = |p|$  frekvenciáig, majd onnan  $-60\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés a  $|p|$  és  $A_I$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $|p| > A_I$ , akkor  $-20\frac{dB}{dek}$ , egyéb esetben  $-60\frac{dB}{dek}$  meredekséggel metszi a görbe a 0dB-es tengelyt.
- A fázisfüggvény  $-90^\circ$  és  $-270^\circ$  között forog:  $-90^\circ$  a  $0.1|p|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-90\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p|$  és  $10|p|$  frekvenciák között és  $-270^\circ$   $10|p|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 18. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-180^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.
- A valós Bode amplitúdó diagramon a  $|p|$  frekvencián kiemelés található gyengén csillapított esetben.



18. ábra. 2TI alaptag Bode diagramjai

- Két valós pólus esetén az amplitúdó diagram  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes az  $|p_1|$  frekvenciáig, majd onnan  $-40 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes a  $|p_2|$  frekvenciáig.  $|p_2|$  frekvenciától pedig  $-60 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A 0dB-es tengellyel való metsződés a  $|p_1|$  és  $A_I$  frekvenciák viszonyától függ. Ha  $|p_1| > A_I$ , akkor  $-20 \frac{dB}{dek}$ , egyéb esetben  $-40 \frac{dB}{dek}$  vagy  $-60 \frac{dB}{dek}$  meredekséggel metszi a görbe a 0dB-es tengelyt.
- A fázisfüggvény  $-90^\circ$  és  $-270^\circ$  között forog:  $-90^\circ$  a  $0.1|p_1|$  frekvenciánál kisebb frekvenciákra,  $-45 \frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_1|$  és  $0.1|p_2|$  frekvenciák között,  $-90 \frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1|p_2|$  és  $10|p_1|$  frekvenciák között,  $-45 \frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $10|p_1|$  és  $10|p_2|$  frekvenciák között, és  $-270^\circ$   $10|p_2|$ -nél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 18. ábra). Látható, hogy  $\omega_s = 1/T$  frekvencián a Bode fázisdiagram a Nyquist diagrammal megegyezően éppen  $-180^\circ$  értéket vesz fel, melyet az aszimptotikus ábrázolás is pontosan ad vissza.

## 2.10. PD arányos deriváló tag



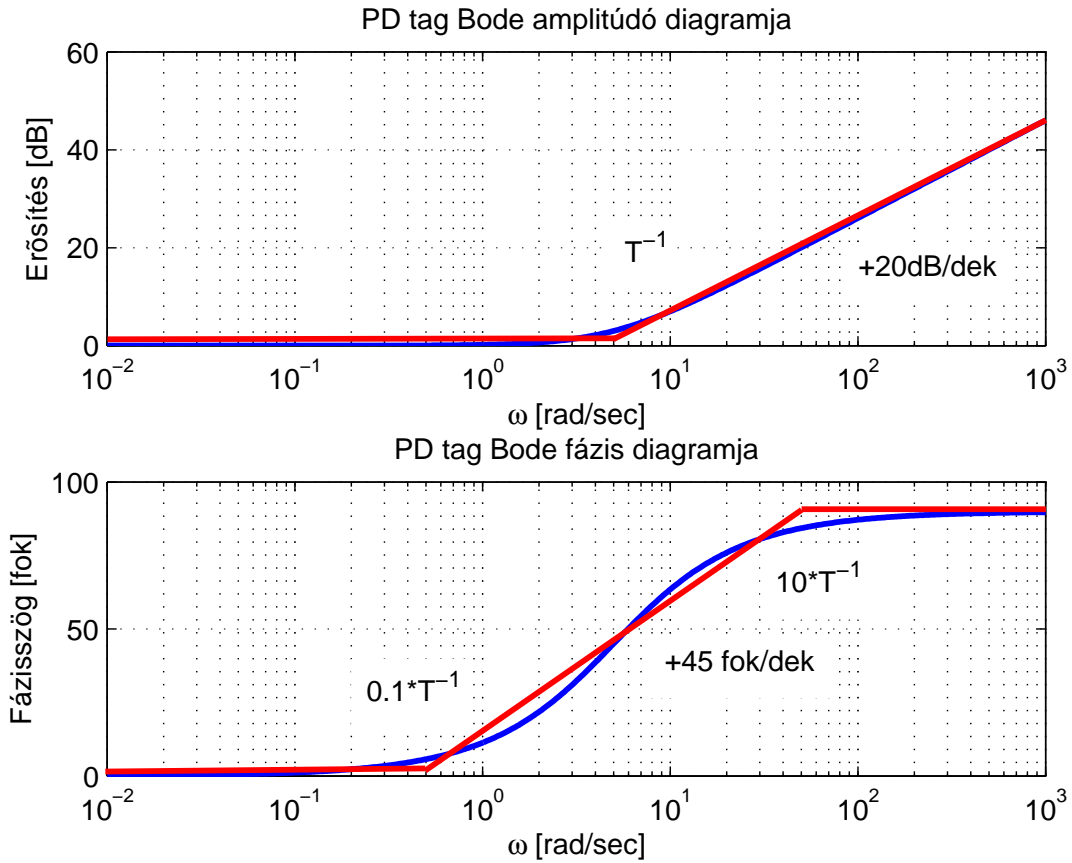
19. ábra. PD alaptag Nyquist diagramja

Átviteli függvénye:

$$G(s) = Ts + 1$$

Frekvenciafüggvénye:

$$G(i\omega) = Ti\omega + 1$$



20. ábra. PD alaptag Bode diagramja

A frekvenciafüggvény jellegzetes pontjai:

$$\omega = 0 \Rightarrow G(i0) = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(i\infty) = 1 + i\infty$$

$$\omega_s = \frac{1}{T} \Rightarrow G\left(i\frac{1}{T}\right) = i + 1$$

A fenti kifejezésben  $\omega_s$  az úgynevezett sarokfrekvencia, itt  $\varphi(\omega_s) = 45^\circ$ . A tag Nyquist diagramja egy egyenes az 1 pontból az  $1 + i\infty$ -be (lásd 19. ábra).

A Bode diagram esetében a továbbiakban az aszimptotikus szerkesztés módszerét ismergetjük. A diagramokon pirossal jelöljük az aszimptotikus közelítést, míg késsel a valódi frekvencia válaszokat.

PD tag Bode amplitúdó diagramja  $\omega_s = \frac{1}{T}$  frekvenciáig egy  $0dB$  magasságban haladó vízszintes egyenes, majd a sarokfrekvenciától  $+20\frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. Fázisdiagramja  $0^\circ$  a sarokfrekvencia tizedénél kisebb frekvenciákra,  $+45\frac{^\circ}{dek}$  meredekségű egyenes  $0.1\omega_s$  és  $10\omega_s$  frekvenciák között és  $+90^\circ$  a sarokfrekvencia tízszeresénél nagyobb frekvenciák esetén (lásd 20. ábra).

### 3. Függelék

#### 3.1. Igazolás: 0TD alaptag Bode diagramja

Az ideális differenciáló tag erősítését a következő módon írhatjuk:

$$a(\omega) = 20 \lg |A_d i \omega| = 20 \lg A_d \omega = 20 \lg A_d + 20 \lg \omega$$

Amennyiben a körfrekvencia egy dekádnnyit változik akkor az erősítés változása:

$$\begin{aligned} a(10 \cdot \omega) - a(\omega) &= 20 \lg A_d + 20 \lg 10 + 20 \lg \omega - 20 \lg A_d - 20 \lg \omega \\ &= 20 \lg 10 = 20 \end{aligned}$$

vagyis az amplitúdó görbe meredeksége  $+20 \frac{db}{dek}$ .

A vágási körfrekvencia:

$$\begin{aligned} 0 &= 20 \lg A_d + 20 \lg \omega_c \\ \lg \omega_c &= -\lg A_d = \lg A_d^{-1} \\ \omega_c &= \frac{1}{A_d} \end{aligned}$$

A fázisfüggvény:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)} = \arctan \frac{\operatorname{Im} A_d i \omega}{\operatorname{Re} A_d i \omega} = \arctan \frac{A_d \omega}{0} = \arctan \infty = +90^\circ$$

minden  $\omega$ -ra.

#### 3.2. Igazolás: 0TI alaptag Bode diagramja

Az ideális integráló tag erősítését (hasonlóan a differenciálóhoz) a következő módon írhatjuk:

$$a(\omega) = 20 \lg \frac{A_I}{\omega} = 20 \lg A_I - 20 \lg \omega$$

Amennyiben a körfrekvencia egy dekádnnyit változik akkor az erősítés változása:

$$\begin{aligned} a(10 \cdot \omega) - a(\omega) &= 20 \lg A_I - 20 \lg 10 - 20 \lg \omega - 20 \lg A_I + 20 \lg \omega \\ &= -20 \lg 10 = -20 \end{aligned}$$

vagyis az amplitúdó görbe meredeksége  $-20 \frac{db}{dek}$ .

A vágási körfrekvencia:

$$\begin{aligned} 0 &= 20 \lg A_I - 20 \lg \omega_c \\ \lg \omega_c &= \lg A_I \\ \omega_c &= A_I \end{aligned}$$

A fázisfüggvény:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} G(i\omega)}{\operatorname{Re} G(i\omega)} = \arctan \frac{\operatorname{Im} \frac{-A_I i}{\omega}}{\operatorname{Re} \frac{-A_I i}{\omega}} = \arctan \frac{-A_I}{0} = -\arctan \infty = -90^\circ$$

minden frekvencián.

### 3.3. Igazolás: 1TP alaptag Nyquist diagramja félkör alakú

Thálesz tétele értelmében egy kör átmérője fölé rajzolt háromszögek, melyek harmadik csúcsa a körön helyezkedik el mindig derékszögűek. Mi ezt a tételt fordítva fogjuk alkalmazni és belátjuk, hogy adott Nyquist diagram esetén a futó pont ( $\omega$ ) és a kezdő- ( $\omega = 0$ ) és végpont ( $\omega \rightarrow \infty$ ) által alkotott háromszögek derékszögűek, így a futó pont félkört (teljes kört) fut be.

Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon  $\underline{G}$ .  $\underline{A}$  pedig az  $\omega = 0$  ponthoz tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a  $\underline{G}$  vektor a  $\underline{GA}$  különbségi vektorra mindig merőleges:

$$\begin{aligned}\underline{G} &= \left[ \frac{A}{N} \quad \frac{-AT\omega}{N} \right]^T \\ N &= 1 + T^2\omega^2 \\ \underline{A} &= [A \quad 0]^T \\ \underline{GA} &= \underline{A} - \underline{G} = \left[ A - \frac{A}{N} \quad \frac{AT\omega}{N} \right]^T \\ \underline{GA} \cdot \underline{G} &= \frac{A^2}{N} - \frac{A^2}{N^2} - \frac{A^2T^2\omega^2}{N^2} = \frac{A^2N}{N^2} - \frac{A^2 + A^2T^2\omega^2}{N^2} = \\ &= \frac{A^2 + A^2T^2\omega^2}{N^2} - \frac{A^2 + A^2T^2\omega^2}{N^2} = 0 \quad \forall \omega \\ &q.e.d.\end{aligned}$$

### 3.4. Igazolás: 1TP alaptag Bode amplitúdó diagramja

Az 1TP tag amplitúdó függvénye:

$$a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{A}{Ti\omega + 1} \right| = 20 \lg A - 20 \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2}$$

ami alacsony frekvenciák esetén, azaz amikor a gyök alatti kifejezésben a frekvencia függés elhanyagolható,  $\omega \ll \frac{1}{T}$ :

$$a(\omega)|_{\omega \ll \frac{1}{T}} = 20 \lg A$$

az aszimptota egyenlete. Magas frekvenciák esetén, mikor is a gyök alatti kifejezésben az 1 elhanyagolható,  $\omega \gg \frac{1}{T}$ :

$$a(\omega)|_{\omega \gg \frac{1}{T}} = 20 \lg A - 20 \lg T\omega$$

az aszimptota egyenlete, ami egy  $-20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes. A két aszimptota metszéspontját meghatározó egyenlet:

$$20 \lg A = 20 \lg A - 20 \lg T\omega$$

amiből  $\omega = \frac{1}{T}$  adódik.

### 3.5. Igazolás: 1TD alaptag Nyquist diagramja félkör alakú

Az igazolás elve azonos az 1TP tagra vonatkozóval. Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon  $\underline{G}$ .  $\underline{A}$  pedig az  $\omega \rightarrow \infty$  ponthoz tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a  $\underline{G}$  vektor a  $\underline{GA}$  különbségi vektorra mindig merőleges:

$$\begin{aligned}
\underline{G} &= \left[ \frac{A_d T \omega^2}{N} \quad \frac{A_d \omega}{N} \right]^T \\
N &= 1 + T^2 \omega^2 \\
\underline{A} &= \left[ \frac{A_d}{T} \quad 0 \right]^T \\
\underline{GA} &= \underline{A} - \underline{G} = \left[ \frac{A_d}{T} - \frac{A_d T \omega^2}{N} \quad -\frac{A_d \omega}{N} \right]^T \\
\underline{GA} \cdot \underline{G} &= \frac{A_d^2 \omega^2}{N} - \frac{A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2}{N^2} = \frac{A_d^2 \omega^2 N}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} = \\
&= \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2 + A_d^2 T^2 \omega^4}{N^2} = 0 \quad \forall \omega \\
& \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

### 3.6. Igazolás: 2TP alaptag Nyquist diagramjának viszonya az A ponttal jellemzett függőleges egyeneshez $\xi$ függvényében

A 2TP tag Nyquist diagramja akkor "lóg át" az  $[A \ 0]$  pontba állított függőleges egyenesen, ha  $ReG(i\omega) = A$  lehetséges  $\omega \neq 0$  esetén is. Az erre vonatkozó számítás:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{A - AT^2 \omega^2}{T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 + 1} \\
AT^4 \omega^4 + (4AT^2 \xi^2 - 2AT^2) \omega^2 + A &= A - AT^2 \omega^2 \quad a \triangleq \omega^2 > 0 \\
AT^4 a^2 + (4AT^2 \xi^2 - AT^2) a &= 0 \\
AT^4 a &= AT^2 - 4AT^2 \xi^2 \\
a &= \frac{1}{T^2} - \frac{4}{T^2} \xi^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Könnyen belátható, hogy (4)-nek akkor létezik  $a > 0$  megoldása, ha  $\xi < 0,5$ . Ezzel igazoltuk, hogy ekkor fog a Nyquist diagram "átlógni" az  $A$  pontba húzott függőleges.

### 3.7. Igazolás: 2TI alaptag Nyquist diagramjának viszonya a $-2A_I T \xi$ ponttal jellemzett függőleges egyeneshez $\xi$ függvényében

A 2TI tag Nyquist diagramja akkor "lóg át" a  $[-2A_I T \xi \ 0]$  pontba állított függőleges egyenesen, ha  $ReG(i\omega) = -2A_I T \xi$  lehetséges  $\omega \neq 0$  esetén is. Az erre vonatkozó számítás (hasonlóan a 2TP taghoz):

$$\begin{aligned}
-2A_I T \xi &= \frac{-2A_I T \xi}{T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 + 1} \\
T^4 \omega^4 + (4T^2 \xi^2 - 2T^2) \omega^2 &= 0 \quad a \triangleq \omega^2 > 0 \\
T^4 a^2 &= 2T^2 a - 4T^2 \xi^2 a \\
a &= \frac{2}{T^2} - \frac{4}{T^2} \xi^2
\end{aligned} \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy (5)-nek akkor létezik  $a > 0$  megoldása, ha  $\xi < 1/\sqrt{2}$ . Ezzel igazoltuk, hogy ekkor fog a Nyquist diagram "átlógni" a  $-2A_I T \xi$  pontba húzott függőleges.



### 3.8. Igazolás: 2TD alaptag Nyquist diagramja kör alakú

Az igazolás elve azonos az 1TP tagra vonatkozóval. Jelölje a futó pont valós és képzetes részből képzett vektorát a komplex számsíkon  $\underline{G}$ .  $\underline{A}$  pedig az  $\omega_s = 1/T$  sarokkőrfrekvenciához tartozó vektort. Azt szükséges belátni, hogy a  $\underline{G}$  vektor a  $\underline{GA}$  különbségi vektorra mindig merőleges:

$$\begin{aligned}\underline{G} &= \left[ \frac{2T\xi\omega^2 A_d}{N} \quad \frac{(1-T^2\omega^2)A_d\omega}{N} \right]^T \\ N &= T^4\omega^4 + (4T^2\xi^2 - 2T^2)\omega^2 + 1 \\ \underline{A} &= \left[ \frac{A_d}{2\xi T} \quad 0 \right]^T \\ \underline{GA} &= \underline{A} - \underline{G} = \left[ \frac{A_d}{2\xi T} - \frac{2T\xi\omega^2 A_d}{N} \quad -\frac{(1-T^2\omega^2)A_d\omega}{N} \right]^T \\ \underline{GA} \cdot \underline{G} &= \frac{2\xi T A_d^2 \omega^2}{2\xi T N} - \frac{4T^2 \xi^2 \omega^4 A_d^2}{N^2} - \frac{(1-T^2\omega^2)^2 A_d^2 \omega^2}{N^2} = \\ &= \frac{A_d^2 \omega^2 (T^4 \omega^4 + 4T^2 \xi^2 \omega^2 - 2T^2 \omega^2 + 1)}{N^2} - \frac{A_d^2 \omega^2 (T^4 \omega^4 + 4T^2 \xi^2 \omega^2 - 2T^2 \omega^2 + 1)}{N^2} = 0 \\ &q.e.d.\end{aligned}$$

### 3.9. Igazolás: PD alaptag Bode amplitúdó diagramja

A PD tag amplitúdó függvénye:

$$a(\omega) = 20 \lg |Ti\omega + 1| = 20 \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2}$$

ami alacsony frekvenciák esetén, azaz amikor a gyök alatti kifejezésben a frekvencia függés elhanyagolható,  $\omega \ll \frac{1}{T}$ :

$$a(\omega)|_{\omega \ll \frac{1}{T}} = 20 \lg 1 = 0dB$$

az aszimptota egyenlete. Magas frekvenciák esetén, mikor is a gyök alatti kifejezésben az 1 elhanyagolható,  $\omega \gg \frac{1}{T}$ :

$$a(\omega)|_{\omega \gg \frac{1}{T}} = 20 \lg T\omega$$

az aszimptota egyenlete, ami egy  $+20 \frac{dB}{dek}$  meredekségű egyenes.

A két aszimptota metszéspontját meghatározó egyenlet:

$$20 \lg 1 = 20 \lg T\omega$$

amiből  $\omega = \frac{1}{T}$  adódik.

### 3.10. Igazolás: Összetett tag Bode diagramja szorzat alakból a szorzatban szereplő alaptagok Bode diagramjainak összegeként kapható meg

Vegyük egy összetett tag alaptagok szorzataként felírt frekvenciafüggvényét:

$$\begin{aligned}G(i\omega_0) &= G_1 G_2 \dots G_n \\ G_j &\in \mathbb{C} \quad j = 1 \dots n \Rightarrow \\ G_j &= r_j e^{i\varphi_j} \Rightarrow \\ G(i\omega_0) &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} \dots r_n e^{i\varphi_n} = r_1 r_2 \dots r_n e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \dots e^{i\varphi_n} = r e^{i\varphi}\end{aligned}\tag{6}$$

Az eredő amplitúdó így  $r = r_1 r_2 \dots r_n$  az eredő fázis pedig  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$ . A fázisszögről így azonnal látható, hogy az alaptagok fázisszögeit összegezve megkapjuk az eredő szöget.

Vizsgáljuk most a Bode amplitúdó diagram értékét felhasználva az amplitúdó definícióját:

$$\begin{aligned} a(\omega_0) &= 20 \lg |G(i\omega_0)| = 20 \lg |r_1 r_2 \dots r_n e^{i\varphi}| = 20 \lg(r_1 r_2 \dots r_n) = \\ &= 20 \lg r_1 + 20 \lg r_2 + \dots + 20 \lg r_n = a_1(\omega_0) + a_2(\omega_0) + \dots + a_n(\omega_0) \end{aligned} \quad (7)$$

## Hivatkozások

- [1] Bokor József, Gáspár Péter: Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal, TypoTeX kiadó, Budapest, 2008.