Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. március 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.
Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletekért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.
Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív.

$$\sqrt{2}\,(1+3i)\cdot z^5+4+2i=0$$

* * * * *

Átrendezve: $z^5=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-4-2i}{1+3i}$. Ebből $\frac{-4-2i}{1+3i}=-1+i$, így $z^5=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. (1 pont)
A feladat tehát $\sqrt[5]{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$ meghatározása. (1 pont)
$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=1\,(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$. (2 pont)
Ebből $\sqrt[5]{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}=1\,(\cos(27^\circ+k\cdot 72^\circ)+i\sin(27^\circ+k\cdot 72^\circ))$, $k=0,1,2,3,4$. (2 pont)
A „valós rész pozitív, képzetes rész negatív” feltétel miatt a szög 270° és 360° között van. (1 pont)
Ez csak a $k=4$ esetben, a 315° esetén teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z=1\,(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$. (2 pont)

2. Tekintsük az alábbi egyenletekkel megadott S_1 és S_2 síkokat:

$$\begin{aligned} S_1: \quad & c\cdot x - y + z &=& \quad 7 \\ S_2: \quad & 4x - c\cdot y + 2z &=& \quad 9 \end{aligned}$$

a) A c valós paraméter milyen értékeire merőleges S_1 és S_2?
b) A c valós paraméter milyen értékeire párhuzamos S_1 és S_2?

* * * * *

S_1 és S_2 egy-egy normálvektora: $\underline{n}_1(c,-1,1)$ és $\underline{n}_2(4,-c,2)$. (1 pont)
a) A két sík akkor és csak akkor merőleges, ha a normálvektoraik merőlegesek. (1 pont)
Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha a normálvektorok skaláris szorzata 0. (1 pont)
$\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2 = c\cdot 4 + (-1)\cdot(-c) + 1\cdot 2 = \cancel{5c+2,}$ (1 pont)
így a két sík pontosan akkor merőleges, ha $c = -\frac{2}{5}$ (1 pont)
b) A két sík akkor és csak párhuzamos, ha a normálvektoraik párhuzamosak, (1 pont)
vagyis egymás többszörösei. (1 pont)
Az utolsó koordinátáik miatt $\underline{n}_2 = \lambda\cdot\underline{n}_1$ csak akkor lehet igaz, ha $\lambda = 2$. (1 pont)
$\underline{n}_2 = 2\cdot\underline{n}_1$ teljesüléséhez pedig $2c = 4$, illetve $-2 = -c$ kell igaz legyen. (1 pont)
Ebből $c = 2$ adódik, vagyis erre a c értékre lesz S_1 és S_2 párhuzamos. (1 pont)

3. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v}\in V$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda\odot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

* * * * *

Például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ választással $1\odot\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (5 pont)
Ez azt jelenti, hogy nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $1\odot\underline{v} = \underline{v}$ axióma, így V **nem** vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel. (5 pont)
A vektortér definícójában szereplő összes többi axióma teljesül a feladatbeli V, $\oplus$ és $\odot$ esetén. Bár ezek ellenőrzése közvetlenül nem visz közelebb a feladat megoldásához, mégis, a maradék hét axióma helyes leellenőrzéséért legföljebb 3 pont adható. (Ez a pontszám tehát *nem* az axiómák felsorolásáért jár, ez önmagában az útmutató elején írtaknak megfelelően nem ér pontot.)

4. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér vektorai. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek és $\underline{w}\notin\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\rangle$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ skalárok esetén a $\underline{v}_1+\lambda_1\underline{w},\underline{v}_2+\lambda_2\underline{w},\ldots,\underline{v}_k+\lambda_k\underline{w}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

* * * * *

Indirekt tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz, vagyis léteznek az $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ skalárok úgy, hogy ezek nem mindegyike 0 és $\alpha_1(\underline{v}_1+\lambda_1\underline{w})+\ldots+\alpha_k(\underline{v}_k+\lambda_k\underline{w}) = \underline{0}$. (2 pont)
Átrendezve: $\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k+(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_k\lambda_k)\underline{w} = \underline{0}$. (2 pont)
Vezessük be a $\mu = \alpha_1\lambda_1+\ldots+\alpha_k\lambda_k$ jelölést. Ekkor $\mu\neq 0$, hiszen különben $\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$ volna, ellentmondásban azzal, hogy $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k$ lineárisan függetlenek. (2 pont)
Így átrendezéssel $\underline{w} = -\frac{\alpha_1}{\mu}\underline{v}_1 + (-\frac{\alpha_2}{\mu})\underline{v}_2+\ldots+(-\frac{\alpha_k}{\mu})\underline{v}_k$ adódik. (2 pont)
Ez (a generált altér definíciója szerint) ellentmond a $\underline{w}\notin\langle\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_k\rangle$ állításnak; ez az ellentmondás pedig bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

5. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_3 + x_5 = 1\\
&x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_5 = 11\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 14\\
&2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + c \cdot x_5 = c + 10
\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -2 & 0 & 1 & 11\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 14\\ 2 & 3 & 3 & 2 & c & c+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 2 & -2 & 3 & 3 & 13\\ 0 & 3 & -3 & 2 & c-2 & c+8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 2 & c-2 & c+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-4 & c-4 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $c = 4$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ezzel meg is kaptuk a Redukált Lépcsős Alakot (hiszen mindhárom vezéregyes fölött 0-k állnak). Így a $c = 4$ esetben az egyenletrendszer megoldása: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_4 = 3 - \beta$, $x_2 = 2 + \alpha$, $x_1 = 1 - \beta - 3\alpha$. (3 pont)

Ha $c \neq 4$, akkor az utolsó sort $(c-4)$-gyel osztva, majd azt a harmadik és első sorból kivonva kapjuk a Redukált Lépcsős Alakot:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Így a $c \neq 4$ esetben a megoldás: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_5 = 1$, $x_4 = 2$, $x_2 = 2 + \alpha$, $x_1 = -3\alpha$. (3 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

6. Az a, b és c valós paraméterek minden értékére határozzuk meg az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & -c\\ 1 & -c & a & b\\ -1 & c & -b & -a\\ -1 & -b & c & -a \end{vmatrix}$$

* * * * *

Az utolsó két oszlopot a másodikhoz adva a determináns értéke nem változik:

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b-c & b & -c\\ 1 & a+b-c & a & b\\ -1 & -a-b+c & -b & -a\\ -1 & -a-b+c & c & -a \end{vmatrix} \quad \text{(5 pont)}$$

Ekkor a második oszlop az első oszlop $(a+b-c)$-szerese. Így a determináns értéke 0 (hiszen a másodikból az első oszlop $(a+b-c)$-szeresét kivonva csupa 0 oszlopot kapunk). (5 pont)