ANALÍZIS (2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI
β változat

2012. ápr. 12.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Adja meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{3^n\sqrt{n}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\sqrt[3]{n}}$.

a.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n}}}_{=a_n} (x-2)^n \qquad x_0=2$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{3\sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}} \to \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R=3$ 4

$x=-1$: $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ div. $\left(\alpha=\frac{1}{2}\not>1\right)$

$-1 \quad 2 \quad 5$

$x=5$: $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konv. (Leibniz sor)

K.T. : $(-1,5]$ 3

b.) $\boxed{8}$ $u:=x^2$: $\displaystyle\sum_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n\sqrt[3]{n}}}_{:=\beta_n} u^n \ ; \ u_0=0$

$\sqrt[n]{|\beta_n|} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{\sqrt[n]{n}}} \to \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R=2$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$u=2$: $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ div $\left(\alpha=\frac{1}{3}\not>1\right)$

$u=-2$ $\displaystyle\sum^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ konv. (Leibniz sor)

K.T. : $\underbrace{-2\le u=x^2}_{\forall\, x\text{-re teljesül}}<2 \Rightarrow |x|<\sqrt{2}$

K.T. : $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

2. feladat (12 pont)

Határozza meg az

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

integrál közelítő értékét az integrálandó függvényt az tizedrendű Taylor-polinomjával közelítve! Adjon felső becslést az elkövetett hibára!

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots \qquad u \in \mathbb{R} \qquad 2$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \underbrace{\frac{x^8}{4!}}_{T_{10}} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots \qquad 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx = x - \frac{x^5}{2!\,5} + \frac{x^9}{4!\,9} - \frac{x^{13}}{6!\,13} + \dots \Big|_0^1 =$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2!\,5} + \frac{1}{4!\,9}}_{:=a} \underbrace{- \frac{1}{6!\,13}}_{:=b} + \dots \approx a \qquad 4$$

Leibniz sor, 1, ezért $|H| \leq |b| = \dfrac{1}{6!\,13}$ 3

3. feladat (12 pont)

Adja meg a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és ezek konvergenciasugarát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{6 + 4x^2}$;

b) $g(x) = e^{4x+1}$.

a) $\boxed{7}$

$$f(x) = \frac{1}{6+4x^2} = \frac{1}{6} \, \frac{1}{1 - \frac{-4x^2}{6}} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2x^2}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} \frac{(-2)^n}{3^n} x^{2n} \qquad 5$$

$$|q| = \left|\frac{-2x^2}{3}\right| = \frac{2}{3}|x|^2 < 1 \implies |x| < \sqrt{\frac{3}{2}} = R \qquad 2$$

b) $\boxed{5}$

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad ; \quad R = \infty$$

$$g(x) = e^{4x+1} = e\, e^{4x} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=4x} =$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e \frac{4^n}{n!} x^n \qquad 4 \qquad R = \infty \qquad 1$$

4. feladat (11 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 3x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

$f^{(12)}(0) = ?$

an2 z2 β 120412/2

$$f(x)=\left(1+(-3x^2)\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n} = \quad 3$$

$$= 1-3\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^2+3^2\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}x^4-3^3\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6+\dots \quad 3$$

$$|-3x^2| = 3|x|^2<1 \Rightarrow |x|<\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}=R}} \quad 2$$

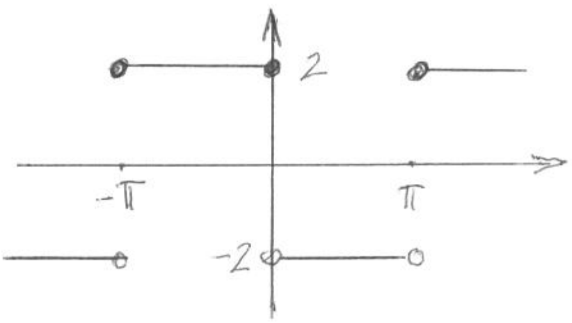
$$f^{(12)}(0)=12!\,\underbrace{a_{12}}_{x^{12}\text{ együtthatója}} = 12!\,(-3)^6\binom{-1/2}{6} \quad 3$$

5. feladat (13 pont) Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!
Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{ha } x\in[-\pi\,,\,0] \\ -2, & \text{ha } x\in(0\,,\,\pi) \end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Legyen a sor összegfüggvénye ϕ ! $\quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=?\,,\quad \phi(0)=?$

$$f^*(x):=\begin{cases} f(x)\,, & \text{ha } x\neq n\pi \\ 0\,, & \text{ha } x=n\pi \end{cases}$$



f és f^* Fourier sora azonos,
de f^* páratlan, így
$a_k=0 \quad k=0,1,2,\dots$ 2

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin kx}_{\text{páros}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}-2\sin kx\,dx=\frac{-4}{\pi}\,\frac{-\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi k}(\cos k\pi-1)=$$

$$=\begin{cases} -\frac{8}{\pi}\frac{1}{k}\,, & \text{ha } k \text{ ptlan} \\ 0\,, & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \qquad 5$$

$$\phi(x)=-\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\dots\right) \quad 3$$

$$\phi\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-2\,; \quad \phi(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{2-2}{0}=0$$
1 $\qquad\qquad$ 2

6. feladat (17 pont) Legyen

$$f(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{x^2-y^2} \qquad \text{és} \qquad P_0 = (0,\pi)\,!$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,; \quad f'_y(x,y) = ?$

b) Hol létezik gradiens? (Indoklás!) $\quad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

c) Adja meg $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel (-8,6)\,!$

d) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

a) Ha $y \neq \pm x$:

$\boxed{6}$

$$f_x' = \frac{(\cos(x-y))(x^2-y^2) - \sin(x-y)\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} \qquad 3$$

$$f_y' = \frac{(\cos(x-y))(-1)(x^2-y^2) - (\sin(x-y))(-2y)}{(x^2-y^2)^2} \qquad 3$$

b.) Ha $y \neq \pm x$, f_x' és f_y' $\exists$ és folytonos $\Rightarrow \exists \operatorname{grad} f$ 2

$\boxed{4}$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = \frac{1}{\pi^2}\underline{i} - \frac{1}{\pi^2}\underline{j} \qquad 2$$

c.) $\underline{v} = -8\underline{i} + 6\underline{j}\,;\ |\underline{v}| = \sqrt{64+36} = 10 \Rightarrow \underline{e} = -\frac{8}{10}\underline{i} + \frac{6}{10}\underline{j}$ 1

$\boxed{5}$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \underbrace{\operatorname{grad} f(P_0)\cdot \underline{e}}_{2} = \left(\frac{1}{\pi^2}\underline{i} - \frac{1}{\pi^2}\underline{j}\right)\left(-\frac{8}{10}\underline{i} + \frac{6}{10}\underline{j}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{8}{\pi^2\cdot 10} - \frac{6}{\pi^2\cdot 10}}_{2} \quad \left(= \frac{-7}{\pi^2 5}\right)$$

d.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^4}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}$

$\boxed{2}$

an2 z2B120412/4.

7. feladat (20 pont) Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\,!\end{cases}$$

a) Létezik-e határértéke f-nek az origóban?

b) $f'_x(x,y)=?$, ha $(x,y)\neq(0,0)$.

c) $f'_x(0,0)=?$, $\quad f'_y(0,0)=?$

d) Totálisan differenciálható-e f az origóban?

a.) $\boxed{5}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1\\ &\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-2y^2}{y^2}=-2\end{aligned}\right\}\neq\ \Rightarrow\ \nexists$$ a határérték az origóban.

b.) $\boxed{3}$ Ha $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x=\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

c.) $\boxed{10}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\ (2)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2-0}{h^2+0}-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\underbrace{\frac{0}{h}}_{\equiv0}=0\quad(3)$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\ (2)=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0-2k^2}{0+k^2}-1}{k}=$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{-3}{k}=\nexists\quad(3)\qquad(\mp\infty)$$

d.) $\boxed{2}$ f nem totálisan deriválható az origóban, mert f nem folytonos az origóban ($\nexists$ a határérték az origóban.)

Vagy: $f'_y(0,0)\ \nexists \Rightarrow f$ nem totálisan deriválható az origóban

an2z2β120412 15.

Pótfeladatok (csak 40 pontig javítjuk ki):

8. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-7}$, $x_0 = 3$ b) $g(x) = \operatorname{sh} 5x^2$, $x_0 = 0$

a.) $f(x) = \dfrac{1}{x-7} = \dfrac{1}{(x-3)-4} = -\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{1-\frac{x-3}{4}} = -\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{1}{4^{n+1}}(x-3)^n$ 5

K. T. : $\left|\frac{x-3}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x-3| < 4$, tehát $x \in (-1, 7)$ 2

b.) $\operatorname{sh} u = u + \dfrac{u^3}{3!} + \dfrac{u^5}{5!} + \dots$ $u \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sh} 5x^2 = 5x^2 + \dfrac{5^3 x^6}{3!} + \dfrac{5^5 x^{10}}{5!} + \dots$ 4

K. T. : $(-\infty, \infty)$ 1

9. feladat (8 pont)

Írja fel az

$$f(x,y) = e^y + x^2y^3 - y^4$$

függvény grafikonját a $(1,0)$ pontban érintő sík egyenletét!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2xy^3 \\ f'_y &= e^y + 3x^2y^2 - 4y^3 \end{aligned}\right\} 4$$

Az érintősík egyenlete:

$f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)(y-0) - (z - f(1,0)) = 0$

2

$f'_x(1,0) = 0$; $f'_y(1,0) = 1$; $f(1,0) = 1$

Behelyettesítve:

$y - (z-1) = 0$ 2

an222β120412/6.