

**1. feladat (14 pont = 7p + 7p)**

Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot (x+4)^n.$$

**2. feladat (23 pont = 7p + 8p + 8p)**

Határozza meg az alább megadott függvények  $x_0 = 0$  pont körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

$$a) f(x) = \frac{1}{2+6x}, \quad b) g(x) = \frac{1}{(2+6x)^2}, \quad c) h(x) = \ln(2+6x).$$

**3. feladat (11 pont)**

Írja fel a következő függvénysor összegfüggvényét, és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}.$$

**4. feladat (14 pont = 4p + 10p)**

a) Írja fel az  $f(x) = \cos(x^2)$  függvény  $x_0 = 0$  középpontú Taylor-sorát, és adja meg annak konvergenciatartományát!

b) Számítsa ki az

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx$$

integrál közelítő értékét, az integranduszt a nyolcadfokú Taylor-polinomjával közelítve! Adjon felső becslést az elkövetett hibára!

**5. feladat (18 pont = 4p + 5p + 9p)**

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

a) Folytonos-e  $f$  az origóban? (Válaszát indokolja!)

b) Határozza meg  $f$  parciális deriváltjait az origón kívül!

c) A definíció alapján határozza meg  $f$  parciális deriváltjait az origóban! (Ha valamelyik nem létezik, indokolja állítását!)

**6. feladat (20 pont =9p +6p +5p)**

$$f(x, y) = \ln(3x^4y^2 + 1),$$

$$P_0(-1, 1)$$

a)  $\text{grad } f(P_0) = ?$  Írja fel az  $f$  grafikonját a  $P_0$  pontban érintő sík egyenletét!

b) Legyen  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ , és legyen  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos, azonos állású egységvektor. Határozza meg  $f$ -nek a  $P_0$  pontban az  $\mathbf{e}$  irányú iránymenti deriváltját!

c) Milyen irányban kapjuk és mennyi az  $f$  függvény  $P_0$  pontbeli maximális iránymenti deriváltja?

---

*Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):*

**7. feladat (10 pont)**

Legyen  $g$  kétszer folytonosan deriválható egyváltozós valós függvény, és legyen

$$f(x, y) = g(3xy + y^2).$$

Írja fel  $f$  összes másodrendű parciális deriváltját!

**8. feladat (10 pont)**

Írja fel az  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  függvény origó körüli harmadrendű Taylor-polinomját elemi műveletekkel!