3. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Legyenek $X, Y \sim Bin(2; \frac{1}{2})$ független, binomiális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(XY = 0)$ valószínűséget.
2. A $[0; 1] \times [0; 1]$ egységnégyzetből kiválasztunk egy pontot egyenletesen véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont és a négyzet középpontjának távolsága nagyobb, mint 0,2?
3. Egy urnában 3 piros és 7 fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúzunk ezekből 4 golyót visszatevés nélkül, jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg az X várható értékét és szórását.
4. Legyen $X \sim Exp(3)$ egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ha tudjuk, hogy $X > 2$ teljesül, akkor ezen feltétel mellett mi a valószínűsége, hogy $X < 5$ is teljesül? Mennyi az $Y = 3X - 8$ változó eloszlásfüggvényének értéke az 1 helyen?
5. Egy társasjátékban minden egyes kör úgy zajlik, hogy a sorra kerülő játékos dob egy (hat oldalú) dobókockával, előrelép a bábujával a táblán annyi mezőt, amennyit dobott, majd végrehajtja annak a mezőnek az utasításait, amelyre érkezett. Tegyük fel, hogy az egyes dobások egymástól függetlenek, továbbá a játékban nincs olyan, hogy valaki kimarad egy körben (tehát minden játékos dob minden körben), valamint a játékosok bábui csak a dobások következtében mozoghatnak a táblán (tehát a mezők utasításai vagy egyéb szabályok nem mozgatják a bábukat). Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy egy adott játékos 50 kör alatt összesen legalább 180 mezőnyit lép előre?
6. Egy cukorkagyárban 50 dkg-os kiszerelésben gumicukrot csomagolnak. A havi minőségellenőrzés során meg akarták vizsgálni, hogy a raktárból kikerülő zacskókban valóban 50 dkg gumicukor van-e, ezért lemértek 5 darab véletlenül kiválasztott zacskót. Eredményül a következőket kapták: 51, 49, 54, 52, illetve 49 dkg. Tegyük fel, hogy az adatok normális eloszlású mintából származnak, valamint a gumicukros zacskók tömegének szórása 2 dkg. Elfogadható-e 95%-os megbízhatósági szinten az a hipotézis, hogy a zacskókban levő gumicukor tömege 50 dkg?

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1 - p$, p	p	$p(1-p)$
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$Exp(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$N(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

	Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$				
Szabadsági fok	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,657**	**636,619**
2	**2,920**	**4,303**	**6,965**	**9,925**	**31,599**
3	**2,353**	**3,182**	**4,541**	**5,841**	**12,924**
4	**2,132**	**2,776**	**3,747**	**4,604**	**8,610**
5	**2,015**	**2,571**	**3,365**	**4,032**	**6,869**
6	**1,943**	**2,447**	**3,143**	**3,707**	**5,959**
7	**1,895**	**2,365**	**2,998**	**3,499**	**5,408**
8	**1,860**	**2,306**	**2,896**	**3,355**	**5,041**
9	**1,833**	**2,262**	**2,821**	**3,250**	**4,781**
10	**1,812**	**2,228**	**2,764**	**3,169**	**4,587**
11	**1,796**	**2,201**	**2,718**	**3,106**	**4,437**
12	**1,782**	**2,179**	**2,681**	**3,055**	**4,318**
13	**1,771**	**2,160**	**2,650**	**3,012**	**4,221**
14	**1,761**	**2,145**	**2,624**	**2,977**	**4,140**
15	**1,753**	**2,131**	**2,602**	**2,947**	**4,073**
16	**1,746**	**2,120**	**2,583**	**2,921**	**4,015**
17	**1,740**	**2,110**	**2,567**	**2,898**	**3,965**
18	**1,734**	**2,101**	**2,552**	**2,878**	**3,922**
19	**1,729**	**2,093**	**2,539**	**2,861**	**3,883**
20	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,850**
21	**1,721**	**2,080**	**2,518**	**2,831**	**3,819**
22	**1,717**	**2,074**	**2,508**	**2,819**	**3,792**
23	**1,714**	**2,069**	**2,500**	**2,807**	**3,768**
24	**1,711**	**2,064**	**2,492**	**2,797**	**3,745**
25	**1,708**	**2,060**	**2,485**	**2,787**	**3,725**
26	**1,706**	**2,056**	**2,479**	**2,779**	**3,707**
27	**1,703**	**2,052**	**2,473**	**2,771**	**3,690**
28	**1,701**	**2,048**	**2,467**	**2,763**	**3,674**
29	**1,699**	**2,045**	**2,462**	**2,756**	**3,659**
30	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,646**
40	**1,684**	**2,021**	**2,423**	**2,704**	**3,551**
50	**1,676**	**2,009**	**2,403**	**2,678**	**3,496**
60	**1,671**	**2,000**	**2,390**	**2,660**	**3,460**
80	**1,664**	**1,990**	**2,374**	**2,639**	**3,416**
100	**1,660**	**1,984**	**2,364**	**2,626**	**3,390**
500	**1,648**	**1,965**	**2,334**	**2,586**	**3,310**

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998