Villamosmérnök A2X (2013 ősz) — 2. vizsga ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg a

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= -3 \\ x + y + 2z &= 3 \\ -2x - y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa Gauss-elimináció után $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

amiből adódik egy partikuláris megoldás: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és az egyenletrendszer mátrixának magtere:

$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Tehát az összes megoldás: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, azaz $x = 2+c, y = 1+c, z = -c$.

2. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

Megoldás. A sajátértékek $\underline{\underline{A}}$ karakterisztikus egyenletének $((1-\lambda)(\lambda^2-1))$ gyökei: 1 és -1. Az 1-hez tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix magtere: $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; a -1-hez tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix magtere: $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vagy: $\underline{\underline{A}}$ az $y = x$ síkra való tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában, ezért az $y = x$ sík sajátaltér 1 sajátértékkel, a $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egyenes pedig sajátaltér -1 sajátértékkel.

3. Határozza meg $\int_0^1 \sin x^4 \, dx$ értékét 1/100 pontossággal!

Megoldás. $\sin x$ 0 körüli Taylor-sora mindenütt előállítja a függvényt, tehát

$$\sin x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$$

egyenletesen konvergens függvénysor, ami ezért tagonként integrálható, következésképp

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^4 \, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!} \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+5}}{(2n+1)!(8n+5)} \Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(8n+5)}. \end{aligned}$$

Ez Leibniz-sor, tehát a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke. $n = 2$-re $|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(8n+5)}| = \frac{1}{5!21} < \frac{1}{100}$, tehát $\sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(8n+5)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3!13} = \frac{1}{5} - \frac{1}{78}$ jó (1/100-nál pontosabb) közelítés.

4. Deriválható-e az origóban az $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } xy \neq 0 \\ 0 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$ függvény?

Megoldás. Az origóbeli parciális deriváltak 0-k, mert a tengelyek mentén $f \equiv 0$; tehát $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\operatorname{grad} f|_{(0,0)}((x,y)-(0,0))}{d((x,y),(0,0))} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ami nem 0, mert $y = x$ mentén $\frac{1}{2}$ (valójában nem is létezik, mert a tengelyek mentén meg 0). Tehát f nem deriválható az origóban.

5. Az integrálások sorrendjének megcserélésével számítsa ki a $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3} - x)\, dxdy$ integrál értékét!

Megoldás. Az $\{(x,y) : y \in [1,4], x \in [\sqrt{y}, 2]$ y szerinti normáltartomány x szerinti normáltartomány is: $\{(x,y) : x \in [1,2], y \in [1, x^2]$. Így

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3} - x)\, dxdy = \int_1^2 \int_1^{x^2} \sin(\frac{x^3}{3} - x)\, dydx$$
$$= \int_1^2 (x^2-1)\sin(\frac{x^3}{3} - x)\, dx = -\cos(\frac{x^3}{3} - x)\Big|_1^2 = -\cos\frac{2}{3} + \cos -\frac{2}{3} = 0.$$

6. (a) Mikor mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény deriválható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban?
(b) Mikor mondjuk, hogy $a \in \mathbb{R}^n$ a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz torlódási pontja?
Igazak-e az alábbi állítások: (c) Ha $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálhatóak, akkor $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ is invertálható.
(d) Ha az $a_n \in \mathbb{R}^k$-beli ($k > 1$) sorozat monoton nő és korlátos, akkor konvergens.
(e) Divergens sor minden bezárójelezett változata is divergens.

Megoldás. (a) Ha van olyan $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, amelyre $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{d(x,a)} = 0$ (ahol d az $\mathbb{R}^n$-beli szokásos (Euklideszi norma által indukált) távolság.
(b) Ha a minden lukas környezete tartalmaz H-beli pontot.
(c) Nem, pl: $\underline{\underline{A}}$ az identitásmátrix, $\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{A}}$.
(d) Nem, nincs értelme, mert $\mathbb{R}^k$-n nincs rendezés.
(e) Nem, pl. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1 + \ldots$ divergens, de $(1-1) + (1-1) + \ldots (1-1) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$.