ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2009. június 4.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (18 pont)

a) Írja fel egy valós konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját!
Írja fel erre az esetre a karakterisztikus egyenletet! Konjugált komplex gyökök esetén hogyan kapjuk meg az általános valós megoldást? Indokoljon!

b) Adja meg az

$$y'' - 7y' + 10y = 10x + 9e^{-x}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

a.) $\boxed{8}$ $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0,1,2$ (2)

A karakterisztikus egyenlet:

$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (1)

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - j\beta:$$

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x)$$

$$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j(-\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x)$$

Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$$\left.\begin{aligned} Y_1^* &:= \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \;(= \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x}) \\ Y_2^* &:= \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x \;(= \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x}) \end{aligned}\right\}$$ Ezek is lineárisan függetlenek. Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t.

Tehát $y_H = C_1 Y_1^* + C_2 Y_2^*$

(Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.)

b.) $\boxed{10}$ $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ (4)

$$\begin{array}{r|l} 10\cdot & y_{ip} = Ax + B + Ce^{-x} \quad (1) \\ -7\cdot & y_{ip}' = A - Ce^{-x} \\ 1\cdot & y_{ip}'' = Ce^{-x} \end{array}$$

$x(10A) + (10B - 7A) + e^{-x}(10C + 7C + C) = 10x + 9e^{-x}$

$$\left.\begin{aligned} 10A = 10 &\Rightarrow A = 1 \\ 10B - 7A = 0 &\Rightarrow B = \tfrac{7}{10} \\ 18C = 9 &\Rightarrow C = \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad y_{ip} = x + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}e^{-x} \quad (3)$$

$y_{ed} = y_H + y_{ip} = \ldots$ (2)

an2v 090604/1.

2. feladat (12 pont)

Folytonos-e, differenciálható-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \frac{2x^2+3xy+y^2}{2x^2+y^2}\,, \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{és} \qquad f(0,0)=1$$

$f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

Az $y=x$ egyenes mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2+3x^2+x^2}{2x^2+x^2}}_{=\frac{5x^2}{3x^2}} = \frac{5}{3} \neq 1 = f(0,0)$$

Tehát f nem folytonos a $(0,0)$-ban. 4

$\Rightarrow$ f nem deriválható a $(0,0)$-ban, hiszen nem teljesül az egyik szükséges feltétel. 2

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \underbrace{\frac{\frac{k^2}{k^2}-1}{k}}_{=\frac{0}{k}=0} = 0$$

2 4

3. feladat (10 pont)

Ismertesse és bizonyítsa be a függvénysor egyenletes konvergenciájára vonatkozó Weierstrass kritériumot!

Weierstrass kritérium

(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

T 2 Ha $\exists\,(b_k)$, hogy $|f_k(x)| \leq b_k$; $x \in H$; $k=0,1,\ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergens $\forall x \in H$,) Ez most nem kell.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n.

B 8

(a) A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolút konvergencája a majoráns kritérium miatt következik a H halmaz minden pontjában.)

b) Megmutatjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eleget tesz a Cauchy kritériumnak a H halmazon.

an2v 090504/2.

Ugyanis $\forall\, x \in H$:

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \leq$$
$$\leq b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon, \qquad \text{ha } m > n > N(\varepsilon),$$

mert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy kritériumot, ugyanis $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. $N(\varepsilon)$ független x-től, mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ numerikus sorhoz választottuk. Mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ teljesíti a Cauchy kritériumot H-n $\implies$ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H-n. ■

4. feladat (16 pont)

a) A tanult módon bizonyítsa be, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Mi a sor konvergencia tartománya!

b) Írja fel az

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{3x^2}{5}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

a) $\boxed{f(x) := \ln(1+x), \qquad x_0 = 0}$

$\boxed{10}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1, \quad R = 1$$ 5

Elvégezve az integrálást $[0, x]$- en:

$$\ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$ 3

Ez a sor $x = 1$-ben is konvergens, mert Leibniz sor. T_{1a} tétel miatt értéke: 2

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Tehát a kapott eredmény:

Ⓣ $$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1]}, \quad R = 1$$

b.) $g(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2 x^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 x^6 - \dots$ 4

vagy: $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{3}{5}x^2\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n x^{2n}$

$\left|\frac{3x^2}{5}\right| = \frac{3|x|^2}{5} < 1 \implies |x| < \sqrt{\frac{5}{3}} \implies R = \sqrt{\frac{5}{3}}$ 2

5. feladat (10 pont)*

$$f(x,y) = (2x-y)^2 + 4x^2 - 8y$$

Hol lehet f -nek lokális szélsőértéke?
Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

$f'_x = 2(2x-y)\cdot 2 + 8x \quad ; \quad f'_y = 2(2x-y)\cdot(-1) - 8$ (3)

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 16x - 4y &= 0 \\ -4x + 2y - 8 &= 0 \end{aligned} \quad \ldots \Rightarrow x = 2,\ y = 8$$

$P_0(2,8)$-ban <u>lehet</u> lok. szélsőérték. (3)

$D(2,8) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0 \Rightarrow$ van lok. szé. (3)

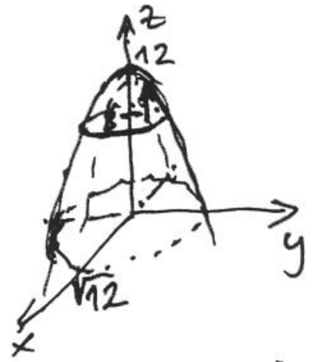
$f''_{xx}(P_0) > 0 \Rightarrow$ lok. minimum van itt (1)

6. feladat (10 pont)*

Számítsa ki az

$$z = 12 - (x^2 + y^2) \quad \text{és a} \quad z = 8$$

felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!



A $z \le 12 - (x^2+y^2)$ forgási paraboloid belsejének $z \ge 8$ részéről van szó. (Lehetne hengerkoordinátás tr. is, vagy:)

$$\text{térf} = \iiint_V 1\, dV = \iint_{x^2+y^2 \le 4} \Bigg(\underbrace{\int_{z=8}^{12-(x^2+y^2)} dz}_{z\big|_8^{12-(x^2+y^2)} = 4-(x^2+y^2)} \Bigg) dT =$$

$\left.\begin{aligned} z &= 12-(x^2+y^2) \\ z &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} \left(4 - (x^2+y^2)\right) dT$$ (3)

Polártranszformációval dolgozunk:

$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 2$

$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$|J| = r$

$$\text{térf.} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2)\, r \, d\varphi\, dr = (2\pi - 0) \int_0^2 (4r - r^3)\, dr =$$

(4) (1)

$$= 2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8\pi$$ (2)

an2v-090604/4.

7. feladat (8 pont)*

Határozza meg a $\beta > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$u = e^{2x}\cos(\beta y) + x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} f$$

legyen, ahol f reguláris a komplex síkon!

$f'\left(j\frac{\pi}{2}\right) = ?$

$f = u + jv$ reg. $\Rightarrow \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$ (2)

$u'_x = 2e^{2x}\cos\beta y + 3x^2 - 3y^2$ $\quad u''_{xx} = 4e^{2x}\cos\beta y + 6x$

$u'_y = -\beta e^{2x}\sin\beta y - 6xy$ $\quad u''_{yy} = -\beta^2 e^{2x}\cos\beta y - 6x$

$\Delta u = (4-\beta^2)e^{2x}\cos\beta y \equiv 0 \Rightarrow \beta = 2 > 0$ (3)

$f'(j\frac{\pi}{2}) = u'_x(0, \frac{\pi}{2}) + j\,v'_x(0, \frac{\pi}{2}) = u'_x(0, \frac{\pi}{2}) - j\,u'_y(0, \frac{\pi}{2}) =$ (2)

$= -2 - 3\frac{\pi^2}{4} - j\cdot 0$ (1)

8. feladat (16 pont)*

a) Vezesse le az $\ln z$ kiszámítására tanult képletet!

Oldja meg az $e^{3z} = je$ egyenletet!

b) $I = \oint\limits_{|z-j|=4} \frac{e^{3z+1}}{z-3j}\,dz$, $\quad \operatorname{Re} I = ?$, $\quad \operatorname{Im} I = ?$

(A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!)

a.) $w = \ln z$: $\qquad z = e^w$

$$|z|\,e^{j\operatorname{arc} z} = e^{u+jv} = e^u\,e^{jv}$$

Ahonnan kapjuk, hogy

$u = \ln|z|$ (ez a valósból ismert függvény)

$v = \operatorname{arc} z$ $\quad -\pi \le \operatorname{arc} z < \pi$

$$w = \ln z\ (= \operatorname{Ln}_0 z) = \ln|z| + j\operatorname{arc} z$$ (6)

$e^{3z} = je \Rightarrow 3z = \operatorname{Ln} je = \ln e + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$z = \frac{1}{3} + j\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ (4)

b.) $\oint\limits_L \frac{\overbrace{e^{3z+1}}^{\text{reg.}}}{z-3j}\,dz = 2\pi j\, e^{9j+1} = 2\pi j\, e\,(\cos 9 + j\sin 9)$ (4) $\quad z_0 = 3j$

$\operatorname{Re} I = -2\pi e \sin 9$; $\operatorname{Im} I = 2\pi e\cos 9$ (2)

an2v 090604/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (9 pont)

$$f(x,y) = e^{4x-xy^2}, \qquad P_0(1,2)$$

Írja fel az f függvény P_0 pontbeli gradiensét!
Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!

$f'_x = e^{4x-xy^2}(4-y^2)$; $f'_y = e^{4x-xy^2}(-2xy)$ (2+2)

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = 0\underline{i} - 4\underline{j}$ (1)

Érintősík: $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ (2)

$0\cdot(x-1) - 4(y-2) - (z-1) = 0$ (2)

10. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorfejtésének első négy nem nulla tagját és adja meg a sorok konvergencia tartományát!

$$f(x) = \cos(2x^3), \qquad g(x) = \frac{1}{2+6x^2}$$

$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots$

$f(x) = \cos 2x^3 = 1 - \frac{2^2}{2!}x^6 + \frac{2^4}{4!}x^{12} - \frac{2^6}{6!}x^{18} + \dots$ (3) $\quad x \in \mathbb{R}$ (2)

$g(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-3x^2)} = \frac{1}{2}\left(1 - 3x^2 + 3^2x^4 - 3^3x^6 + \dots\right)$ (4)

$|-3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (2)

an20-090604/6