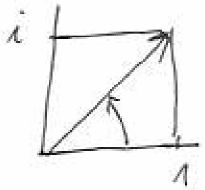
1, $\boxed{20}$

$$(1+i)^{17} = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\right)^{17} \; (4) = \left(\sqrt{2}\right)^{17}\cdot e^{i\,17\pi/4} = 2^8\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i(4+1/4)\pi} =$$



$$= 256\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \; (4) = \underline{\underline{256+256i}} \; (2) \qquad \boxed{10}$$

$$z = i^9 - \frac{1-9i}{3+4i} = i - \frac{1-9i}{3+4i} = \frac{-4+3i-1+9i}{3+4i} = \frac{-5+12i}{3+4i} \; (3)$$

$$i^9 = \underbrace{i^4}_{1}\cdot\underbrace{i^4}_{1}\cdot i \; (3)$$

$$|z| = \frac{|-5+12i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{(-5)^2+12^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{25+144}}{\sqrt{9+16}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\frac{13}{5}}} \; (4) \qquad \boxed{10}$$

2, $\boxed{20}$ Először számoljuk ki a határértéket!

$$A = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2(2n+1)^2}{n^4+5}}_{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4n^2+4n+1)}{n^4+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^4}} = 4 \qquad \boxed{8}$$

Keressünk egy $\varepsilon = \frac{0.002}{2} = 10^{-3}$ hibához tartozó küszöbindexet! (2)

$$|a_n - A| = \left|\frac{\cancel{4n^4}+4n^3+n^2-4(\cancel{n^4}+5)}{n^4+5}\right| = \frac{|4n^3+n^2-20|}{n^4+5} =$$

$$= \frac{4n^3+n^2-20}{n^4+5} \le \frac{4n^3+n^3}{n^4} = \frac{5}{n} < 10^{-3}, \text{ ha } n > \underline{\underline{5000 = N}} \qquad \boxed{10}$$

Ha $n \geq 2$.

3, $\boxed{20}$ Rendőr elvvel dolgozunk. (10)

$$a_n = \sqrt[n]{2^{3n}+\frac{3^{2n}}{n^3}} = \sqrt[n]{8^n+\frac{9^n}{n^3}} = 9\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{8}{9}\right)^n+\frac{1}{n^3}}$$

$$\frac{1}{n^3} \le \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{1}{n^3} \le 2 \qquad \Big/ \sqrt[n]{\cdot}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^3 \le \sqrt[n]{\left(\frac{8}{9}\right)^n+\frac{1}{n^3}} \le \sqrt[n]{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$$

(10p)

Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 9\cdot 1 = \underline{\underline{9}}$ Csak helyes végeredményért: (5)

4* $\boxed{20}$

$$b_{n+1} = 4 + \sqrt{b_n - 2} - \frac{4}{\sqrt{n+4}} \qquad (*) \qquad b_1 = 2.$$

i, Tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, és vegyük a $(*)$ egyenlőség mindkét oldalának a határértékét $n \to \infty$ esetén!

$$B = 4 + \sqrt{B-2} - 0$$

$$B - 4 = \sqrt{B-2} \geq 0 \Longrightarrow B^2 - 8B + 16 = B - 2 \Longrightarrow B^2 - 9B + 18 = 0$$

$(B-3)(B-6) = 0$; $\cancel{B_1 = 3}$; Hamis gyök, mert $B_1 - 4 = -1 \not\geq 0$

$B_2 = 6$ ✓

Tehát a határérték, ha létezik, csak 6 lehet! $\boxed{8}$

ii, Teljes indukcióval igazoljuk, hogy b monoton nő:

α, $b_2 = 4 + \underbrace{\sqrt{2-2}}_{0} - \frac{4}{\sqrt{6}} = 4\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{\sqrt{6}}}_{> \frac{1}{2}}\Big) > 2 = b_1$ ✓

β, T.f.h. $b_{n+1} \geq b_n \geq 2$. Mivel az $f(x) = 4 + \sqrt{x-2}$ függvény a $[2, \infty)$ intervallumon (szigorúan) monoton nő, ezért

$$f(b_{n+1}) = 4 + \sqrt{b_{n+1} - 2} \geq f(b_n) = 4 + \sqrt{b_n - 2}. \qquad (1)$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy $\frac{4}{\sqrt{(n+1)+4}} < \frac{4}{\sqrt{n+4}}$, azaz $\frac{-4}{\sqrt{(n+1)+4}} > \frac{-4}{\sqrt{n+4}}$ (2)

Összeadva (1)-et és (2)-t:

$$\underbrace{4 + \sqrt{b_{n+1} - 2} - \frac{4}{\sqrt{(n+1)+4}}}_{b_{n+2}} > \underbrace{4 + \sqrt{b_n - 2} - \frac{4}{\sqrt{n+4}}}_{b_{n+1}}$$

✓ Tehát $b_n \nearrow$. $\boxed{8}$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $b_n < 6$:

α, $b_1 = 2 < 6$. β, T.f.h. $b_n < 6$. γ, Ekkor

$$b_{n+1} = 4 + \sqrt{b_n - 2} - \frac{4}{\sqrt{n+4}} < 4 + \underbrace{\sqrt{6-2}}_{\sqrt{4} = 2} - 0 = 4 + 2 = 6$$ ✓

Tehát b_n monoton nő és felülről korlátos, így konvergens, és $\boxed{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B = 6$.

5, $(b_1, b_2, b_3, \dots) = (3, 4, 5, 3, 4, 5, \dots)$

Mivel b véges sok konstans sorozatból van összefésülve, 2 torlódási pontjai:

$S_b = \{3, 4, 5\}$ 2, és így $\underline{\lim}\, b_n = 3$ 1; $\overline{\lim}\, b_n = 5$. 2 $\boxed{8}$

A c sorozatot is három sorozat összefésülésével kapjuk:

$$c_{3k+1} = \frac{\left(3-3+\frac{1}{3k+1}\right)^{3k+1}}{2^{3k+1}} = \frac{1}{2^{3k+1}\cdot(3k+1)^{3k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$ 3

$n = 3k+2$ esetén $b_n = 4$, és így

$$c_n = \frac{\left(4-3+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2^n}}}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \longrightarrow 0$$ 3

$n = 3k$ esetén $b_n = 5$, és így

$$c_n = \frac{\left(5-3+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n} = \frac{\left(2\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^n}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}\cdot\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n}{\cancel{2^n}} \longrightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}$$ 3

Tehát c torlódási pontjai: $S_c = \{0, \sqrt{e}\}$, és így

$\underline{\lim}\, c_n = 0$, $\overline{\lim}\, c_n = \sqrt{e}$ 3