

**1. Feladat (15 pont)**

Legyen  $a_1 = 6$ ,  $a_{n+1} = \frac{3a_n+2}{5}$ .

- a) Mutassa meg, hogy  $\langle a_n \rangle$  alulról korlátos!  
 b) Bizonyítsa be, hogy  $\langle a_n \rangle$  konvergens!  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

**2. Feladat (20 pont)**

Az  $y = f(x)$  átmegy az  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -1$  ponton, és az  $x_0 = 1$  környezetében kielégíti az  $x^3 - 5y + y^3 - 3x = 2$  implicit egyenletet. Tudjuk, hogy  $f$  akárhányszor differenciálható. Van-e  $f$ -nek az  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke? Van-e  $f$ -nek az  $x_0$ -ban inflexiója?

**3. Feladat (20 pont)**

- a)  $\int \frac{2x-7}{(x+1)(x-2)} dx = ?$   
 b)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = ?$

**4. Feladat (15 pont)**

Vizsgálja meg, hogy milyen  $\alpha > 0$  esetén konvergens és mikor divergens az  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ ! Az indokláshoz az improprius integrál definícióját használja!

**5. Feladat (15 pont)**

Határozza meg az  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 2}$  egyenes aszimptótáját a  $+\infty$ -ben, amennyiben létezik!

**6. Feladat (15 pont)**

- a) Mikor mondjuk, hogy a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens?  
 b) Konvergens-e az  $1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots$  sor, illetve az  $(1 + 1 - 2) + (1 + 1 - 2) + (1 + 1 - 2) + \dots$  sor?  
 c) Igazak-e az alábbi állítások:  
 A: Konvergens sorból zárójelek elhagyása után is konvergens sort kapunk  
 B: Divergens sorból zárójelek elhagyása után is divergens sort kapunk

*Pótfeladat:*

**7. Feladat (10 pont)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \operatorname{ch} (2x)} = ?$$

**1. Feladat (15 pont)**

$$a_{n+1} = \frac{4+5a_n}{6}, \quad a_1 = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

**2. Feladat (20 pont)**

Az  $y = f(x)$  átmege az  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -1$  ponton, és az  $x_0 = 1$  környezetében kielégíti a  $3y + y^5 - x^4 + 4x = -1$  implicit egyenletet! Tudjuk, hogy  $f$  akárhányszor differenciálható. Van-e  $f$ -nek  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke, illetve inflexiója?

**3. Feladat (20 pont)**

a)  $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} dx = ?$

b)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = ?$

**4. Feladat (15 pont)**

Határozza meg az  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x + 7}$  függvény egyenes aszimptótáját a  $+\infty$ -ben!

**5. Feladat (15 pont)**

Milyen  $\alpha$ -ra konvergens ill. divergens az

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

integrál? (Bizonyítással!)

**6. Feladat (15 pont)**

a) Definiálja a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergenciáját!

b) Melyik állítás igaz?

1. Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

2. Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens.

c) Mondja ki a hányadoskritériumot!

*Pótfeladat:*

**7. Feladat (10 pont)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 3x}{\ln \operatorname{ch} x} = ?$$