Matematika A3
1. vizsga, 2022. december 22.
Munkaidő: 45 perc

1. feladat (15 pont)
Számítsa ki a $\underline{v}(\underline{r}) = \left(-\frac{yz}{x^2} + e^x, \frac{z}{x} - 2yz^2, \frac{y}{x} - 2y^2z\right)$ vektormező integrálját az AB origó középpontú 2 görbementi sugarú körív és BC egyenes szakasz összefűzésén, ahol $A(1, \sqrt{3}, 0)$, $B(2, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 2)$.

Mo. A vektormező potenciálos, skalárpotenciálja az $F(x, y, z) = \frac{yz}{x} + e^x - y^2z^2$, tehát a keresett integrál értéke $F(C) - F(A) = 2\sqrt{3} - 12$.

---

2. feladat (18 pont)
Számítsa ki a $2z = x^2$ egyenletű parabolikus hengerfelület azon darabjának felszínét, amelyet az $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ síkok határolnak.

Mo. A felület paraméterezése $\left(u, v, \frac{u^2}{2}\right)$, $u \in [0, 2\sqrt{2}]$, $v \in \left[\frac{u}{2}, 2u\right]$, a normálvektor

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-u, 0, 1),$$

tehát a felszín

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \int_{u/2}^{2u} \sqrt{u^2+1}\,dvdu = \frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} u\sqrt{u^2+1}\,dvdu = \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{(u^2+1)^3}}{\frac{3}{2}\cdot 2}\right]_0^{2\sqrt{2}} = 13$$

---

3. feladat (17 pont)
Legyen $\underline{v}(x, y, z) = (x + e^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömb $z > 0$ része. Határozzuk meg az $\int \underline{v} d\underline{f}$ integrál értékét, $\underline{nk} > 0$ irányítás mellett.

Mo. Lezárjuk a felületet az $x^2 + y^2 = 9$ körlappal. $\operatorname{div} \underline{v} = 2 + 2y$, mivel y szerint origóra szimmetrikus a tartomány, így a divergencia integrálja a tartományon a térfogat kétszerese, vagyis $2 \cdot 3^3 \cdot 2\pi/3 = 36\pi$. A körlap normálvektora $\underline{k}$ irányú, $\underline{v}(\underline{r})$ utolsó komponense pedig 0, így a körlapon a felületi integrál 0, tehát a keresett integrál értéke 36π.

IMSC feladat Igazolja, hogy az $\underline{r} = (a(\cos u - v \sin u), a(\sin u - v \cos u), b(u + v))$ felületi normálisai a z tengellyel állandó szöget zárnak be !