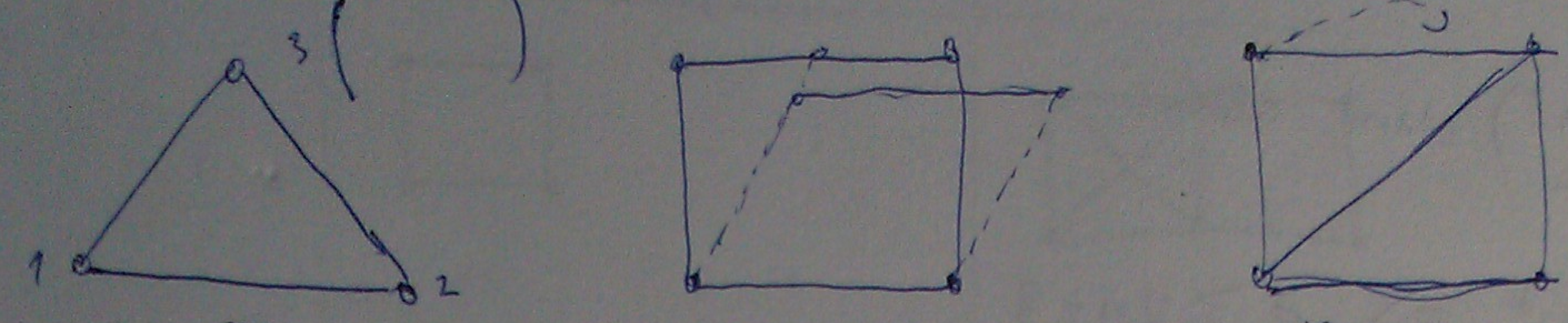
4 esettanulmány:

Statikai alkalmazások

Rúdszerkezetek:

$$
\begin{array}{cc}
 & 6 \\
3 & \left(\qquad \right)
\end{array}
$$



merev — nem merev — síkban merev (2D), 3D-ben nem merev

$$
\begin{array}{cc}
 & 6 \\
3 & \begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_1 & 0 & y_1-y_2 & y_2-y_1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

merevség eldöntése több rúddal

$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}=c_{ij}$$ pontok távolsága a síkban ha $\{i,j\}\in E$

lehet deriválni

ha mozognak akkor az idő függvényei lehetnek az $x_i, x_j, \ldots$ stb

$$\left((x_i-x_j)^2\right)' = 2\cdot(x_i-x_j)(\dot{x}_i-\dot{x}_j)+\cancel{2}(y_i-y_j)(\dot{y}_i-\dot{y}_j)=0$$

$$(x_i-x_j)\dot{x}_i+(x_j-x_i)\dot{x}_j+(y_i-y_j)\dot{y}_i+(y_j-y_i)\dot{y}_j=0$$

$$
e\left\{\left(\overbrace{\qquad W \qquad}^{2n}\right)\right.
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

← mivel itt 0 van ⇒ homogén lin. egyenletr.
⇓
mindig mo.

lineáris egyenletrendszer

Ált: $\underline{A}\underline{x}=\underline{0}$ -nek $\underline{x}=\underline{0}$ triv megoldás

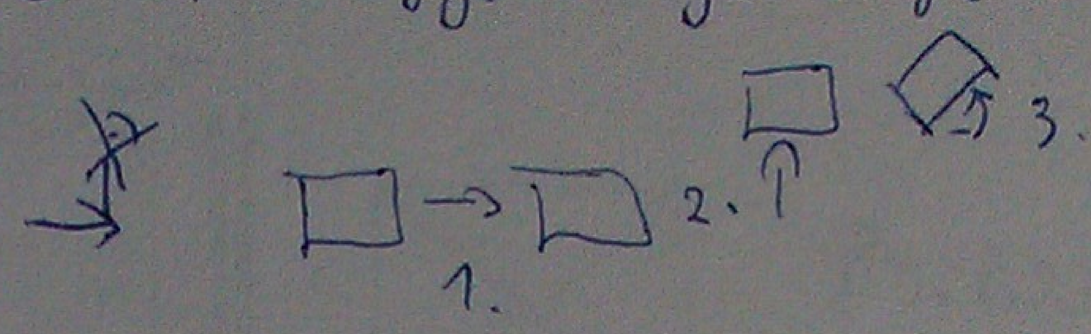
Statikus: az is triviális mo. ha arrébb viszem

" merev test szerű mozgások

(egybevágósági transzformáció)

Merev $\Leftrightarrow r(W) = 2n-3$

mert 3 dim. alteret alkotnak a sík egybevágósági transzformációi



$\leftarrow$ ezért 3 dim.

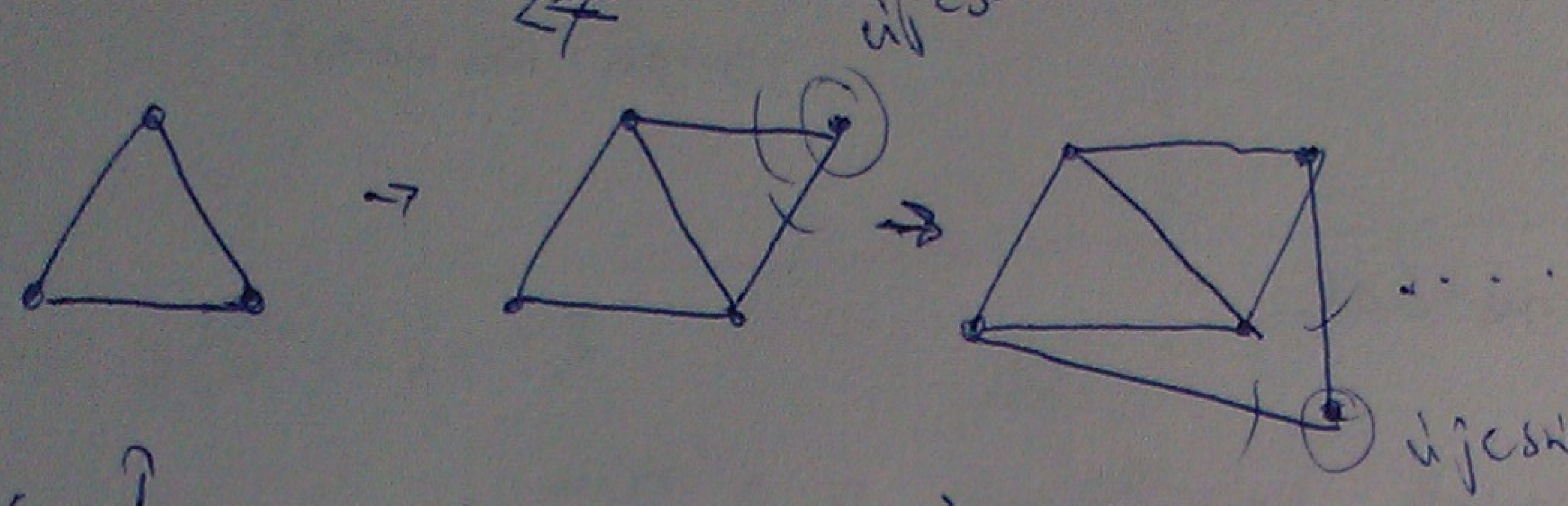
a tér egybevágósági transzformációi 6 dim. alteret alkotnak

3+2+1.

d. dim. térben $\binom{d+1}{2}$ dim. altér

Tétel: Merev a test $\Rightarrow e \geq 2n-3$

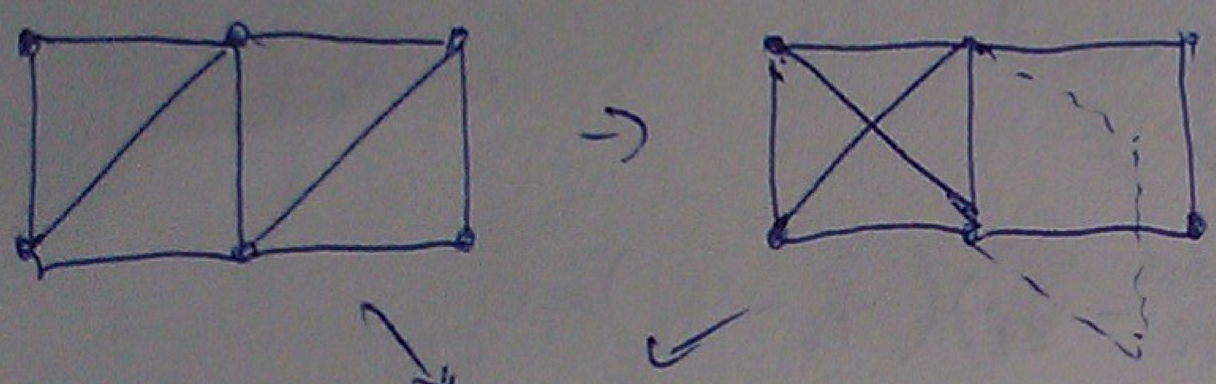
$\not\Leftarrow$



$e = 2n-3$

$\leftarrow$ mind merevek

(egyszerű rácsos tartók)



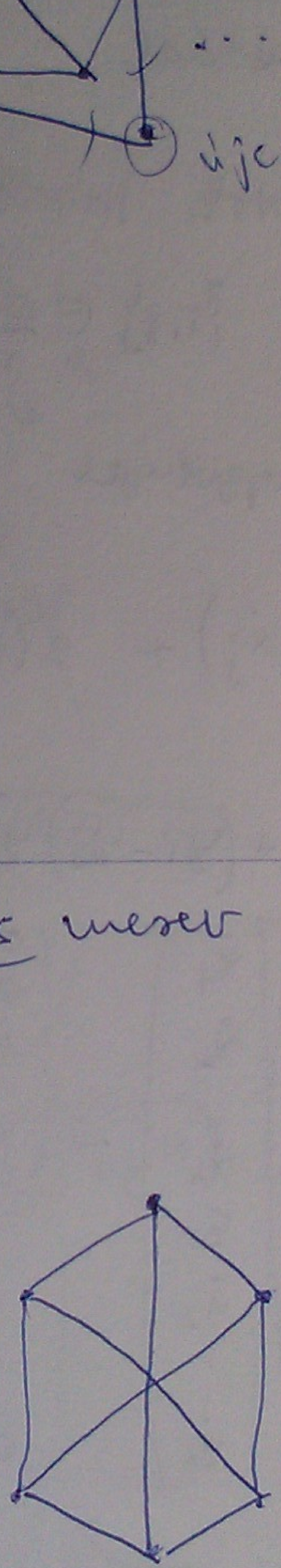
$n=6$

$e=9$

Ha merev és $e=2n-3 \Rightarrow$ minimális merev rúdszerkezet (szabadság-hiú)

Egyszerű rácsos tartó $\Rightarrow$ min. merev

$\not\Leftarrow$ pl. $K_{3,3}$

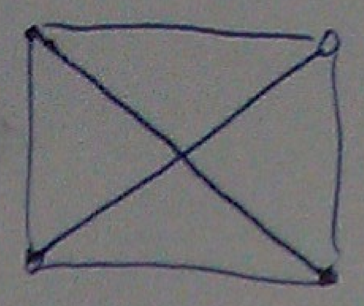
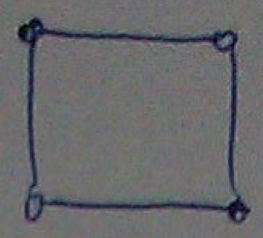
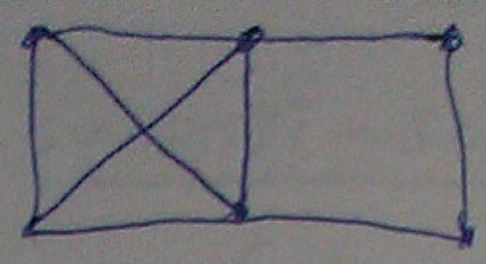


páros gráf $\Rightarrow$ nem egyszerű rácsos tartó

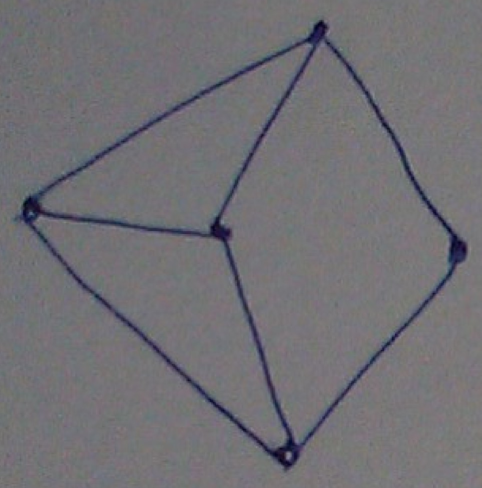
Maxwell: 2-dim. min. merev rúdszerk. $\Rightarrow e = 2n-3$ és

$$\boxed{\forall G' \subset G \text{ részgráfra } e' \leq 2n'-3}$$

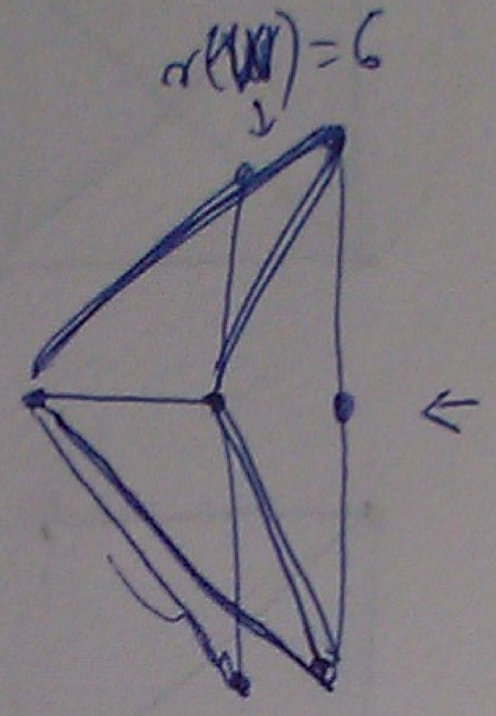
rúdszerkezet lehet

~~statikailag~~	statikailag határozott	nem hat.
dinamikailag határozott	Egyszerű rácsos tartó és $K_{3,3}$	
nem hat.		

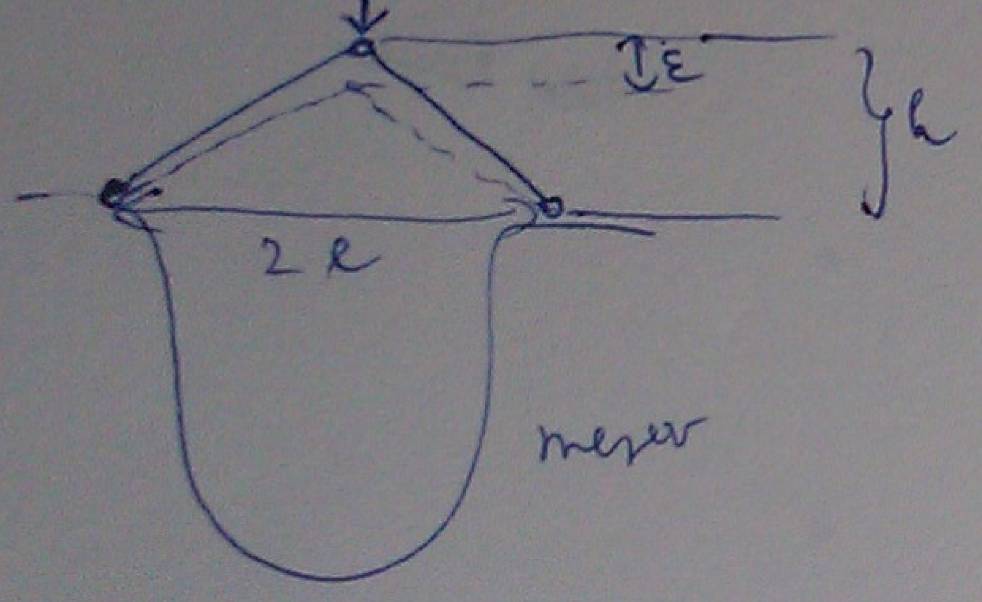
merev $\overset{def}{\iff}$ $r(W) = 2n-3$



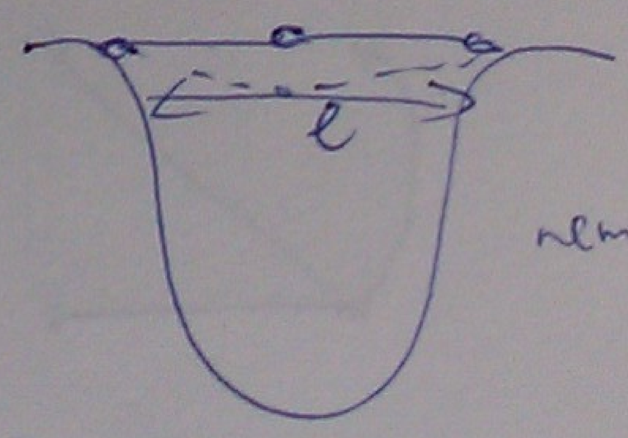
merev



nem merev



merev



nem merev

de a gráfjuk izomorf

$\sqrt{\ell^2+h^2} - \sqrt{\ell^2+(h-\varepsilon)^2} =$

$= \frac{2h\cdot\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt{} + \sqrt{}} \approx c\cdot\varepsilon$

$\sqrt{\ell^2+\varepsilon^2} - \ell = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{}+\ell} \approx c\cdot\varepsilon^2$

Generikusan merev gráf ha $\exists$ olyan merev rúdszerkezet melynek ő a gráfja (pl: $K_{3,3}$)

Egy gráf generikusan merev min. a 2-dim térben

Maxwell $\Downarrow$ $\Uparrow$ Laman

$e = 2n-3$ és $\forall G' \subseteq G$-re $e' \le 2n'-3$ $\iff$ Lovász–Yemini

Input: G gráf $\boxed{M2}$

Kérdés: min. gen. merev-e a 2 dim. térben?

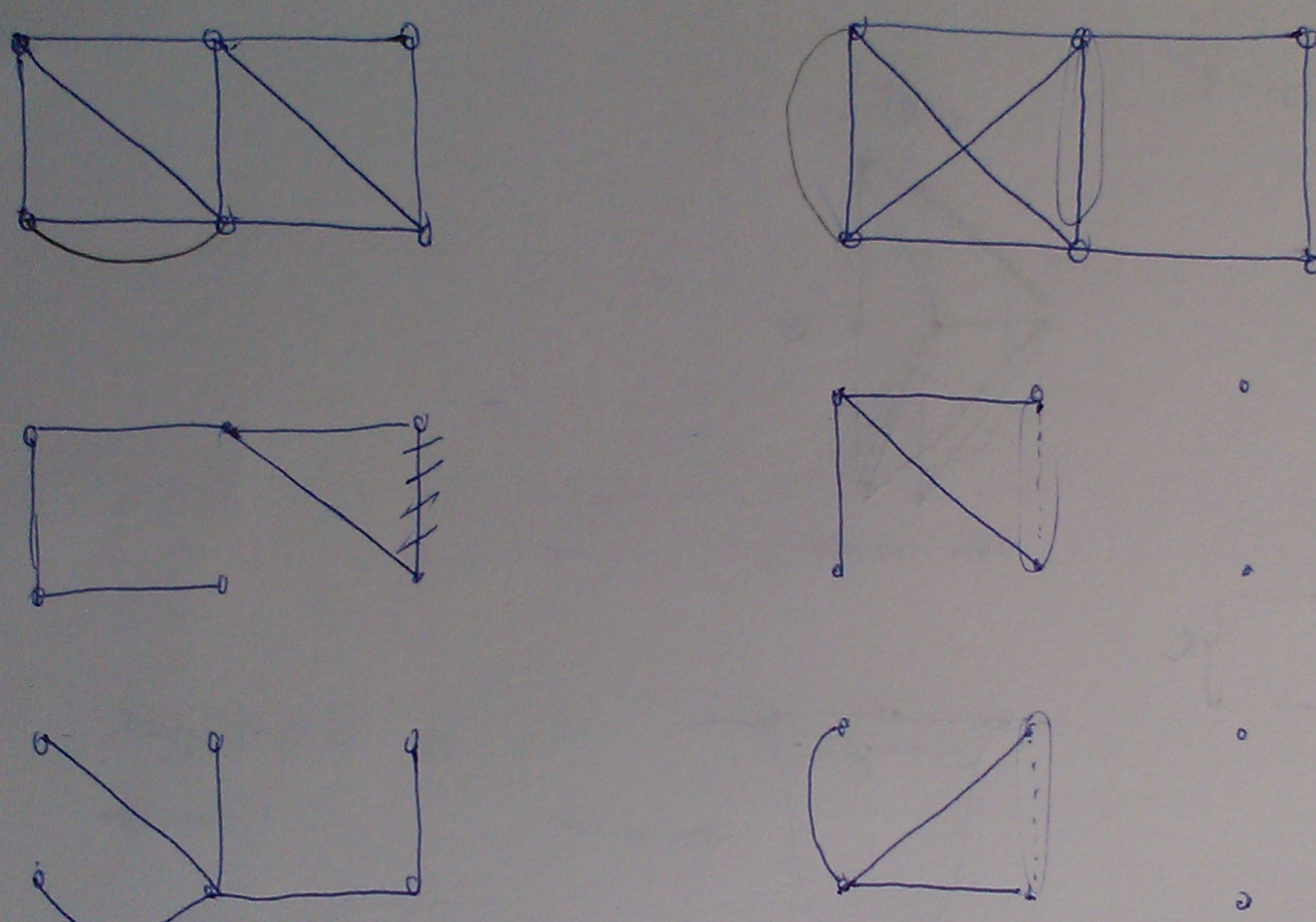
$\forall d$-re $Md \in NP$ ~~[illegible]~~

Laman: $M2 \in coNP$

$M2 \in P$ → Lovász–Yemini: ~1973

$\forall e_0 \in E(G)$-re $G+e_0$ előáll 2db éldiszjunkt fa uniójaként $\in P$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}(G+e_0) \vee \mathcal{M}(G+e_0) = (S, 2^S)$

szabad matroid



kör lesz

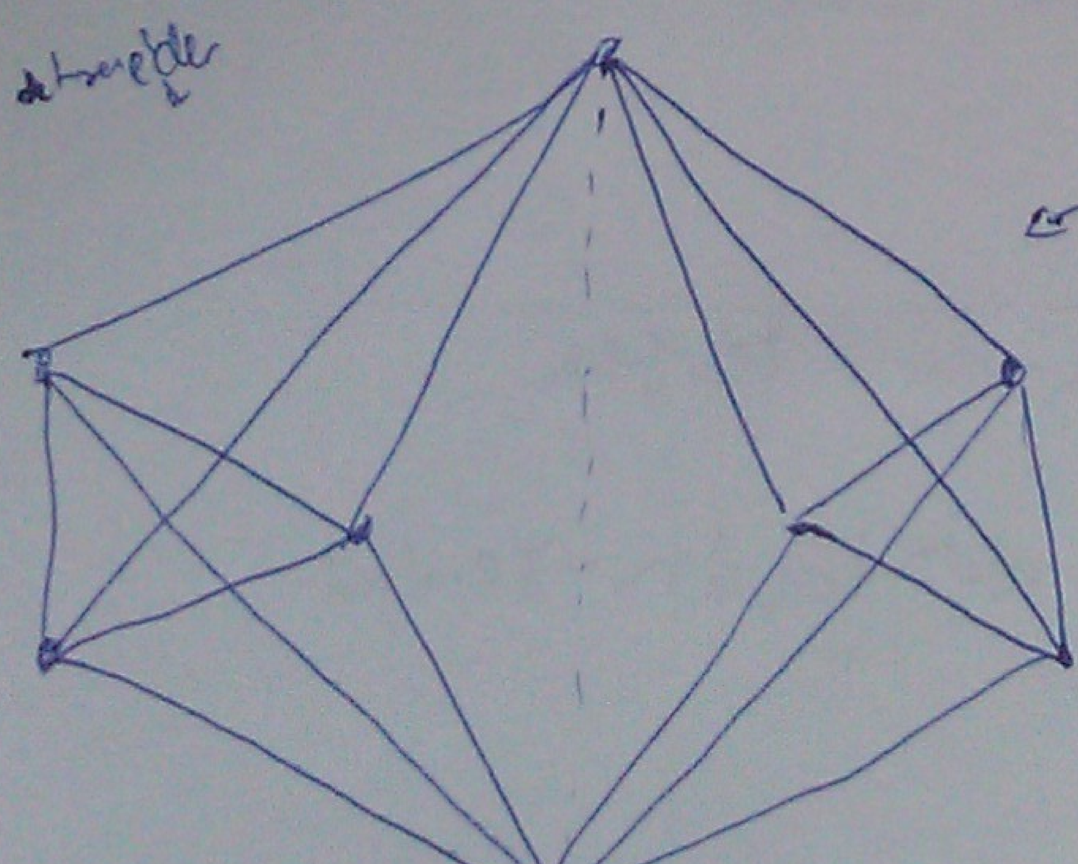
2 éldiszjunkt fa

3 dim. térben

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$

$e = 3n-6$ és .. $e' \leq 3n'-6$

[illegible]



← nem merev

$M3 \overset{?}{\in} P$ nyitott probléma

$r(W_e \times d_n) = dn - \binom{d+1}{2}$ mindenképpen

sor, oszlop

gráf generikusan merev,

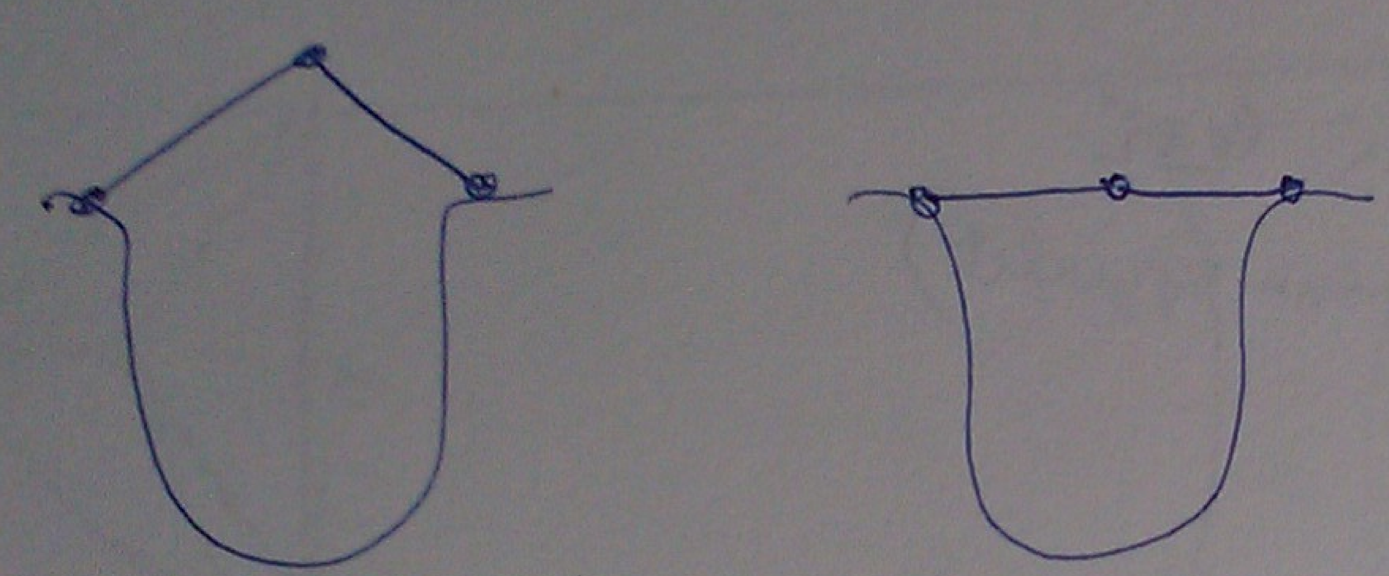
M_d: Input: G gráf

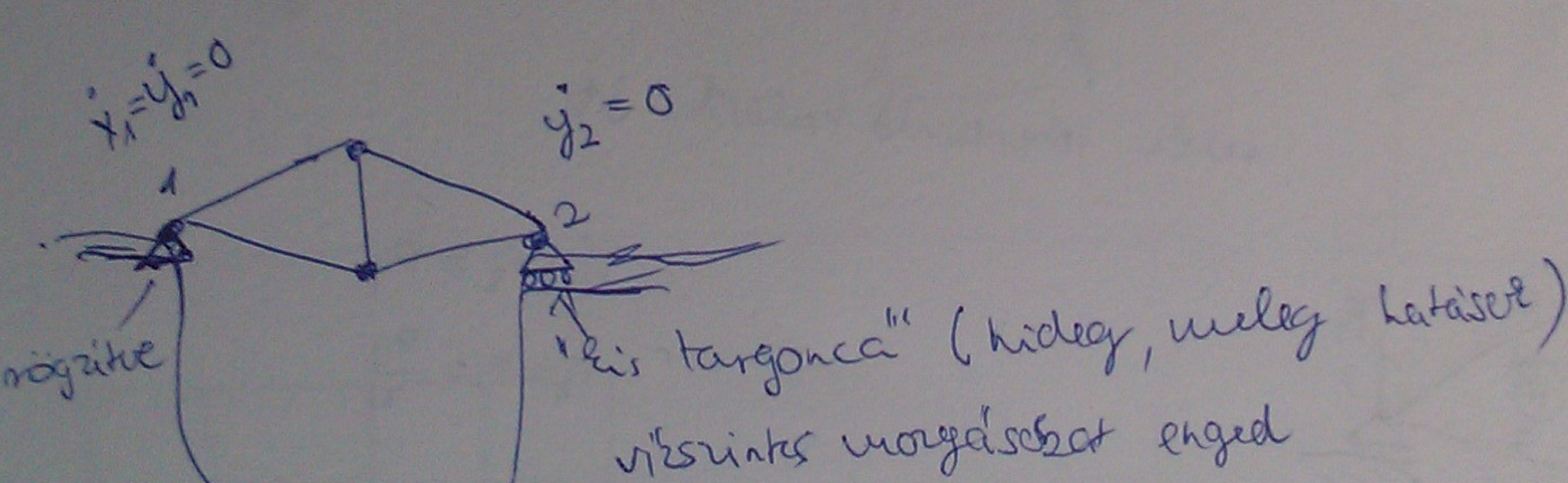
Kérdés: G min. gen. merev-e a $\mathbb{R}^d$-ben

$\forall d$-re M_d probléma $\in NP$

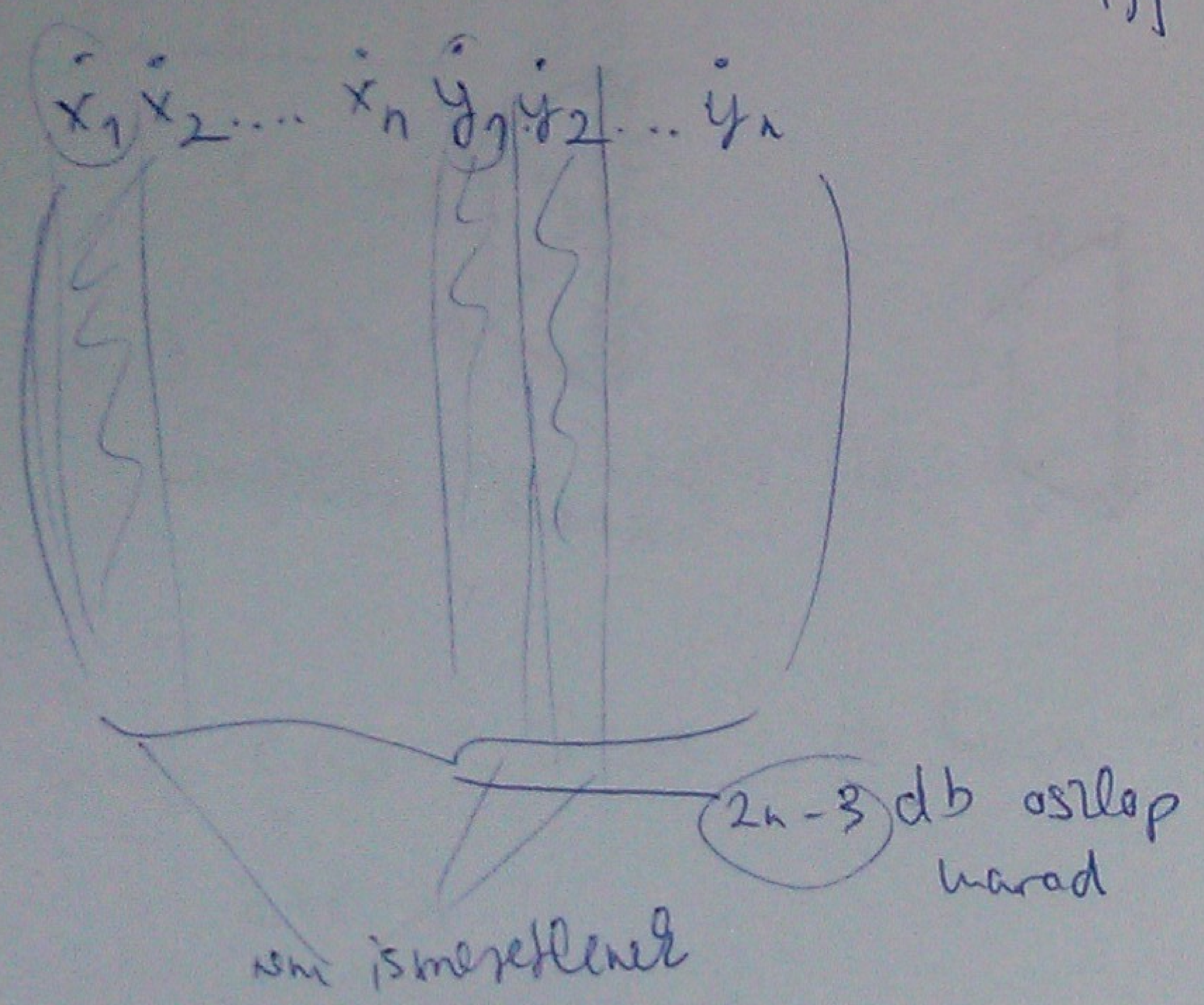
$M_2 \in P$

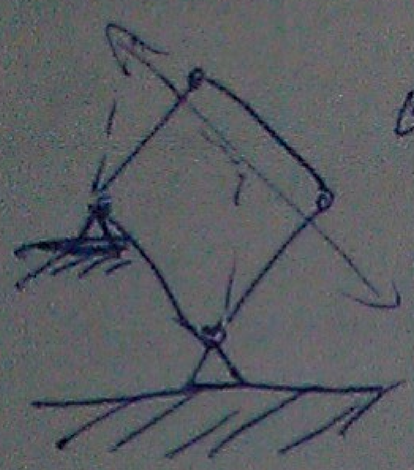
$M_3 \overset{?}{\in} P$ biztos nem NP-teljes



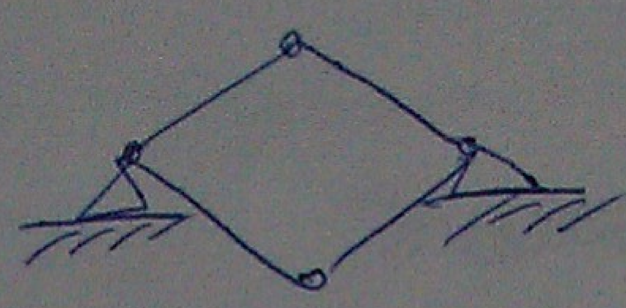


Így merev-e?





← nem merev



— jó rögzítés
nem szomszédos a rögzítések

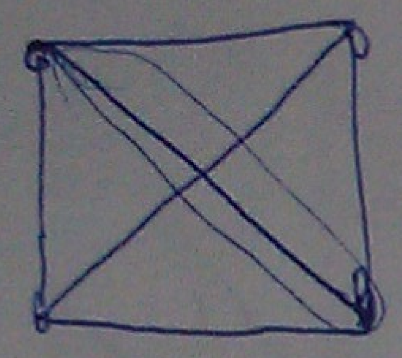
F_d Input: konkrét d-dim. rúdszerkezet

Kérdés: Legalább hány csuklót kell rögzíteni a $\mathbb{R}^d$ egy-egy pontjához, hogy minden fixálva legyen?

$\forall d$-re $F_d \in NP$ nem eldöntési probléma de pl. 17 elég-e? ha igen akkor a csúcsok megjelölése

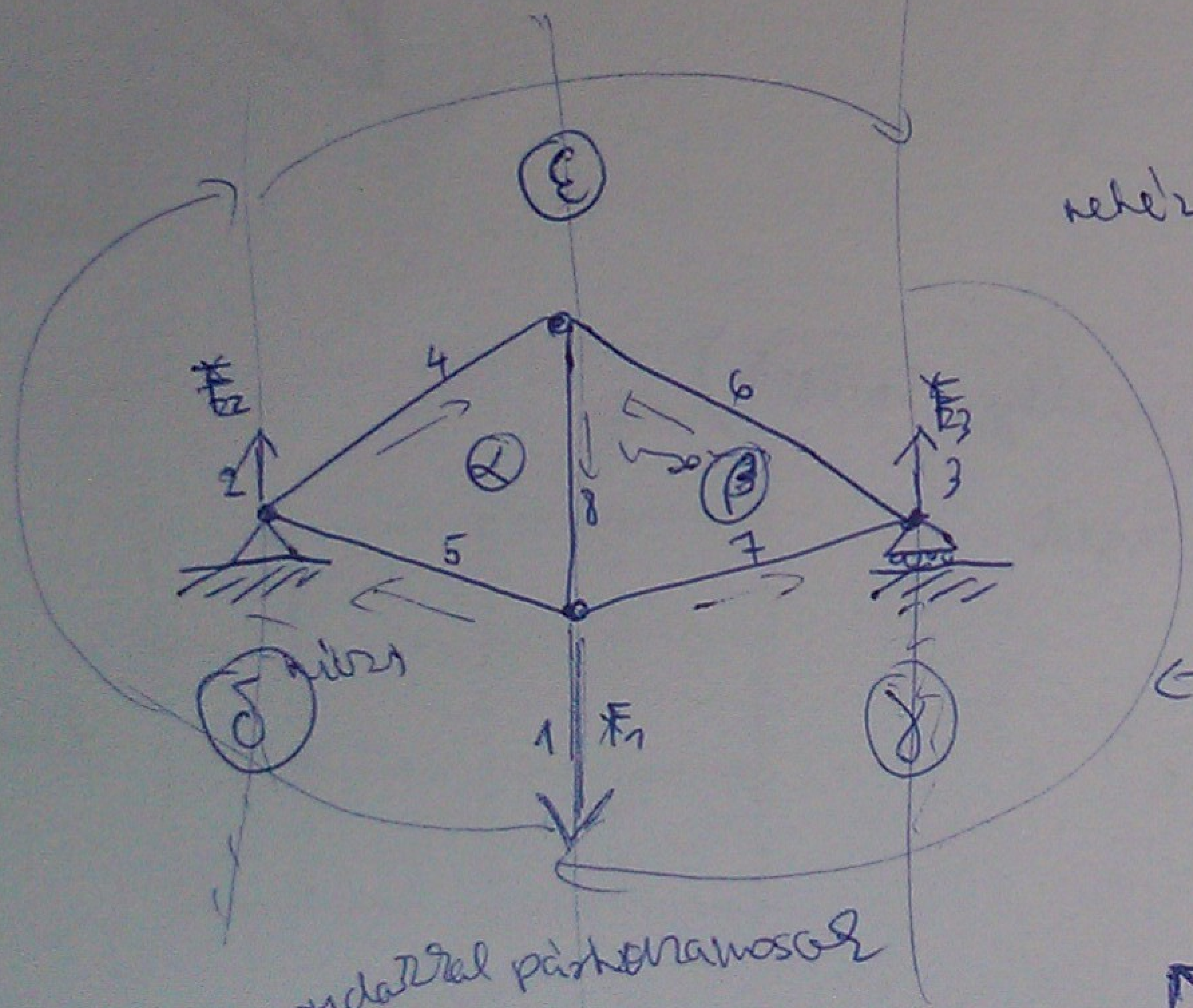
$F_2 \in P$ (2PMMP spec. esete)

$\forall d \geq 3$-ra $F_d \in NP$-teljes



statikailag határozatlan lesz (több ismeretlen mint egyenlet)

nem min. merev



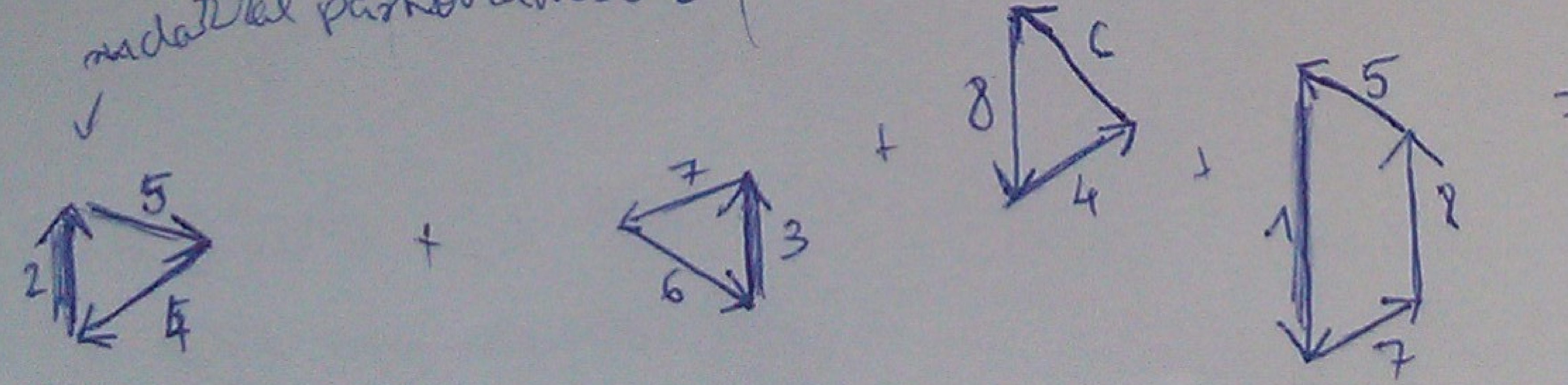
nehéz teherautó halad át

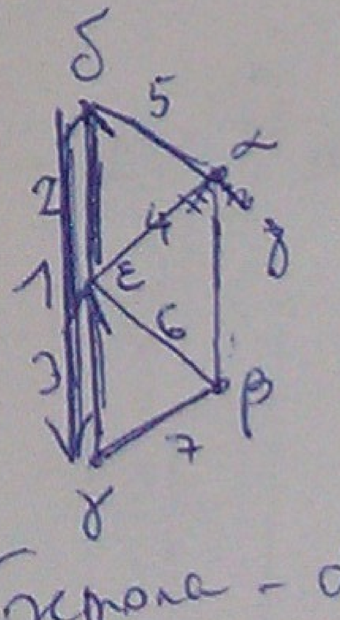
$F_2 + F_3 = F_1$

$F_2 = F_3 = \frac{F_1}{2}$

← tartományok — pontok

rudakkal párhuzamosak



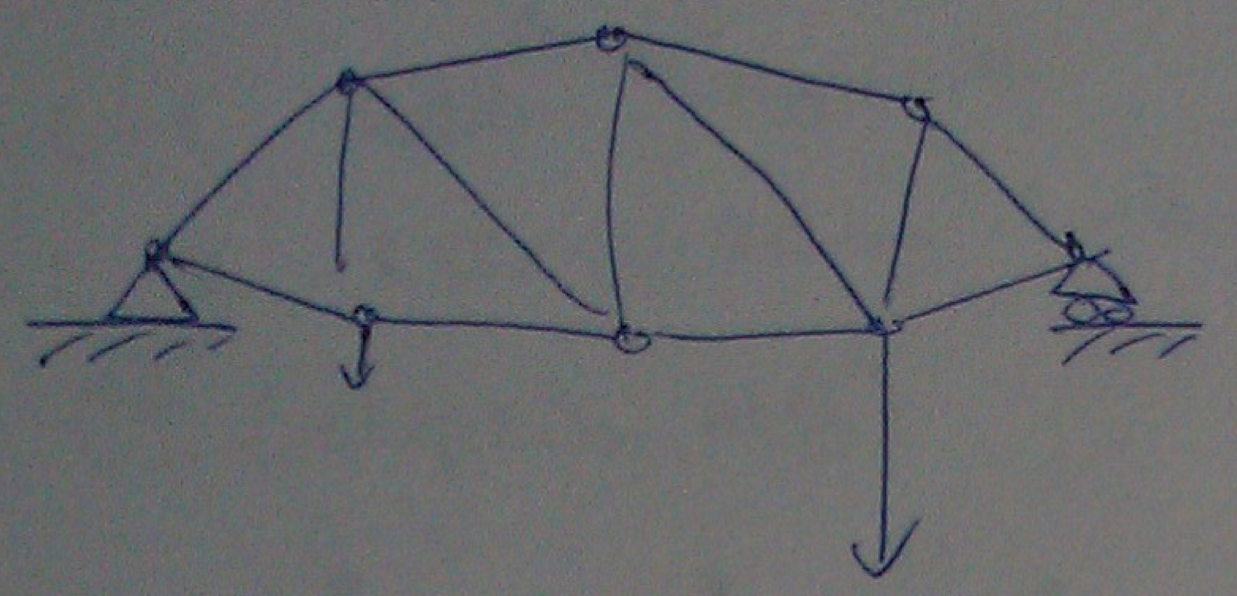


Cremona-diagram

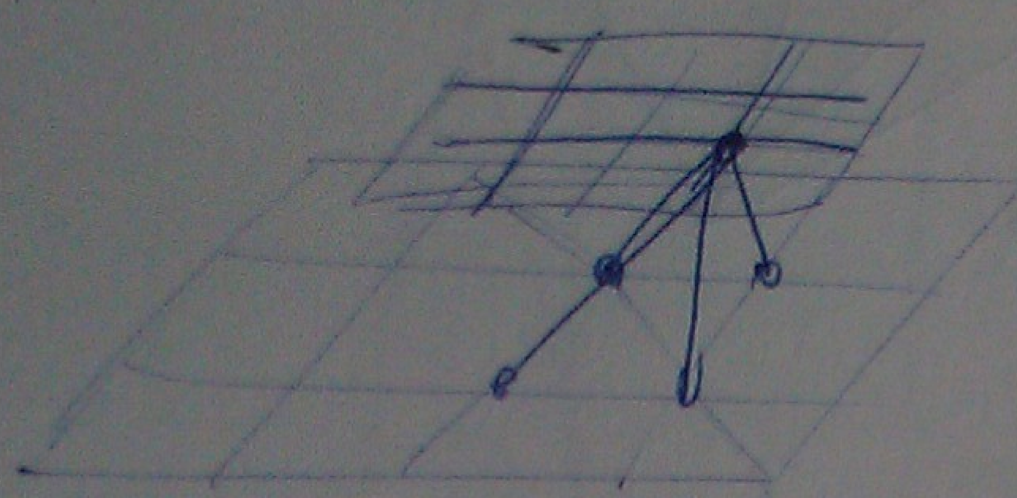
2,3,1 egyszer fordul elő

minden végénél egy kör jelöl meg és terelítva

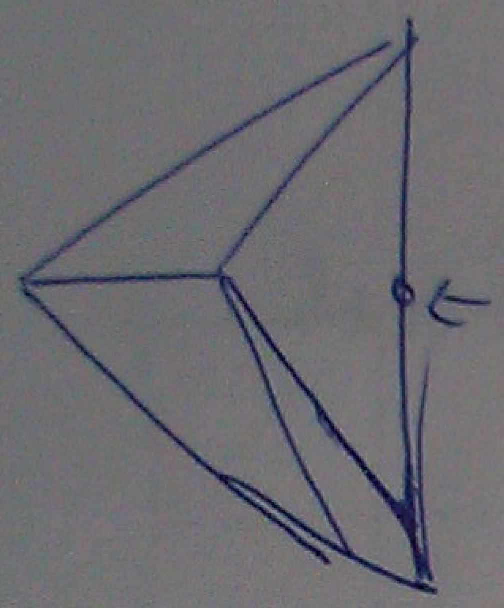
rúdszerkezet duálisa Cremona-diagr.
és
[illegible] terhelés

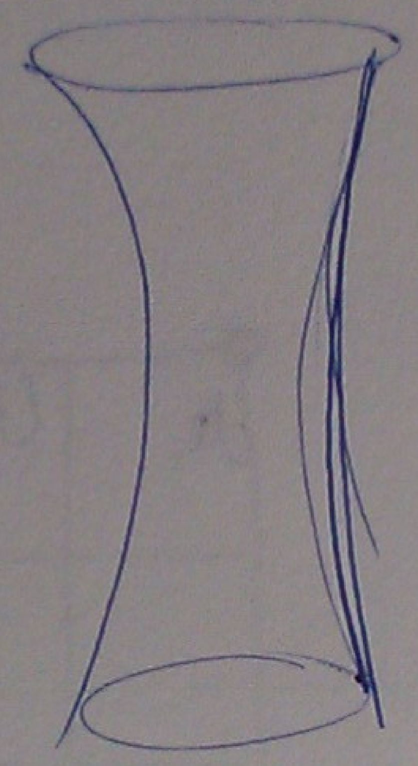


függ az erő nagyságától
bonyolultabb



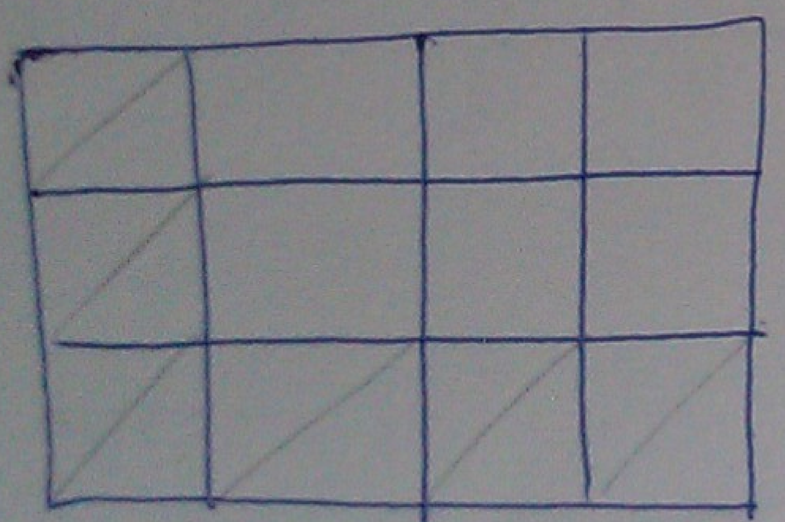
az a merev ami szabálytalanabb





nyereg felület

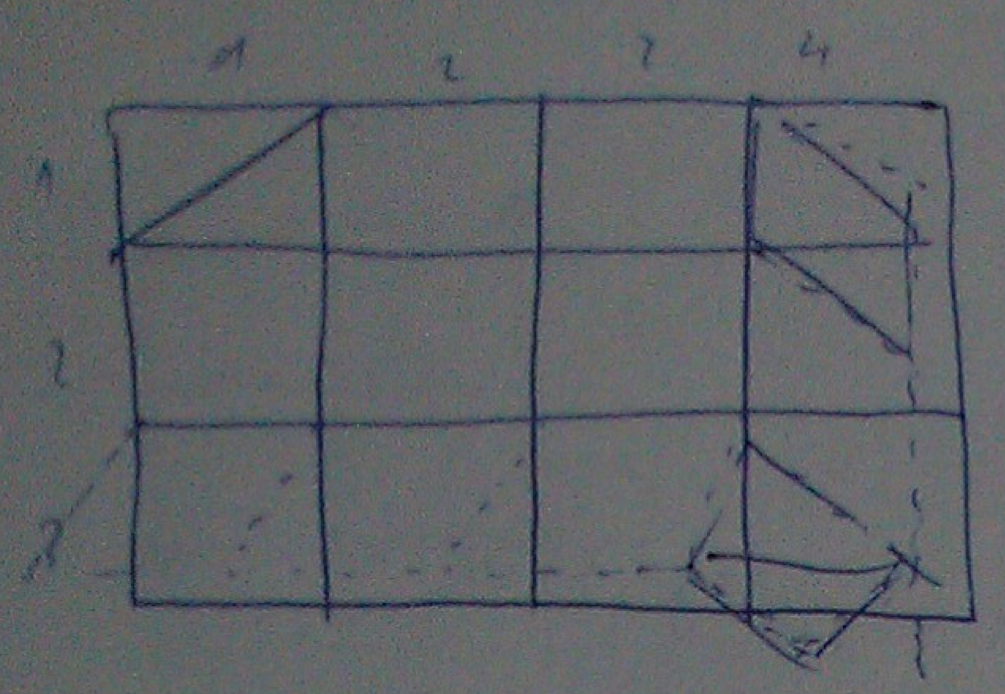
k=3

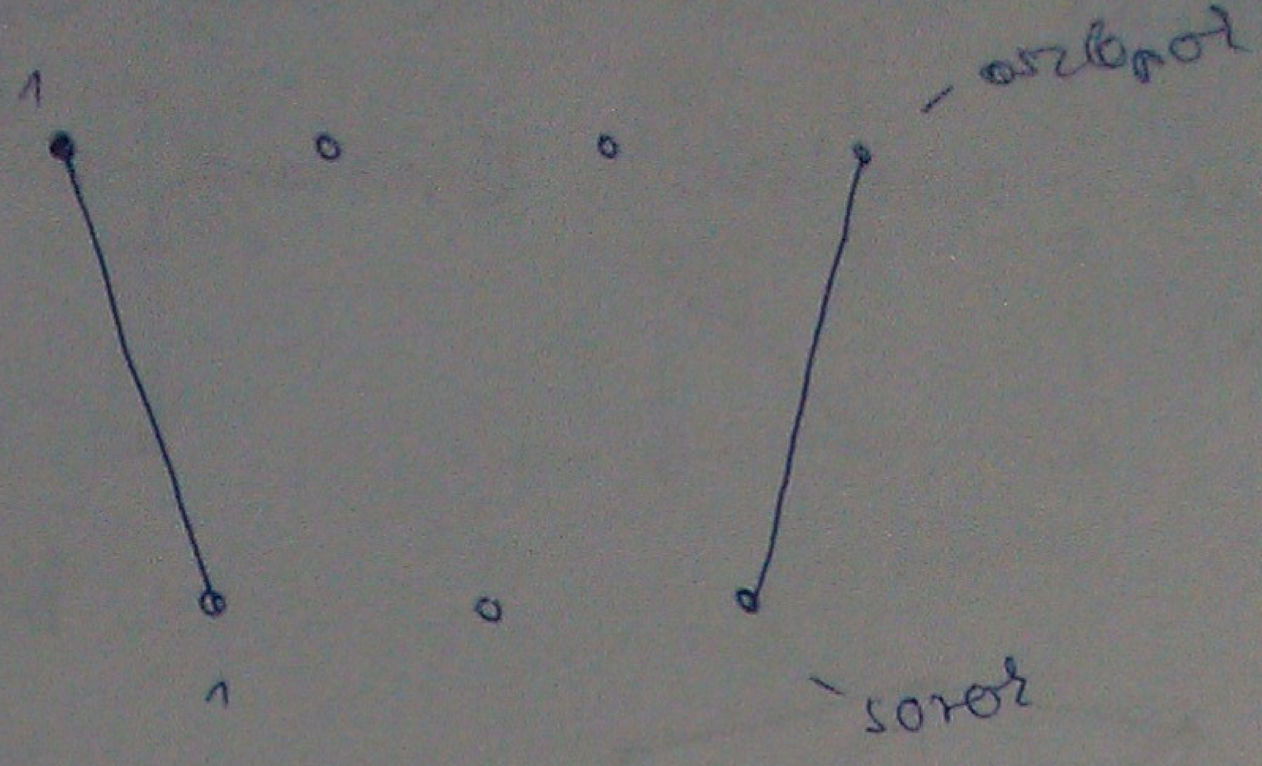


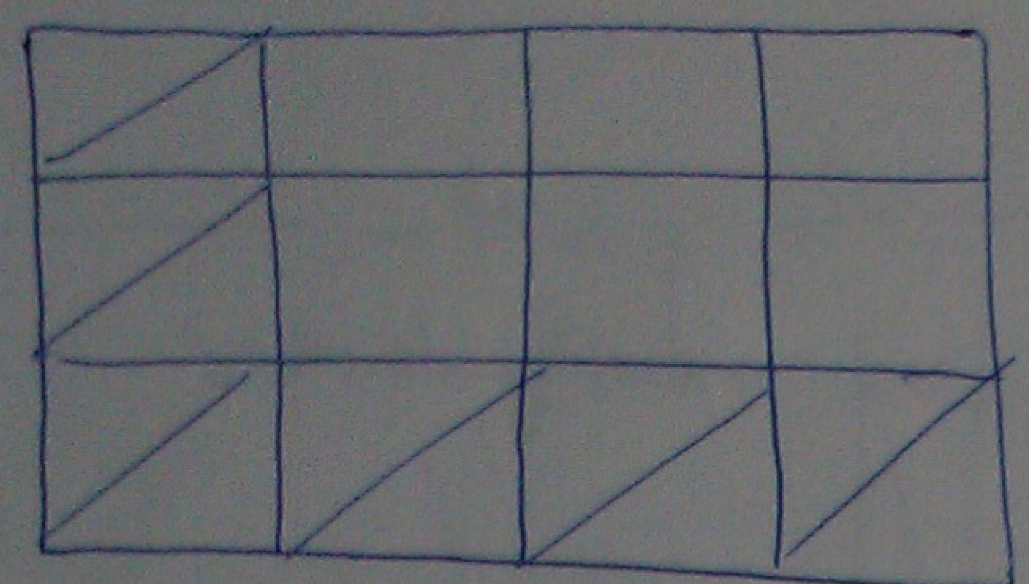
l = 4

2n-3 = 37db rúd kell
hogy min merev legyen

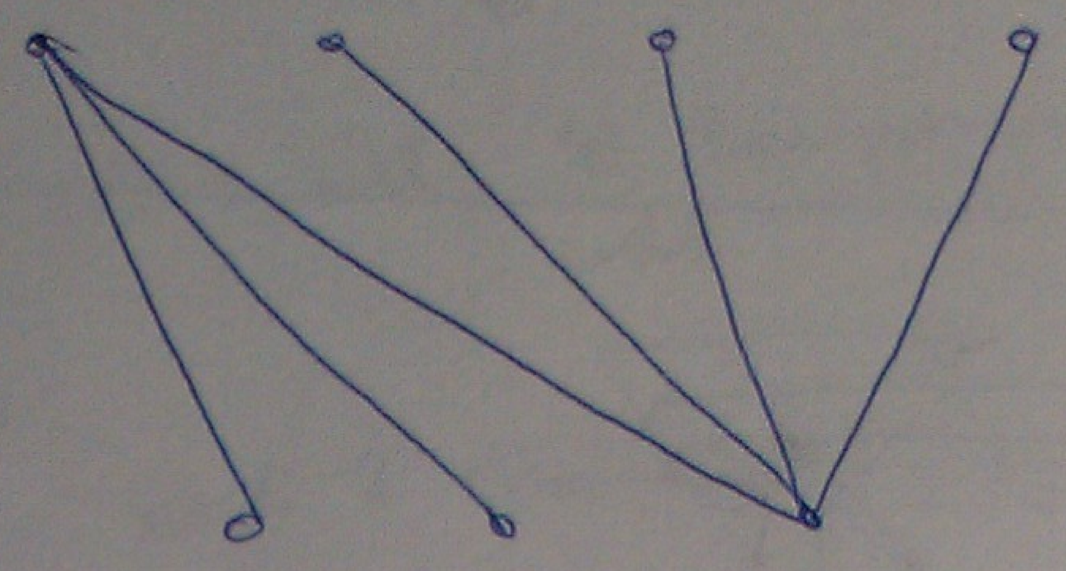
15
16
még 6db kellene, de hova kell őket tenni?
↑
k+l-1







merev lesz-e?

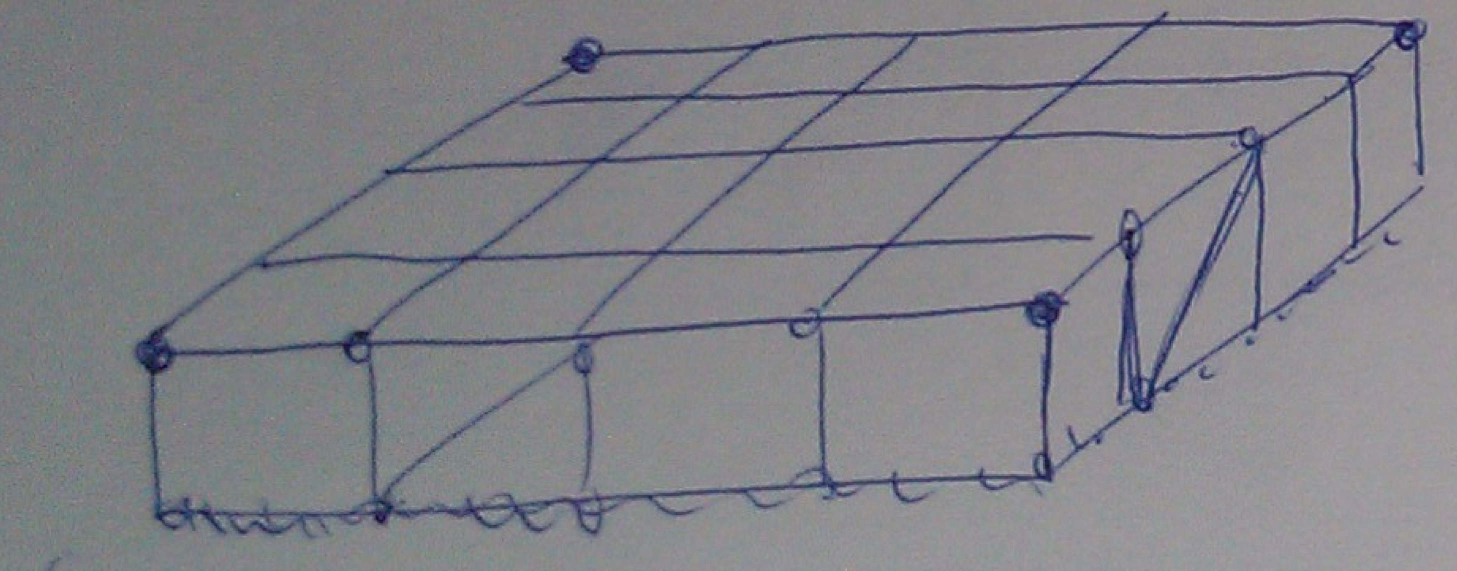


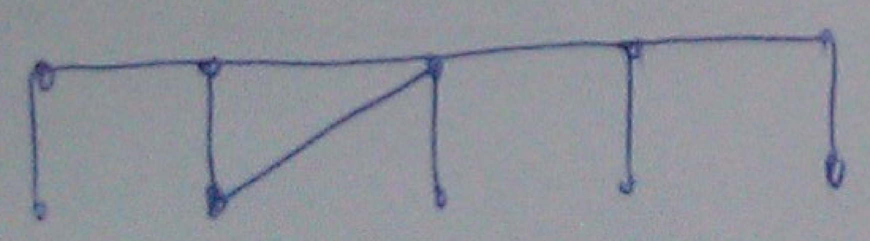
feszítőfa

merev $\iff$ páros gráf öf.

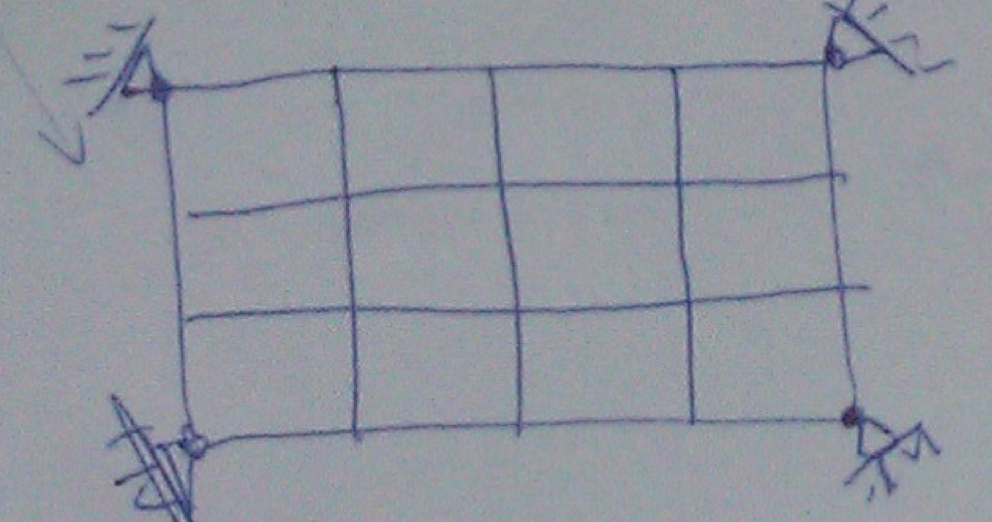
k×k-nál: $O(k^2)$ db pont

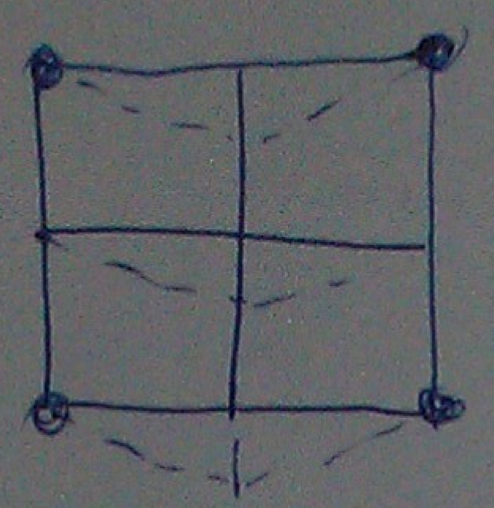
$O(k^6)$ lépésszám   de lin. időben megy Tmel

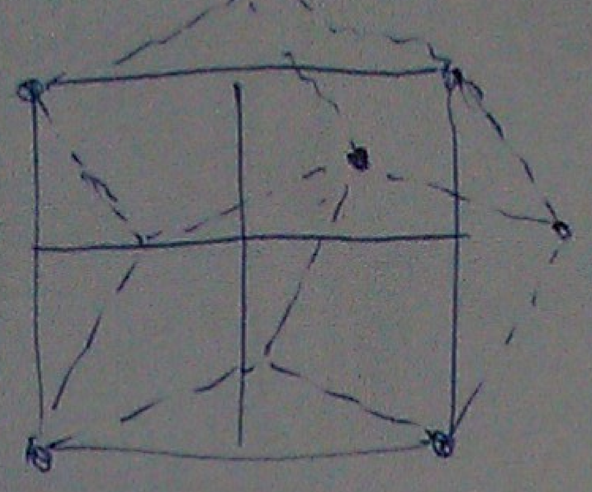


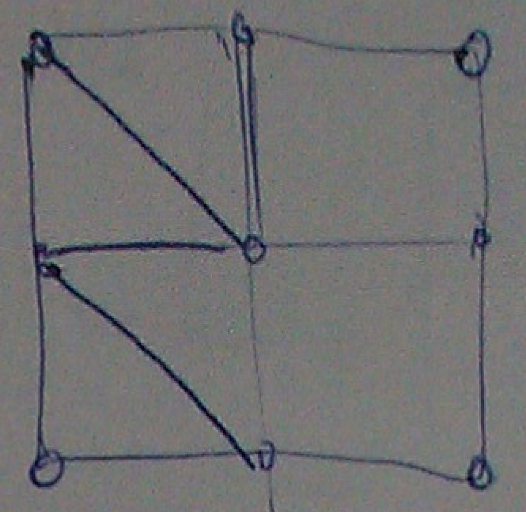


síkban merev



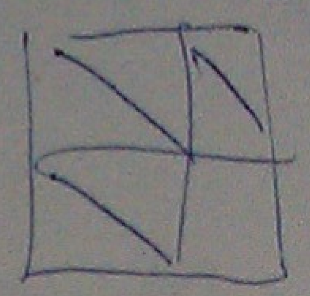






merev

Ha 2 is elég
de nem
mindegy
hova

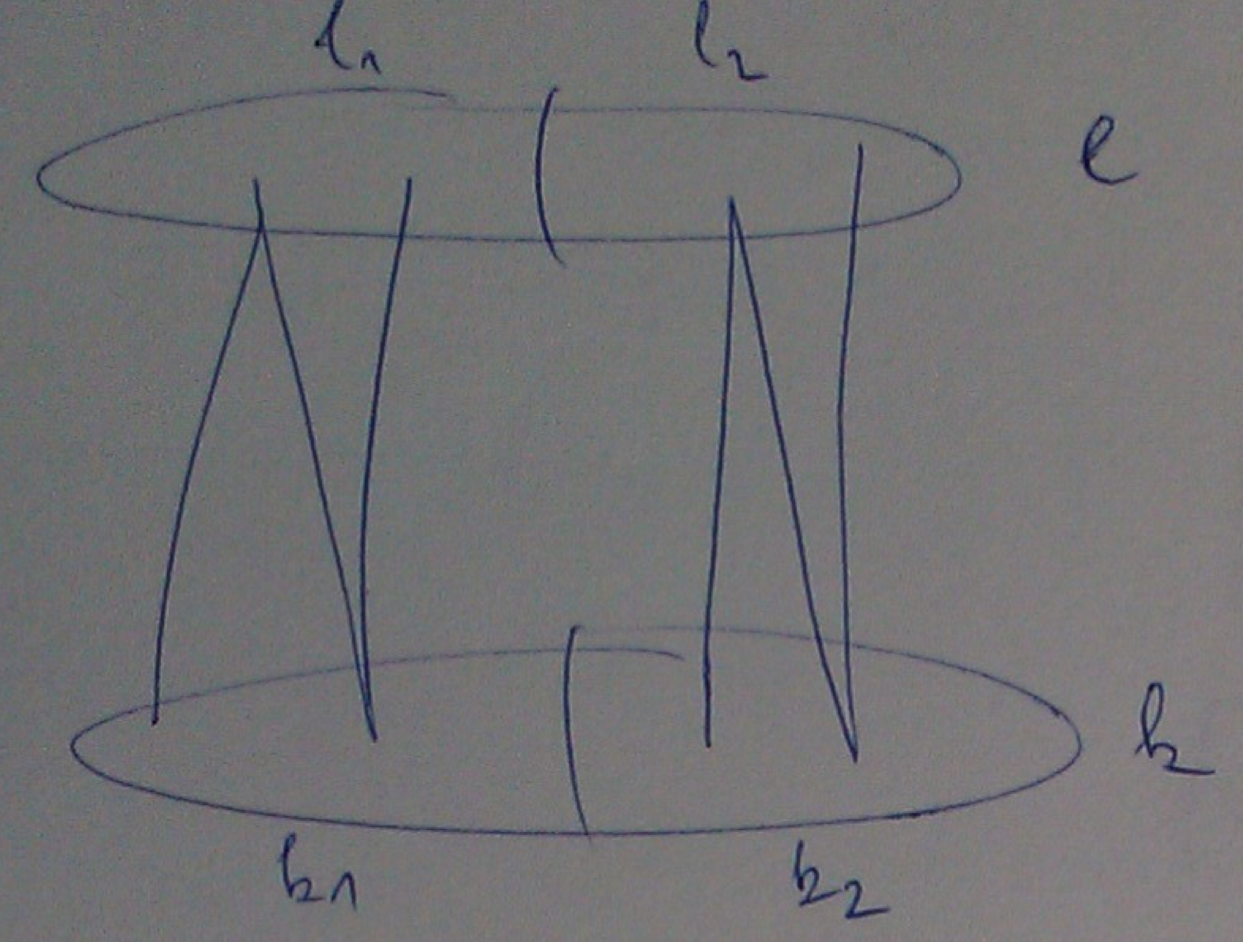


$k+l-1$ 2dim. négyzetrács

$k+l-2$ $k \times l \times 1$ 3dim kockarács

+4 (oldalfalakon átló)

$k+l-1 = 3$db rúddal



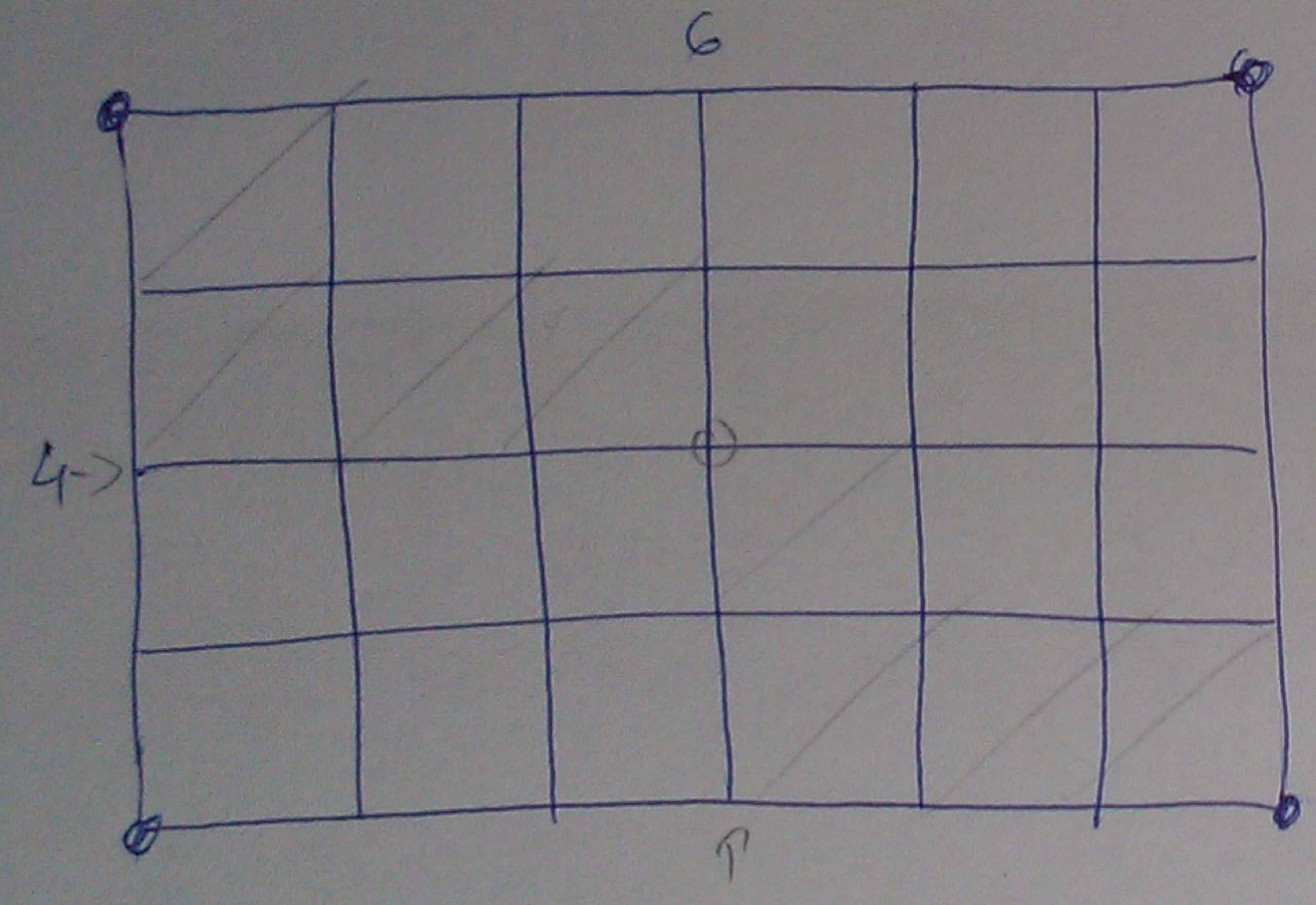
$k+l-2$ -vel két komponensű erdő

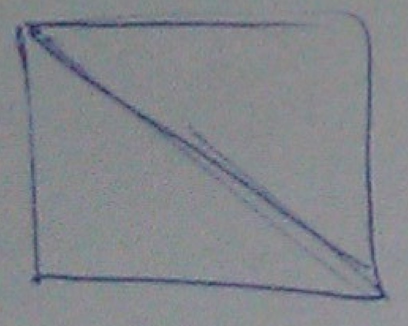
$k+l-2$ átló ~~[illegible]~~ merev rendszerhez vezet

$\Updownarrow$

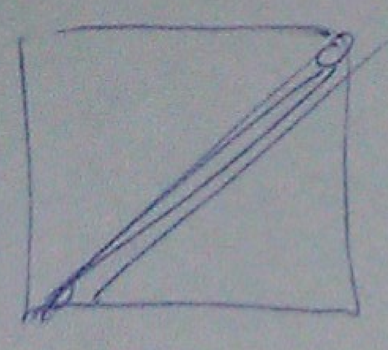
$$\frac{k_1}{l_1} \neq \frac{k_2}{l_2}$$

ez nem jó

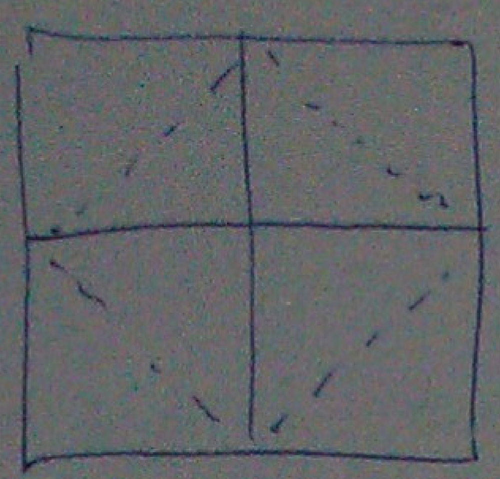




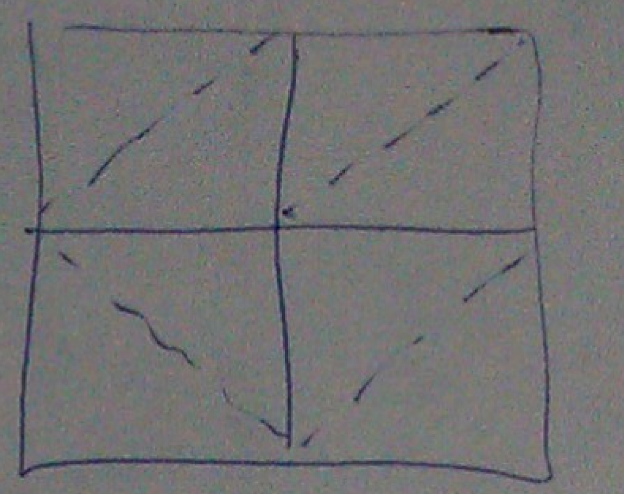
ez jobb, mert
a húzóerőt jobban bírja a rúd



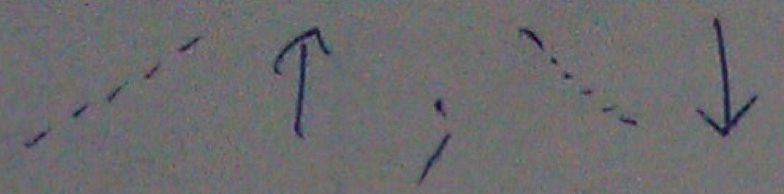
átlós kötelek



← merev



← nem merev

ir. gráf: 

erősen öf. gráf ⟺ merev