A Számítástudomány alapjai

1. ZH 2011. X. 13. 8^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét** és a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

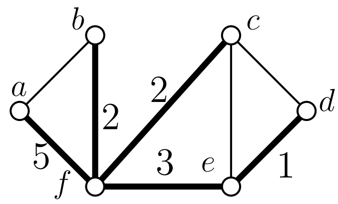
Feladatok

1. A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként $1, 3, 5, 7$ és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriáink kapacitásainak összegének testvérünkéiéiénél mindenképpen nagyobbnak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

2. Rajzoljuk le azt a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját), aminek szomszédossági mátrixa
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Legkevesebb hány élt kell G-be behúzni az egyszerűség megtartásával úgy, hogy reguláris gráfot kapjunk?

3. Tekintsük az $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$, $(4, 3, 2, 7, 6, 5, 9, 8)$ és $(1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8)$ Prüfer-kódú fákat. Alkossák a G gráf élhalmazát ezen fák élei azzal, hogy ha két csúcs k fában szomszédos, akkor G-ben az adott élnek k párhuzamos példánya található. Van-e G-nek Euler-köre?

4. Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.



5. Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány éle van F komplementerének?

6. Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található K_{16}-nak Hamilton köre.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Ács Bernadett (K IB 138, Bérczi Kristóf (K, E 407), Csákány Rita (K-Cs, IB 134), Drótos Márton (K, IB 138, J 302), Faller Beáta (K, IB 139), Göbölös-Szabó Julianna (K-Cs, IB 140), Kőrösi Attila (Cs, IB 141), Mihálka Éva Zsuzsanna (Cs, IB 138), Recski András (K, IE 217.1), Salánki Ágnes (K, E 406), Soltész Dániel (Cs, IB 142), Szolnoki Lénárd (Cs, IB 139), Varga Kitti (K, IB 140)

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2011.10.13.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként $1, 3, 5, 7$ és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriáink kapacitásainak összegének testvérünkéiéiénél mindenképpen nagyobbnak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

   Az ötféle ajándékból $2^5 = 32$-féle részhalmaz képezhető. (2 pont)
   Ezekből kell azok számát meghatározni, amit ajándékba kaphatunk a magunk támasztotta önző feltétel betarttásával. (1 pont)
   Mivel az öt kapacitás összege 25, azokat a részhalmazokat kell leszámolnunk, ahol a megfelelő összkapacitás legalább 13 Gb. (1 pont)
   Vegyük észre, hogy bármely részhalmaz és a komplementere közül pontosan az egyiknek lesz az összkapacitása legalább 13 Gb, (5 pont)
   ezért az összes lehetséges részhalmaznak a fele, azaz $2^4 = 16$ a keresett részhalmazok száma, és egyúttal ez a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

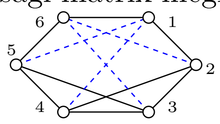
   Természetesen az első 4 pont megszerzése után úgy is befejezhető a megoldás, hogy izomból leszámoljuk a megfelelő részhalmazokat, pl úgy, hogy 1-elemű nincs, két eleműből van 2, három eleműből 8, négy eleműből 5 végül 5-eleműből 1.

2. Rajzoljuk le azt a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját), aminek szomszédossági mátrixa

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

   Legkevesebb hány élt kell G-be behúzni az egyszerűség megtartásával úgy, hogy reguláris gráfot kapjunk?

   A tanultak szerint akkor fut él két csúcs között, ha a szomszédossági mátrix megfelelő mezejében 1-es

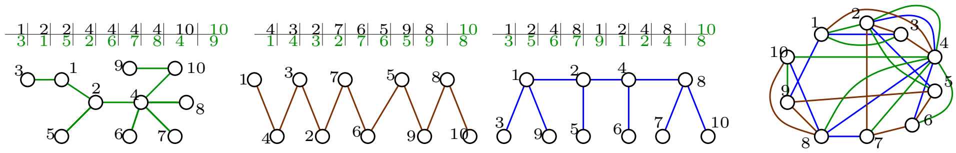


   található. Ennek alapján G a fekete, folytonos élek alkotta gráf: (5 pont)
   G-ben a csúcsok fokszámai 2 ill. 3. Ha G-t 3-reguláris gráffá akarjuk kiegészíteni, akkor a két másodfokú csúcs közé élt kellene behúznunk, amit nem tehetünk meg az egyszerűség megtartásával. (2 pont)
   Tehát legalább 4-reguláris gráfot kell készítenünk, azaz a két másodfokú pontból még legalább $2-2$ élt kell behúznunk, összesen tehát legalább 4-et. (2 pont)
   Ezt meg is tudjuk tenni, pl az ábrán látható kék, szaggatott éleket behúzva, tehát 4 a válasz a kérdésre. (1 pont)

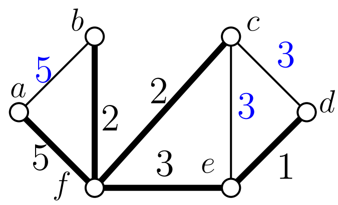
3. Tekintsük az $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$, $(4, 3, 2, 7, 6, 5, 9, 8)$ és $(1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8)$ Prüfer-kódú fákat. Alkossák a G gráf élhalmazát ezen fák élei azzal, hogy ha két csúcs k fában szomszédos, akkor G-ben az adott élnek k párhuzamos példánya található. Van-e G-nek Euler-köre?

Mindhárom Prüfer-kód 8 hosszúságú, ezért 10 címkézett pontja van a G gráfnak (2 pont)
Mivel mindegyik fa összefüggő, ezért uniójuk, G is az. (1 pont)
Az órán azt tanultuk, hogy véges összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden csúcsa páros fokú. (2 pont)
Olyat is tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli fokszáma. (2 pont)
Ha gondosan összeszámoljuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az $1, 2, \ldots, 10$ címkék mindegyike páratlan sokszor szerepel a 3 Prüfer-kódban, és ennél az előfordulási számnál a fokszáma 3-mal nagyobb. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-ben minden csúcs fokszáma páros lesz, ezért a fentiek miatt G-nek van Euler-köre. (1 pont)

(Ha vki megkonstruálja a 3 fát, észreveszi, hogy összefüggő, és azon számolgat fokszámokat, az is teljes pontszámot ér. Ha vmik fát elrontja, akkor rontott fánként 1-1 pontot levonunk. Ha ezen az úton próbálkozik, de kiderül, hogy nem tud Prüfer-kódot dekódolni, akkor max 5 pont jár.) Itt vannak egyébként a G-t alkotó fák és G:



4. Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.



Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F-beli úton levő élek súlyainak maximuma. (3 pont)

Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (2 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

5. Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány éle van F komplementerének?

A Prüfer kód hossza 10, ezért az általa kódolt feszítőfának 12 csúcsa van. (2 pont)
Ezért az F feszítőfa élszáma 11. (3 pont)
A 12 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66$, (3 pont)
ezért a komplementernek $66 - 11 = 55$ éle van. (2 pont)

Természetesen nem tilos F meghatározása sem. Aki csak ennyit tesz, annak az első 5 pont jár.

6. Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élek reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élekből található K_{16}-nak Hamilton köre.

Válasszuk ki azt a két színt, amikből a lehető legtöbb azonos színű él indul a csúcsokból. Mivel K_{16} minden csúcsából 15 él indul amiket 4-félére színeztünk, ezért a két leggyakoribb színből legalább az élek fele, azaz legalább 8 él indul. (4 pont)
Ha tehát G az a gráf, amit a két kiválasztott színnel színezett élek alkotnak, akkor G olyan reguláris gráf, amiben minden csúcsnak legalább 8 a fokszáma (2 pont)
Az órán tanult Dirac tétel szerint ha egy gráfban minden csúcsból legalább annyi él indul, mint a csúcsok számának a fele, akkor a gráfban van Hamilton kör. (3 pont)
Jelen esetben teljesül a fenti Dirac feltétel, ezért G-nek van Hamilton köre, ami éppen a feladat állítását bizonyítja. (1 pont)