Segédlet 2

Lineáris SISO tag rendszeregyenletéhez rendelhető, P, I, Σ alaptagokat tartalmazó különféle hatásvázlatok és az ezek alapján értelmezhető állapotegyenlet. Összetett tagok

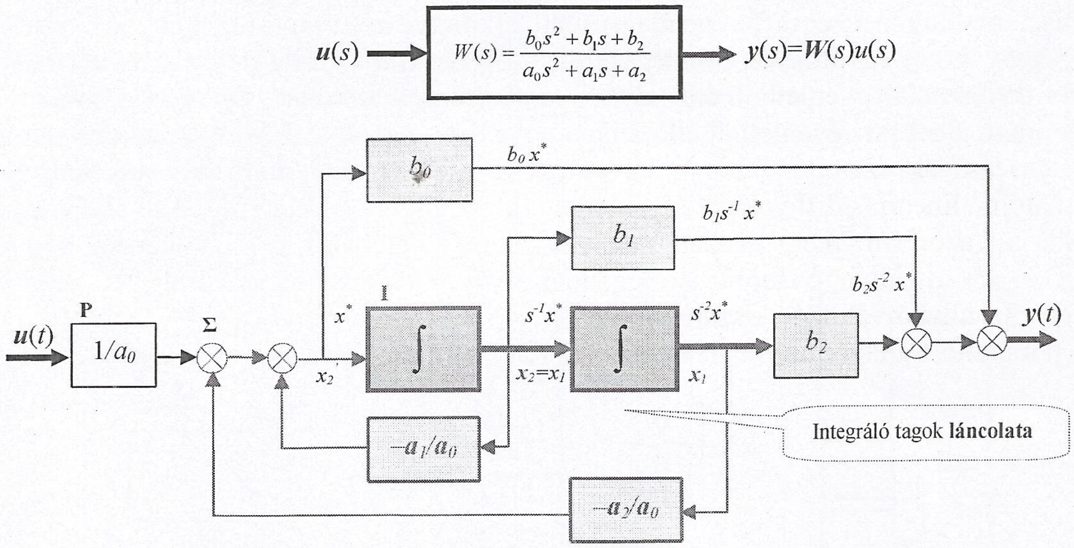
Az átviteli függvény közvetlen felbontása

Az általánosság megszorítása nélkül tekintsük a SISO tag differenciálegyenletét, és átviteli függvényét az alábbi másodrendű alakban ($n=m=2$, $a_0 \neq 0$):

$$a_0 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_2 u(t)$$

$$W(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Az átviteli függvény alapján – figyelembe véve, hogy s^{-1} az integrálás operátora – a **P**, **I**, **Σ** lineáris alaptagokat tartalmazó hatásvázlat építhető fel (1. ábra).



1. ábra Másodrendű SISO dinamikus rendszer **P**, **I**, **Σ** alaptagokból felépített hatásvázlata, a $W(s)$ átviteli függvény *közvetlen* felbontása

Az a_0, a_1, a_2, és a b_0, b_1, b_2 együtthatók mindegyike *valós* szám. A hatásvázlat $a_0 \neq 0$ esetre érvényes, de a többi a_1, a_2, és b_0, b_1, b_2 együttható tetszőleges lehet, így a *zérus* értéket is felvehetik. A b_0 paraméter jelzi, hogy az $u(t)$ bemenőjel *direkt módon* is befolyásolja az $y(t)$ kimenőjelet, ha viszont $b_0=0$, akkor a bemenőjelnek csak az $x_1(t)$, $x_2(t)$ állapotváltozókon keresztül van hatása az $y(t)$ kimenőjelre. Fontos tulajdonsága a rendszernek, hogy a $H(s)=a_0s^2+a_1s+a_2$ karakterisztikus polinom együtthatói az *integrátorok visszacsatolásaiban* játszanak meghatározó szerepet, szemben a b_0, b_1, b_2 együtthatókkal, amelyek azt mutatják, hogy az $y(t)$ kimenőjel előállításában az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozók és az $u(t)$ bemenőjel milyen módon vesznek részt. Különleges viszonyokat jelent az $a_1=a_2=0$ paraméterekkel rendelkező struktúra, ekkor két, önmagukról **visszacsatolatlan** integráló tagok soros kapcsolásból áll a hatásvázlat „szerkezete". Hasonlóan figyelemre méltó eset az $a_1=0$, $a_2 \neq 0$ paraméterekhez tartozó helyzet, amikor az egymással soros kapcsolást alkotó integrátorok csak a második integrátor kimenetéről visszacsatoltak. Mindkét esetben az adott matematikai modellel jellemzett rendszer *labilis* tulajdonságú, mert $u(t)=u_0$=állandó bemenőjel hatására az $y(t)$ kimenőjel minden határon túl növekszik (ha $a_2<0$, pozitív visszacsatolás!), vagy periodikus lengőmozgást végez (ha $a_2>0$, negatív visszacsatolás!). Ez utóbbi két eset bizonyítását – figyelemmel arra, hogy $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ gerjesztésre keletkező válasz $y(t)=L^{-1}[W(s)/s]u_0$ – az Olvasóra bízzuk. A közvetlen felbontás hatásvázlatának figyelemre érdemes tulajdonsága, az egymást működtető integrátorok soros kapcsolatának **láncolata**. Természetesen az általános, *n–edrendű* esetben ez az integrátorlánc n darab integrátort tartalmaz, és mindegyik kimenete az **első** integrátor bemenetére van visszacsatolva.

A hatásvázlat integráló tagjainak kimenő jelei a *másodrendű* dinamikus rendszer $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozói (lásd az 1. ábrát). Ezekkel a jelölésekkel a másodrendű lineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_1}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_0} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} (b_2 - \dfrac{b_0 a_2}{a_0}) & (b_1 - \dfrac{b_0 a_1}{a_0}) \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{b_0}{a_0}}_{D} u(t)$$

A másodrendű rendszer differenciálegyenletben, illetve az átviteli függvényben szereplő a_0, a_1, a_2, és b_0, b_1, b_2 együtthatók mindegyike tetszőleges *valós* szám, de $a_0 \neq 0$. A két *elsőrendű* lineáris differenciálegyenletből álló *differenciálegyenlet–rendszer*, és az $y(t)$ kimenő jelet meghatározó algebrai egyenletből álló állapotegyenlet – az adott $u(t)$–re vonatkozó $y(t)$ válasz meghatározásának szempontjából – **egyenértékű** a SISO tagot leíró *másodrendű*, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlettel (a rendszeregyenlettel). Az állapotegyenlet megoldása azonban nem csupán az $y(t)$ kimenőjelet szolgáltatja, hanem a rendszer $x(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)]^T$ állapotvektorát is megadja, mivel az $y(t)$ meghatározását meg kell előznie az $x_1(t)$, $x_2(t)$ állapotváltozók kiszámításának[1].

Az n n méretű A állapotmátrix alakja az $n>2$ rendszám esetében:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_1}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} & \cdots & \cdots & -\dfrac{a_n}{a_0} \end{bmatrix}$$

Az átviteli függvény *közvetlen felbontásából* származtatható állapotteres reprezentációt **irányíthatósági kanonikus alaknak** is nevezik. Fontos tulajdonsága, hogy az A állapotmátrix utolsó sorában a karakterisztikus egyenlet negatív együtthatói szerepelnek.

Az átviteli függvény párhuzamos (részlettörtes) felbontása

A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényű SISO tag $u(t)=\delta(t)$ *Dirac* impulzusra adott $y(t)=w(t)$ súlyfüggvény válasza – feltételezve, hogy a $H(s)$ karakterisztikus polinom minden p_i gyöke

[1] A MATLAB mind az egy egyenletből álló *n–edrendű* lineáris differenciálegyenlet (a rendszeregyenlet) megoldását, mint pedig az n számú *elsőrendű* differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet–rendszer (az állapotegyenlet) megoldását hatékonyan támogatja:

```
[y,x]=lsim(Gs,Hs,u,t);[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);.
```

A $v(t)$ átmeneti függvény–, vagy a $w(t)$ súlyfüggvény számítása MATLAB támogatással:

```
[v,x,t]=step(Gs,Hs); [w,x,t]=impulse(Gs,Hs);.
```

Az átviteli függvényből az állapotegyenletet paramétermátrixainak egyfajta meghatározása:

```
[A,D,C,D]=tf2ss(Gs,Hs);.
```

egymástól különböző, és $n>m$ – a $W(s)$ részlettörtre bontásával[2], valamint annak ismeretében, hogy $L\{\delta(t)\}=1$, egyszerűen számítható[3]. Figyelembe véve, hogy az $r_i/(s-p_i)$ tényező (egy részlettört komponens) inverz transzformáltja

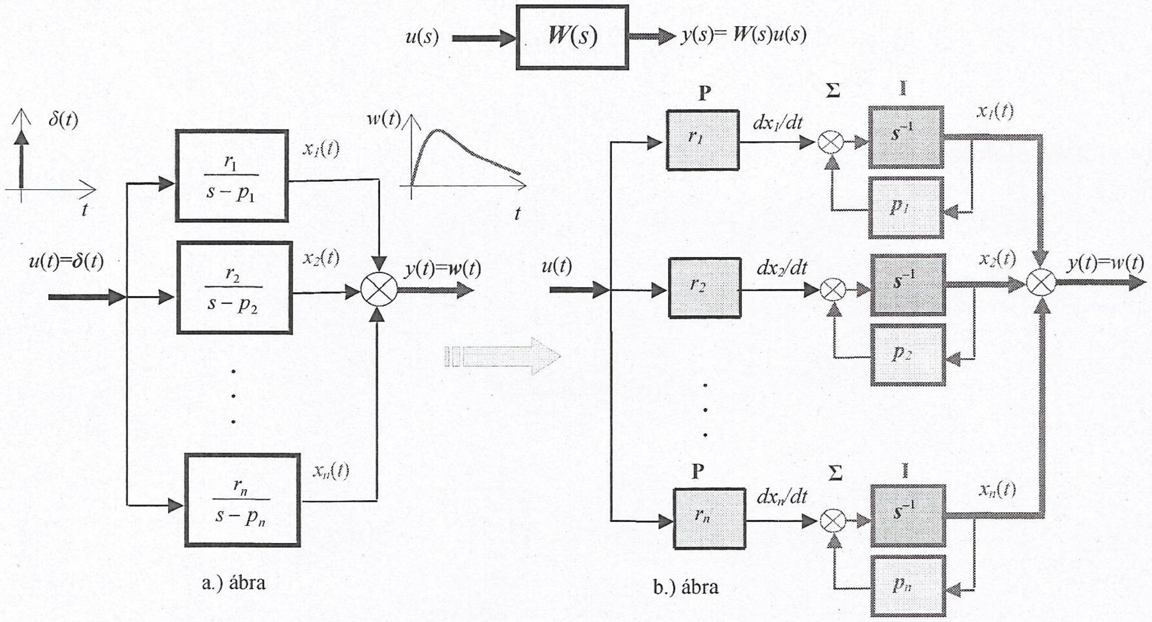
$$L^{-1}\left\{\frac{r_i}{s-p_i}\right\}=r_i L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_i}\right\}=r_i e^{p_i t}$$

a $W(s)$ részlettörtre bontásának eredményeként kapjuk:

$$y(s)=W(s)\underbrace{\delta(s)}_{L\{\delta(t)\}=1}=\underbrace{\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}}_{W(s)}=\left(\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_n}{s-p_n}\right)=w(s)$$

$$y(t)=L^{-1}\{W(s)\}=w(t)=\sum_{i=1}^{n}r_i e^{p_i t} = r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + \cdots + r_n e^{p_n t}$$

Mindezek alapján a $W(s)$ átviteli függvény $r_i/(s-p_i)$ átviteli függvényű tagok *párhuzamos* kapcsolásából felépített hatásvázlata hozható létre[4] (lásd 2a. ábra), amelyet tovább egyszerűsítve, az egyes párhuzamosan kapcsolt részek **P**, **I** és **Σ** lineáris *alaptagokból* állíthatók elő (lásd 2b. ábra).



2. ábra A $W(s)$ átviteli függvény részlettörtekre történő felbontása

A $W(s)$ átviteli függvényű tag **stabilitása** most azt jelenti, hogy a bemeneten ható, egységnyi jelterületű $\delta(t)$ *Dirac* impulzus hatására a kimeneten megjelenő $y(t)=w(t)$ súlyfüggvénytől elvárjuk, hogy $t\to\infty$ mellett $w(t)\to 0$ legyen (vagyis állandósult állapotban a

[2] A részlettörtre bontást támogató **MATLAB** függvény: `[r,p,k]=residue(Gs,Hs);`.

[3] $W(s)=G(s)/H(s)$ algebrai tört. Ebben z_i a $G(s)$ polinom gyökei [$W(s)$ **zérusai** és $W(z_i)=0$], a p_i a $H(s)$ polinom gyökei [$W(s)$ **pólusai** és $W(p_i)=\infty$]. A p_i pólusok $W(s)$ átviteli függvény szingularitásai.

[4] Ha a p_i pólusok mindegyike *negatív valós* szám, akkor $r_i/(s-p_i)=[r_i/(-p_i)]/[1+s/(-p_i)]=k_i/(1+sT_i)$. Ekkor a 2.a ábra hatásvázlatának struktúráját n számú egy tárolós arányos tag (**T** tag) *párhuzamos* kapcsolása alkotja. Ennek paraméterei a $r_i/(-p_i)=k_i$ átviteli tényező, és a $1/(-p_i)=T_i$ időállandó.

tag a ***zérus*** bemenőjelre ***zérus*** kimenőjellel válaszoljon). A hatásvázlat alapján is szemléletesen látható, hogy $y(t)=w(t)$ a párhuzamosan kapcsolt tagok $x_i(t)$ részválaszainak **összegéből** tevődik össze, és a $w(t)\to 0$ feltétel betartásához minden $x_i(t)$ részválasznak is zérushoz kell tartania. Ez utóbbi csak akkor teljesül, ha a $H(s)$ nevező[5] minden gyöke (a $\boldsymbol{W}(s)$ minden $\boldsymbol{p_i}$ pólusa) az s komplex számsík negatív valós részű félsíkján van (mert $t\to\infty$ mellett az re^{pt} csak akkor tart zérushoz, ha $real(p)<0$!!!). A párhuzamos felbontás alapján – állapotváltozóknak most is az s^{-1} átviteli függvényű **integráló** tagok kimenő jeleit tekintve – felírható a **SISO** tag állapotegyenletének egy másik alakja. A részlettörtes felbontás alapján kapott hatásvázlat lényeges tulajdonsága, hogy most mindegyik $x_i(t)$ állapotváltozó az $u(t)$ bemenőjel függvénye, illetve a kimenőjelben minden állapotváltozónak meghatározó szerepe van (lásd 2. ábrát). Fontos tulajdonság az is, hogy most az egyes integrátorok kizárólag **saját kimeneteikről visszacsatoltak**, vagyis az állapotváltozók **egymástól függetlenek, egymást nem befolyásolják** (az állapotváltozók *szétcsatolása*). Ezek a tulajdonságok természetesen az állapotegyenlet $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixában, a $\boldsymbol{B}$ bemeneti (oszlopvektor)–, és $\boldsymbol{C}$ kimeneti (sorvektor) paramétermátrixaiban is megjelennek. A hatásvázlat jelöléseivel:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=p_1x_1(t)+r_1u(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=p_2x_2(t)+r_2u(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n(t)}{dt}=p_nx_n(t)+r_nu(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)+\cdots+x_n(t)$$

Vagy mátrix alakban:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}p_1&0&\cdots&0\\0&p_2&\cdots&0\\0&0&\vdots&0\\0&0&0&p_n\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}}_{D}u(t)$$

Az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix – a $\boldsymbol{W}(s)$ párhuzamos (a részlettörteken alapuló) felbontásának eredményeként – most **diagonális**, főátlójában az egymástól különböző $p_i=\lambda_i$ sajátértékekkel. Az állapotegyenletnek ezt az alakját első **kanonikus alaknak** nevezzük[6]. Az **integráló** tagok

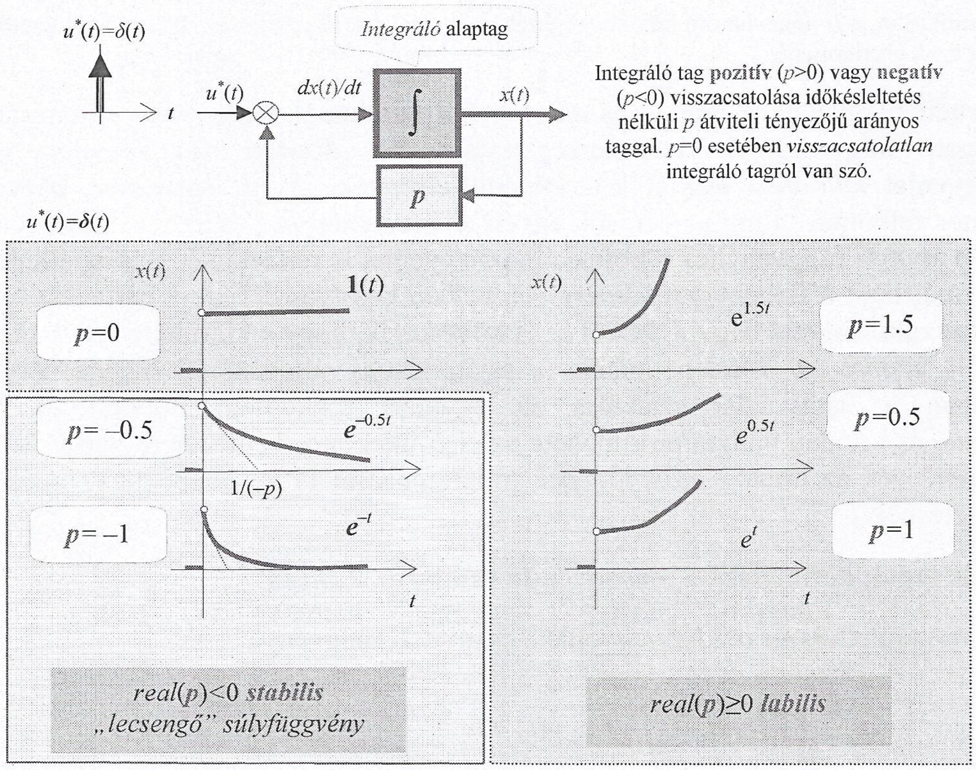
---

[5] Vegyük észre, hogy a $\boldsymbol{W}(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény nevezőjének $H(s)$ polinomjából képzett $H(s)=0$ egyenlet a rendszer karakterisztikus egyenlete, így ennek $s=p_i$ gyökei (a $\boldsymbol{W}(s)$ pólusai) azonosak a korábban már tárgyalt λ_i gyökökkel. A $p_i=\lambda_i$ gyökök a rendszer sajátmozgását és stabilitását alapvetően befolyásolják.

[6] A $\boldsymbol{W}(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény ismeretében az állapotegyenlet első kanonikus alakjának meghatározása: `[r,p,k]=residue(Gs,Hs);` vagy `[a,b,c,d]=tf2ss(Gs,Hs);[A,B,C,D,T]=canon(a,b,c,d);`. Az első kanonikus alak **akkor létezik**, ha $\boldsymbol{W}(s)$ minden p_i pólusa egymástól **különböző**. A közvetlen felbontásból származó *irányíthatósági kanonikus alak*, illetve a párhuzamos felbontásból származó *első kanonikus alak* más–

száma most is azonos a rendszer n rendszámával, de ezek – ellentétben az irányíthatósági kanonikus alakhoz tartozó struktúrával – most *nem* soros kapcsolású *integrátor láncolatot,* hanem ***párhuzamos*** kapcsolást alkotnak, és az egyes integráló tagok a $W(s)$ átviteli függvény p_i pólusainak megfelelő erősítési tényezőjű *arányos* tagokkal visszacsatoltak, valamint a $dx_i(t)/dt$ állapotsebesség vektor – az $u(t)$ bemenőjel mellett – kizárólag a saját $x_i(t)$ állapotváltozójától függ (lásd a 2b. ábrát). Ez a tulajdonság az állapotváltozók egymástól való függetlenségét, más megfogalmazásban a „**szétcsatolását**" is jelenti.

A hatásvázlat dinamikus részének egy eleme: integráló tagnak p átviteli tényezővel rendelkező arányos tagon keresztül történő *visszacsatolása*. Ennek a struktúrának tranzienseit szemlélteti a 3. ábra. A p pólusnak a dinamikus tulajdonságot alapvetően meghatározó szerepe az ábra alapján is nyilvánvaló[7].



3. ábra A súlyfüggvény komponensek p különféle valós értékei mellett

Az $x(t)$ állapotváltozó időfüggvényeinek lefolyásából levonható következtetés: **az elsőrendű rendszer aszimptotikus stabilitása akkor biztosított, ha az integráló tag negatívan visszacsatolt,** vagyis a $W(s)$ minden pólusa $p_i<0$. A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény párhuzamos felbontása alapján igen szemléletesen jelenik meg a $H(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökeinek ($W(s)$ pólusainak) szerepe, mivel az integráló tagok visszacsatolásaiban ezeknek a pólusoknak a számértékei szerepelnek. Ha ezek **valamelyike pozitív**, az adott integráló tag pozitívan visszacsatolt struktúrát alkot, ami a teljes rendszer

más állapotváltozókkal írják le **ugyanazt a dinamikus folyamatot**, de az $u(t)$ bemenet–, és az $y(t)$ kimenet szempontjából egymással **egyenértékűek** (azonos $W(s)$ átviteli függvényből származnak).

[7] A $p=0$ eset a stabilitás határhelyzete. Gyakorlati szempontból azonban ezt is a labilis rendszerhez soroljuk, mert állandósult állapotban ***zérus** bemenőjel mellett a kimeneten **állandó*** (és *nem* a zérus bemenőjelnek megfelelően zérus) kimenőjel van. A komplex pólusok $p_{i,i+1}=\sigma_i\pm j\omega_i$ konjugált komplex *póluspárban* fordulhatnak elő. Ilyen esetben a tranziensek időfüggvényei lengésekkel tartanak zérus (ha $real(p_i)=\sigma_i<0$), vagy végtelen (ha $real(p_i)=\sigma_i>0$) felé, illetve harmonikus lengőmozgás keletkezhet, ha $\sigma_i=0$, ($p_{i,i+1}=\pm j\omega_i$). Konjugált komplex póluspárok esetében a párhuzamos felbontás A állapotmátrixa *komplex számokat* is tartalmaz.

labilitásának is a természetes tulajdonságát mutatja. Ez még abban az esetben is így van, ha egyébként a többi pólus negatív valós résszel rendelkezik.

1. Feladat

Egy elsőrendű lineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = px(t) + ru(t)$$
$$y(t) = cx(t) + du(t)$$
$$r = 1, c = 1, d = 1, x(0) = 0, u(t) = 1(t)$$
$$p_1 = -1, p_2 = 0, p_3 = 1$$

****

$$x(t) = ? \quad y(t) = ?$$

Analitikusan, a p pólus három különböző értékeire számítsuk ki az $x(t)$ és $y(t)$ időfüggvényeket és adjuk meg ezek grafikonjait.

Az átviteli függvényhez rendelt és *alaptagokat* tartalmazó hatásvázlat struktúrának az ad jelentőséget, hogy ennek megszerkesztésével az **átviteli** függvényhez rendelhető **állapotegyenlet** *különféle* alakjai közvetlenül felírhatók. A itt ismertetett közvetlen–, és párhuzamos felbontáson túlmenően sok egyéb eljárás is létezik, és ezeknek megfelelően egy adott $W(s)$ átviteli függvényhez többféle állapotegyenlet is rendelhető. Bár az állapotegyenlet paramétermátrixait a felbontás módszere alapvetően befolyásolja, de a bemenőjel–kimenőjel kapcsolatot változatlanul hagyja. Ebből az is következik, hogy a különféle felbontások a $W(s)$ p_i pólusait, illetve az A állapotmátrix λ_i sajátértékeit változatlanul hagyja. A **közvetlen** felbontásban a hatásvázlat struktúra az egymást működtető integrátorok láncolatát tartalmazza, és minden integrátor kimenete az első integrátor bemenetére van visszacsatolva. Ez az elrendezés az *analóg számítógépek* programozását is megalapozta (*Thomson–Kelvin* visszavezetési elv).

Különféle tagok definiálása a másodrendű rendszer alapján

A másodrendű rendszer rendszeregyenlete és átviteli függvénye:

$$a_0 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + b_2 u(t)$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{H(s)} = W(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$$

Az együtthatók számértékei alapján az adott másodrendű rendszer többféle jelátvivő tagot definiálhat. Ezek közül – a szabályozási rendszerek analízisében gyakran használt – néhány fontosabbat táblázatban foglaltunk össze. Ebben feltüntettük a különféle tagok differenciálegyenleteit, a $W(s)$ átviteli függvényeit és a $v(t)$ átmeneti függvényeit. Ha az a_0=0 paramétert is megengedjük, akkor a realizálás követelménye miatt a b_0 paraméternek is b_0=0 értéknek kell lennie, és ekkor a másodrendű rendszer elsőrendű rendszerre egyszerűsödik (realizálhatósági okok miatt a $W(s)$ számlálójának m fokszáma nem haladhatja meg a nevező n fokszámát, $n \geq m$). Speciális esetet jelent az $a_0=a_1=b_0=b_1=0$ eset is, ekkor a differenciálegyenlet az $a_2 y(t)=b_2 u(t)$ algebrai egyenletre egyszerűsödik, és a jelátvitelt a $W(s)=b_2/a_2=k$ átviteli függvény jellemzi (**P** tag). A táblázatban feltüntetett differenciálegyenletekben az a_i és b_i együtthatókról feltételeztük, hogy valós, *pozitív* számok, vagy egyes esetekben valamelyikük értéke zérus. Ebből következőleg az átviteli függvényekben a k, k_i, k_d, T, T_d, T_i, ξ, ω_0 paraméterek szintén pozitív értékek, és az a_i, b_i együtthatókból származtathatók. Az adott átviteli függvények alapján az egyes tagok stabilitásviszonyai is egyszerűen megítélhetők, miután a karakterisztikus egyenletek első–, vagy másodfokúak.

Név	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	*Differenciálegyenlet*	*Átviteli függvény* $[W(s)]$	*Átmeneti függvény* $[v(t)]$
P	0	0	a_2	0	0	b_2	$a_2 y(t) = b_2 u(t)$	k	$k1(t)$
I	0	a_1	0	0	0	b_2	$a_1 \frac{dy}{dt} = b_2 u$	$\frac{k_i}{s} = \frac{1}{sT_i}$	$k_i t = \frac{t}{T_i}$
D	0	0	a_2	0	b_1	0	$a_2 y = b_1 \frac{du}{dt}$	$k_d s = sT_d$	$k_d \delta(t) = T_d \delta(t)$ *nem realizálható*
T	0	a_1	a_2	0	0	b_2	$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_2 u$	$\frac{k}{1+sT}$	$k(1-e^{-\frac{t}{T}})$
$\mathbf{T}_\xi$	a_0	a_1	a_2	0	0	b_2	$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_2 u$	$\frac{k}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$	$k[1+\frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t - arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi})]$
$\mathbf{PD}_\mathrm{i}$	0	0	a_2	0	b_1	b_2	$a_2 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u$	$k(1+sT_d)$	$k[1+T_d \delta(t)]$ *nem realizálható*
PD	0	a_1	a_2	0	b_1	b_2	$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u$	$k \frac{1+sT_d}{1+sT}$ $T_d \gg T$	$k(1+\frac{T_d - T}{T} e^{-\frac{t}{T}})$
PI	0	a_1	0	0	b_1	b_2	$a_1 \frac{dy}{dt} = b_1 \frac{du}{dt} + b_2 u$	$k \frac{1+sT_i}{sT_i}$	$k(1+\frac{t}{T_i})$
O	a_0	0	a_2	0	0	b_2	$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 y = b_2 u$	$k \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$k(1-\cos\omega_0 t)$

A táblázatban felsorolt tagok megnevezései: **P** (**arányos** tag, kimenőjele a bemenőjelével arányos, $k=b_2/a_2$ átviteli tényező), **I** (**integráló** tag, *kimenőjele a bemenőjelének idő szerinti integráljával arányos*, kimenőjelének a *sebessége* arányos a bemenőjellel, $k_i=b_2/a_1$ integrálási átviteli tényező), **D** (ideális **differenciáló** tag, *kimenőjele a bemenőjel differenciálhányadosával arányos*, $k_d=b_1/a_2$ differenciálási átviteli tényező, *nem realizálható*[8]), **T** (**egy tárolós arányos** tag, $k=b_2/a_2$ átviteli tényező, $T=a_1/a_2$ időállandó), $\mathbf{T}_\xi$ (**két tárolós lengő**[9] tag, $k=b_2/a_2$ átviteli tányező, $T=\sqrt{(a_0/a_2)}$ időállandó, $2\xi T=a_1/a_2$, $0<\xi<1$ csillapítási tényező), $\mathbf{PD}_\mathrm{i}$ (ideális arányos+differenciáló tag, $k=b_2/a_2$, $T_d=b_1/b_2$, *nem realizálható*), **PD** (realizálható **arányos+differenciáló** tag $k=b_2/a_2$, $T_d=b_1/b_2$, $T=a_1/a_2$), **PI** (**arányos+integráló** tag $k=b_1/a_1$, $T_i=b_1/b_2$), **0** (**oszcillátor**, lengő tag, $k=b_2/\sqrt{(a_0 a_2)}$, $\omega_0^2=a_2/a_0$). Az átmeneti függvényeket a differenciálegyenleteknek az $u(t)=\mathbf{1}(t)$ gerjesztésre, és zérus kezdeti feltételekre vett megoldásával, vagy a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ inverz *Laplace* transzformáció alkalmazásával lehet meghatározni. Ennek végrehajtása – a $\mathbf{T}_\xi$ és az **O** tag kivételével – igen egyszerű, miután elsőrendű rendszerekről van szó. A $\mathbf{T}_\xi$ és az **O** tagok $v(t)$ átmeneti függvényeinek meghatározására a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ inverz transzformáció eljárását használhatjuk.

A táblázatban szerepelnek a **P** ($a_0=a_1=b_0=b_1=0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $k=b_2/a_2$), és az **I** ($a_0=a_2=b_0=b_1=0$, $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $k_i=b_2/a_1=1$) **alaptagok** is, a **T**, $\mathbf{T}_\xi$, **PI**, **PD**, **O** tagok összetett tagok. Ezek soros, párhuzamos és visszacsatolt struktúráit tartalmazó kapcsolásaival tetszőleges bonyolultságú tag is előállítható. A **T** és $\mathbf{T}_\xi$ tagok soros kapcsolásaival a folyamat jelkésleltetéseit jellemezhetjük, A **PI** és **PD** tagok soros kapcsolásával gyakran a szabályozási algoritmust írjuk le. A táblázat $\mathbf{T}_\xi$ és **O** jelű tagjai másodrendűek, az **I**, **T**, **PI**, **PD** tagok elsőrendűek, a **P** tag algebrai tag.

2. Feladat

A táblázatban a különféle tagok rendszerjellemző függvényei közül a differenciálegyenletet (**LDE**), a $W(s)$ átviteli függvényt és a $v(t)$ átmeneti függvény képleteit adtuk meg. Ezek mellé számítsuk ki a tagok $w(t)$ súlyfüggvényeit és a $W(j\omega)$ frekvenciafüggvényeit is! Ábrán szemléltessük a táblázatban szereplő minden tagra a $W(s)$ pólus–zérus eloszlást, a $w(t)$, $v(t)$ időfüggvényeket és a $W(j\omega)$ frekvenciafüggvény *Nyquist* diagramját!

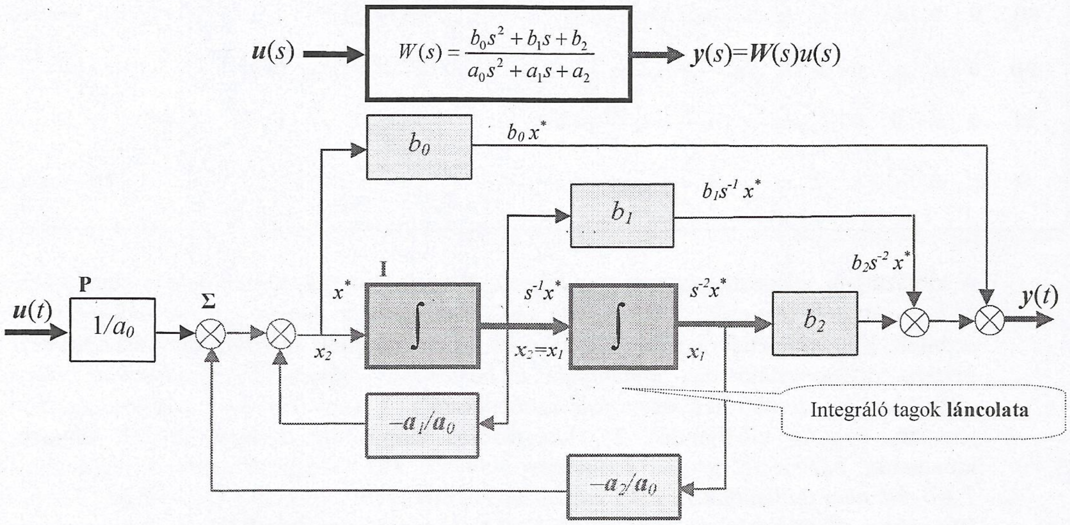
---

[8] A „nem realizálható" fogalom azt jelenti, hogy nem hozható létre olyan fizikailag megvalósítható szerkezet, áramkör, stb., aminek matematikai modellje az adott differenciálegyenlet lenne. A „nem realizálható" tag $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényének $G(s)$ számlálója a $H(s)$ nevezőjétől *magasabb* fokszámú polinom ($m>n$), ami azt jelentené, hogy a rendszer egységugrás **válasza** $\delta(t)$ *Dirac delta* függvényt tartalmazna, ami pedig fizikai objektum esetében nyilvánvalóan nem lehetséges.

[9] A két tárolós lengő tag ($\mathbf{T}_\xi$ tag) a szabályozástechnika fontos fogalma, mert a **zárt** szabályozási rendszer tulajdonságait – legalább is közelítőleg – ilyen taggal szeretnénk leírni. A $\mathbf{T}_\xi$ tag $W(s)$ átviteli függvényének pólusai ($0<\xi<1$, $T>0$ mellett) a $p_{1,2}=[-\xi \pm \sqrt{(1-\xi^2)}]/T$ **negatív valós részű konjugált komplex póluspár**.

3. Feladat

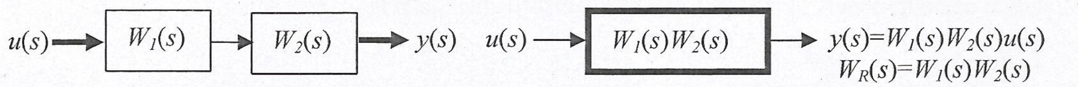
Adott a másodrendű tag átviteli függvénye és a közvetlen felbontás alapján lineáris alaptagokból előállított hatásvázlata (4. ábra). **1**. Bizonyítsuk be, hogy $a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$ paraméterek mellett a tag strukturálisan stabilis, és $u(t)=\mathbf{1}(t)$–re adott $v(t)$ válaszának állandósult értéke $b_2\neq 0$ mellett $y_0=b_2/a_2$! **2**. Adjuk meg a rendszer állapotegyenletét, az A állapotmátrixát és ennek sajátértékeit! **3**. Milyen következményekkel jár az átmeneti függvényre, ha $b_0=b_1=a_1=0$, $a_0>0$, $b_2>0$, $a_2>0$? **4**. Milyen következményekkel jár az átmeneti függvényre, ha $b_0=b_1=a_1=0$, $a_0>0$, $b_2>0$, $a_2<0$? **5**. Milyen következményekkel jár az átmeneti függvényre, ha $b_0=b_1=a_1=0$, $a_0>0$, $b_2>0$, $a_2=0$? **6**. Milyen következményekkel jár az átmeneti függvényre, ha $b_0=b_2=0$, $b_1>0, a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$? 7. Adjunk fizikai magyarázatott arra, hogy $a_1=0$, $a_2=0$ esetében a rendszer labilis! **8**. $b_0=b_1=a_1=a_2=0$, $a_0\neq 0$, $b_2\neq 0$ esetére adjuk meg a tag $v(t)$ átmeneti függvényét és ennek grafikonját! **9**. Az a_i, b_i paraméterek mindegyike pozitív. Miben különböznek a tag $v(t)$ átmeneti függvényei, ha $a_1^2>4a_0a_2$, ha $a_1^2=4a_0a_2$, ha $a_1^2<4a_0a_2$? **10**. Az a_i, b_i paraméterek tetszőleges, de nem zérus paraméterek. Készítsen MATLAB programot a $w(t)$ súlyfüggvény és a $v(t)$ átmeneti függvény meghatározására!



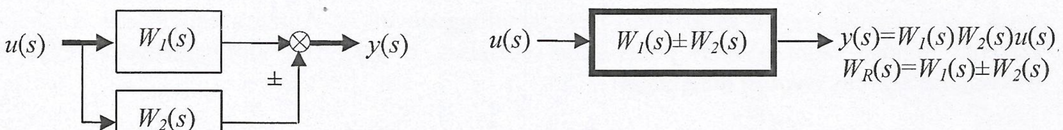
4. ábra

Ismételten és nyomatékosan rögzítsük, hogy a *Laplace* transzformáción alapuló analízis és szintézis kizárólag az állandó együtthatójú lineáris rendszerek esetében alkalmazható. Ebből az is következik, hogy az átviteli függvény és az átviteli mátrix segítségével történő analízis is olyan hatásvázlat–struktúrák esetében használható, amelyekben minden jelátvivő tag lineáris, és ezek egymással soros–, párhuzamos–, és visszacsatolást tartalmazó alapkapcsolásait tartalmazzák. Ezek az alapkapcsolások:

Tagok **soros** kapcsolása



Tagok **párhuzamos** kapcsolása



Tagok **visszacsatolása**