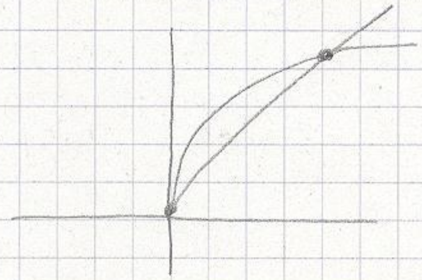
1. feladat

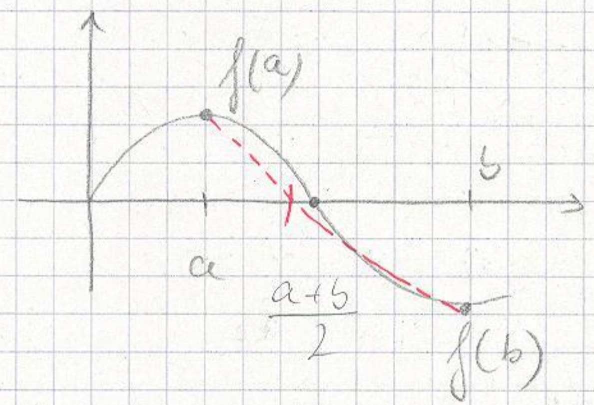
$2 \sin x = x$ — ezt az egyenl. csak közelítőleg tudom megoldani

$T(x) = 2 \sin x$ — fixponttétel



① iterációs megoldás

② $2 \sin x - x$ függvénynek keresem a zérushelyét



a és b között minden értéket felvesz → és ezekben a pont. ellentétes előjelű

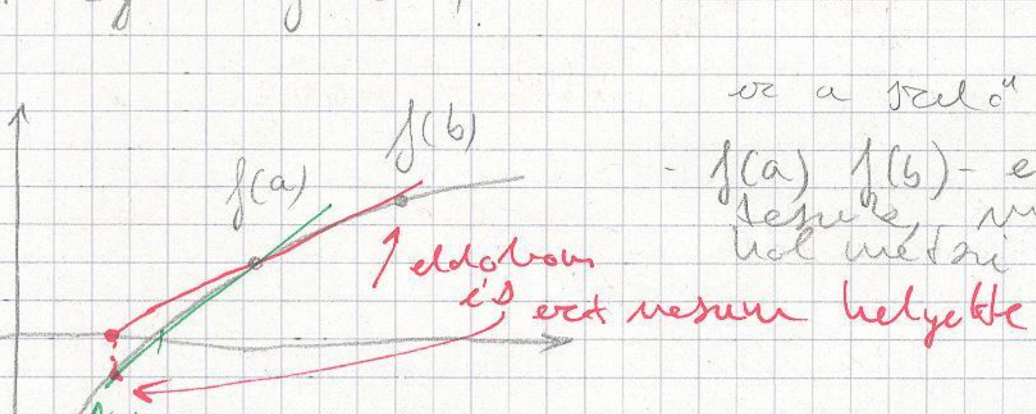
↳ felezem az intervallumot és itt vizsg. (a hosszát és felezem)

majd kiszámolom a függvényértéket

③ – megnézzük az f(a)-ban és f(b)-ben a fv. értéket, összekötöm őket, ahol metszi az egyenest, azzal az ért. helyett. [illegible]

/ Regula-falsi? /

④



ez a szelő módszer

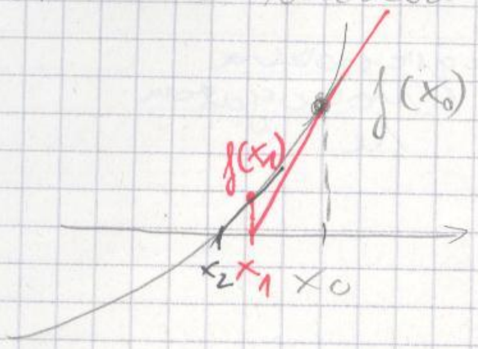
– f(a) f(b)-e egyenest tesznek, megnézem hol metszi az x tengelyt.

↓

azzal az értékkel kiszámolom f(c) értékét

A szelő módszer egy jó numerikus eljárás

Newton módszer



- érintőt húzok $f(x_0)$-ba ahol ez a fv. metszi az x tengelyt az lesz x_1, és $f(x_1)$ et kiszám. utána
  ↳ innen ismét érintő...

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- 1 kezdőpontot kell megadni, és kell eljárást
- ha nem a zérushely közeléből indítom, nagyon elmehet különbségbe
  (általában gyorsan konvergál

másodrendben konvergens: az eljárás olyan hogy a gyök közelében az értékes jegyek száma duplázódik.

Módosított Newton módszer
- a deriváltat nem számolom ki újra hanem az eredeti → a péld. az x_0-hoz tart. egyenes meredekségével számolok

→ ez csak elsőrendben konvergens (a pontos jegyek száma mindig ugyanannyival nő)

a szelő módszernél 1,6

Kvázi Newton eljárás

A Newton eljárás úgy módosítva, hogy:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ezzel megszorozva vonogatom le

a függvénynek és a deriv. is zérushelye akkor kétszeres gyök

- ha 2x -es gyöknél α helyére 2-t írva másodrendben fog konvergálni, $\alpha = 1$ esetén sima Newton módszer, de 2x gyök esetében csak elsőrendben konvergál

Adaptív Newton eljárás:

- α kitalálása az előző két iteráció alapján, és az α-t is javítgatja

valós vált. fv. 0 keresési módszerei voltak a fentiek

valós változós valós értékű fv.

2. feladat

- diódakarakterisztika $\alpha, \beta, \mu, \gamma$ konstansok

$$i = \alpha\left(e^{\frac{u}{\beta}} - 1\right) - \mu \cdot u\,(u - \gamma)$$

i-u karakt.

- sorbakapcs. egy ellenáll. és feszforrása között milyen lesz a karakterisztikája

$$f = i \cdot R + u - T$$

feszforrás amit rátesz

- a függvény zérushelyét kell meghatároznom

(mivel lapos, a Newton közelít lassan

Vektorértékű fv. - erre szeretnék hasonló módszert csinálni

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Banach-féle fixponttétel!

3. feladat

$$x \to \frac{\left(\cos\frac{x}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)}{2}$$

- ez a függvény kontrakció-e, és milyen intervallumon

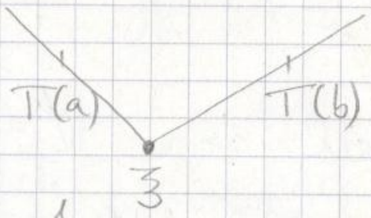
$$\frac{T(b) - T(a)}{b - a}$$ = hányadosok korlátosságát kell megvizsgálni abszol. értékben

Lagrange középértéktétel szerint

valami közbenső helyen kell

$$\left|\frac{T(b) - T(a)}{b - a}\right| = |T'(\xi)|$$

abszolútért. deriv.



$$= \left|-\frac{1}{4}\sin\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{3}{4}$$

Lipschitz-konstans

az $\frac{1}{2}$-ed pontban van egy törés, amit 2 félé kell bontani és ott megcsin. a becslést

Lipschitz fv. lehet alkalmazni a Banach féle fixponttételt

4. feladat

olyan leképezés mondása:

a, T^2 kontrakció, de T leképezés nem

b,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; |f'(x)| < 1$

minden x-re

de nincs fixpontja

5. feladat

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ | $2x_1 + x_2 = 1$

$(0,1)$ | $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{2}$

$T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

$x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$

$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ez a leképezés

$T: \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Hogy valósíth. meg, hogy egy vektorvált. fv. kontrakció-e

Tétel Legyen K konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, és tegyük fel hogy f $\mathbb{R}^n$-beli értékű fv., K minden pont van differenciálható, és $\|f'\| \leq B$

Akkor f Lipschitz függvény és $\mathrm{Lip}(f) \leq B$

$\|f'\|$: derivált mátrix normája

Minden $\varepsilon > 0$ -hoz és $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris leképezéshez létezik egy olyan norma $\mathbb{K}^n$-en, hogy $\|A\| < \varrho(A) + \varepsilon$

spektrálsugár

4. feladat

b, megoldása

$f(x) = x + 2 - \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = 1 - \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}$

ez biztos hogy ≤ 1

$0 \leq$ a derivált < 1

a fixpontot így vizsgáljuk:

$f(x) = x$ az az x amelyikre ez teljesül az a fixpont

- az egyenletünknek nincs fixpontja

akkor nincs fixpont ha a teret a leképezés nem saját magába képezi

↳ ez nem teljesül ebben az esetben

2011.11.02

- vektoregyenletrendszer

$F(x) = 0$ $\qquad$ $x = x$ egyenl. kivonom

$$x = x - F(x) =: T(x)$$

ennek a transzform. a fixpontját kell megkeresnem

- másik lehetőség $\lambda F(x) = 0$ -t vonok le

$$T(x) = x - \lambda F(x)$$

relaxáció

- lehet h. λ-t ügyesen választva kontrakció lesz

Nem lineáris relaxáció: $\quad G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$G(0) = 0$, és G körül van

F invertálható és könnyű számolni

G kölcsönösen egyértelmű

$G(F(x)) = 0$ egyenlet megoldása

$$x = x - G(F(x))$$

ez majdnem az identikus

konstanssal való ~~[illegible]~~ szorz. helyett egy fv.

Módosított Newton:

$G = F'(x_0)^{-1}$ (lineáris)

F' a 0 helyen inverze

$$x - F'(x_0)^{-1}(F(x))$$

→ ezt kell iterálnom

Newton módszer:

G függ az x-től is, nem a 0 helyen veszem

$$x - F'(x)^{-1}(F(x)) = T(x)$$

x-től függő $T(x)$ leképezést alkalmazok

$x = x$-re H fv.-t alkalmazom

$$H(x) = H(x)$$

$$H(x) = \underbrace{H(x)}_{} - F(x)$$

H-t úgy kell megválasztani hogy könnyen kiszámolható legyen és könnyű számolni (?)

$F(x)$-hez közelítőt érdemes választani

$$T(x) = H^{-1}\big(H(x) - F(x)\big)$$

- ez még a relaxációval kiegészíthető

Ezekkel a módszerekkel a nemlin. egy. megold. visszavezethető az előző gyakori megoldási módsz.

Lineáris iterációknál a konvergálás gyorsítható:

Aitken Δ^2-módszer

$$x - x_n \approx c q^n \qquad x \text{ az } x_n\text{-től } cq^n\text{-el tér el}$$

$$x \approx x_n + cq^n$$

$$x \approx x_{n+1} + cq^{n+1}$$

$$x \approx x_{n+2} + cq^{n+2}$$

$$\underbrace{\Delta x_n}_{\text{jelölés}} = x_{n+1} - x_n \approx c\, q^n (q-1)$$

$$\Delta x_{n+1} := x_{n+2} - x_{n+1} \approx c\, q^{n+1} (q-1)$$

$$\Delta^2 x_n := \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \approx c\, q^n (q-1)^2$$

$$\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \approx c\, q^n$$ így közelítőleg megkaptuk ezt a hiányzó tagot

$$x \approx x_n + \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

- egy elsőrendű iterációt feljavítja másodrendűvé
- x-re kapunk egy jobb becslést
- amikor az eljárás lineáris, ez az eljárás segít

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{x} \\ x_0 &= 1 \end{aligned}\right\}$$ ha ezt kezdem iterálni, akkor az nem lenne

→ még előtte is konverg. csinál a Δ^2 módszer.

Minimumfeladatok

- approximáció

f ismeretlen fv., és ezt akarom közelíteni

$f(x_0), f(x_1) \dots, f(x_n)$ helyeken ismert, mért ért.

$$f : H \to \mathbb{R}^n$$

$g(x, a_1, \ldots a_m)$ függvényseregből

↑ ↑ keressük $a_1 \ldots a_m$-et

paraméterek amelyekre a

$g(x, a_1 \ldots a_m)$ legjobban közelíti f-et

① ⟶ a H halm. mindenütt köz. a legjobban

② ⟶

③ ⟶

① Egyenletes közelítés
→ ezzel nem foglalkozunk

② Interpoláció

$g(x_i, a_1 \ldots a_m) = f(x_i) \quad i = 1 \ldots k$

az x_i helyen $a_1 \ldots a_m$ param. mellett
egyezzen meg $f(x_i)$ értékével

- ez egy egyenletrendszer $a_1 \ldots a_m$-re

③ Legkisebb négyzetes közelítés
- az interpol. a mért értékek hibái
is benne vannak az egyenletrendsz.

$$MIN \Leftarrow \Phi(a_1 \ldots a_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i \| f(x_i) - g(x_i, a_1 \ldots a_m) \|^2$$

ezt akarom minimaliz.

súlyok

ha valós akkor a négyzet. adom össze
ha vektor a norma négyzeteiket

$0 < \frac{1}{w_i}$ az $f(x_i)$ hibájával

legyen arányos

- ha nagy az $f(x_i)$ hibája kis súllyal veszem figyelembe és fordítva

- a legk. négyz. közelítés egy minimum feladatra vezet

Newton: $F(x) = 0$

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

ha Taylor sorba fejtk., így írhatom fel

$$0 = F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)\,\Delta x_0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0$$

- minden lép egy lin egyenletr. kell megoldani, illetve ha sok ismeretlen sok deriv. kell kiszámolni

Kvázi Newton módszer

$$f'(x_n)\,\Delta x_n) = \underbrace{-\,f(x_n)}$$

a módsz. ezt helyettesítem

$$A_n \Delta x_n = -\lambda_n f(x_n)$$

differenciálhányados (közelítési hiba)

relaxációs paraméter

a függvényért. kell kiszámolnom, a deriv. helyett

Broyden módszer

$$\lambda_n = 1 \quad , \quad A_0 = f'(x_0)$$

$$A_{n+1}\,\Delta x_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = \Delta f(x_n)$$

$$A_{n+1} - A_n = \Delta A_n \qquad \frac{[\Delta f(x_n) - A_n \Delta x_n][\Delta x_n]^T}{|\Delta x_n|^2}$$

ennek a mátrixa (oszlopmátrix)

- a konvergencia a lineár jobb lesz, de az nem teljesül, hogy A_n mátrix tart a deriváltmátrixhoz

$$\left(A_n \not\to f'(x)\right)$$

A_{n+1}^{-1} számítása:

$$\underbrace{A_{n+1}^{-1} - A_n^{-1}}_{\text{kettő inverz különbsége}} = \Delta A_n^{-1} \quad \text{mátrixa}$$

$$\frac{[\Delta x_n - A_n^{-1}\Delta f(x_n)][\Delta x_n]^T[A_n^{-1}]}{\langle x_n, A_n^{-1}\Delta f(x_n)\rangle}$$

belső szorzatok

- ez kiküszöböli a Newton módszer derivált számításait

$\underbrace{\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}}$ minimum keresése

olyan fv. hogy $\mathbb{R}^k$ részhalmazát $\mathbb{R}$-be képezi

$\Phi'(x) = 0$ ez most a grad. adja meg (többváltozós valós értékű fv.)

$f(x) = 0, \quad f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

ennek a megoldásai:

$\|f(x)\|_2^2 \to \min$ — így diff. fv. — a norma nem differenciálh. fv.

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i \left(f_i(x)\right)^2$$

pozitív súlyok

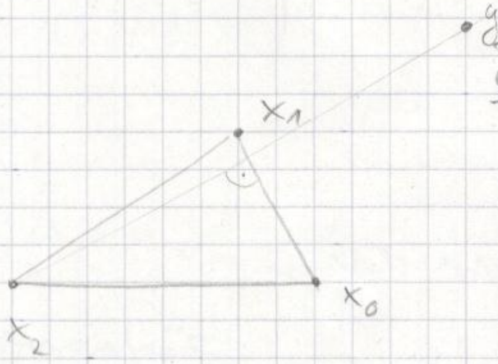
Nelder - Mead módszer

$\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ennek a minim

$k = 2$ esetben

z

$x_0, x_1, \dots, x_k$



$\Phi(x_0) \le \Phi(x_1) \le \dots \le \Phi(x_k)$

$\Phi(x_0) \le \Phi(y) \le \Phi(x_{k-1})$

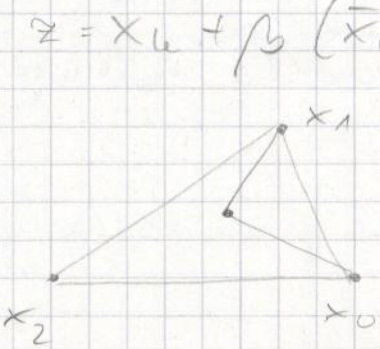
$\Phi(y) < \Phi(x_0)$ (z pont kisz., továbbra ugyan az indulás)

ha még

$y = \bar{x}_k + \lambda(\bar{x}_k - x_k) \quad \lambda = 1$

x_k kivételével a többi átlaga

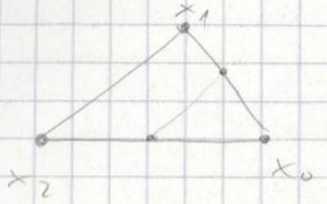
$z = \bar{x}_k + \beta(\bar{x}_k - x_k)$



ha $\Phi(y) > \Phi(k_{-1})$, ebben az esetben összeh. a háromszöget

$v = x_k + \gamma(\bar{x}_k - x_k)$ $\gamma = \frac{1}{2}$

$\Phi(v) < \Phi(x_k)$, ha ez nem teljesül



x_j helyett $x_0 + \delta(x_j - x_0)$ az új
$j \neq 0$

megállás: $\frac{1}{k} \sum_i \left(\Phi(x_i) - \bar{\Phi}\right)^2 < \varepsilon$

Globális minimum keresés nehezebb feladat, arra nincsenek jó módszerek.

Iránymenti csökkentés:

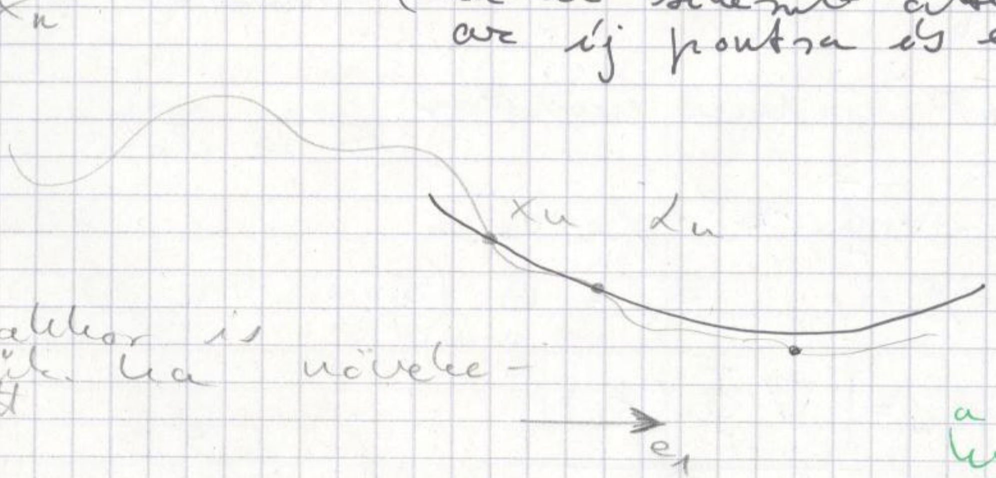
$\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

x_n e_n irány, hogy erre a fv. csökkenjen

$\Delta x_n = \lambda_n e_n$ $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$

Ciklikus csökkentés

- első bázisv. irány. próbálom csökkenteni (ha ez sikerült áttérek az új pontra és e_2 irány.)



- ez akkor is műk. ha növekedett

parabola illesztés
↓
ennek a minimum kiszám. és oda megyek

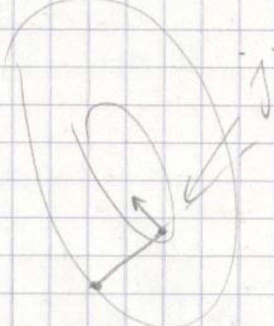
$e_n = -\nabla \Phi(x_n)$

azt választom amelyik a
legmeredekebben csökken
(a gradiens irány. ellent. mentén

Konjug. gradiens módszer

$e_n = -\nabla \Phi(x_n) + \beta_{n-1} e_{n-1}$

- a szögletességgel küszöböli ki,
grad. módsz. nagyon szögl. meggyűl



jó lenne itt továbbmenni

2011. 11. 09.

A gyűjtés és a minimumkeresés között van kapcsolat
Irány menti csökkentés módszer

$x_n \qquad x_n + \lambda_n e_n$

$e_n = -\nabla \Phi(x_n)$ gradiensmódszer

Konjugált gradiens módszer

ez az előző irány

$e_n = -\nabla \Phi(x_n) + \beta_n e_{n-1}$

a, $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $e_{-1} = 0$ (kezdetben 0-nak vál)

$$\beta_n = \frac{|\nabla \Phi(x_n)|^2}{|\nabla \Phi(x_{n-1})|^2} \quad \text{ha } n > 0$$

második választunk:

$$\beta_n = \frac{\langle \nabla \Phi(x_n), \nabla \Phi(x_n) - \nabla \Phi(x_{n-1}) \rangle}{|\nabla \Phi(x_{n-1})|^2}$$

- ezekkel a β_n választással két konjug. gradiens módszerhez jutottunk
- a minim. módszerektől biztos konvergenciát várhatok, de sebességet nem
  - ↦ ha közel vagyok érdemes áttérni gyorsabbra

Megoldástól távol minimalizálást alkalmazzunk, a mego. közel pl.: Newton módszer, Broyden módszer

$f(x) = 0$ $\quad f'(x_n) \approx A_n$ mátrix számolása

$\Phi' = f$ $\quad f = \Phi''$ → ez a második deriv. szimmetr. mátrix (érdemes A_n-t is úgy választani)

van egy ilyen változ. a Broyden módsz.

Kvázi Newton módszerek minimalizálásra

Broyden módszer, de A_n szimmetrikus

– " – , de A_n^{-1}-et számol, és ez szimmetrikus

mego. távol ↗ $\quad$ → mego. közel

A minim. és az egyenletrendszermego. egym. visszavezethető

f fv. néha polinom, és f gyökeit keressük

$f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ $\quad |f|$ minimalizálása

vagy

f-re alkalm. a Newton módszert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ csak komplexben

(magasfokú komplex polin. gyökök megh. is alkalmazható)

- komplexbe jobb számolni mert kevésbé valószínű, hogy közelebb kerülök egy gyökhöz, ahol a derivált nulla, és nullával nem osztok.

Eddigi kérdések: kontrakció-e valamilyen intervallumon

Tyhonov

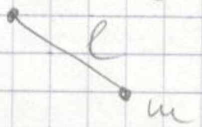
$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

c, a valós paraméter

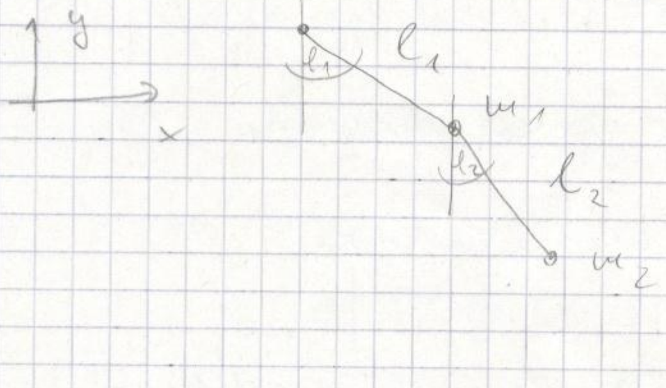
határozzuk meg x_σ megoldását a Tyhonov regulariz. kapcsolat

$C = 1$ $\qquad T = I_{\mathbb{R}^2}$ (egység), $A_\sigma = A$

1, Határozzuk meg a matematikai síkinga mozgásegyenletét



2, Kettősinga mozgásegyenlete

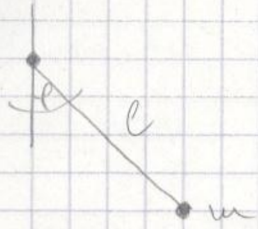


3, Euler-Lagrange egyenletek felírása

$$L = tx + x'^2 + \cos(x x'') \qquad \frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad m \cdot g \cdot h$$

1 feladat

mozgási energia - helyzeti



helyzeti energia $+ l \cdot \cos\varphi\, mg$

de ez mindig negatív

$$\frac{1}{2} m (\dot{\varphi} l)^2 + l \cdot \cos\varphi\, mg = L$$ ez a Lagrange fv.

$\int L \to \min$

$L_x \equiv L_\varphi \to$ L φ szerinti deriv.

$L_{x'} \equiv L_{\varphi'} \to$ L $\dot{\varphi}$ szerinti deriv.

$$L_x - \frac{d}{dt}(L_{x'} \dots) = 0$$

L-et differenciáljuk φ változó szerint, majd $\dot{\varphi}$ szerint

$$-l m \cdot g \cdot \sin\varphi - \frac{d}{dt}(m l^2 \dot{\varphi}) =$$

$$= -l m \cdot g \cdot \sin\varphi - m l^2 \ddot{\varphi} = 0 \quad / l$$

$$(-g \cdot \sin\varphi - l \ddot{\varphi}) = 0$$

2. feladat

$$g \cdot m_1 l_1 \cos\varphi_1 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{\varphi}_1 l_1)^2 +$$

$$+ m_2 g (l_2 \cos\varphi_2 + l_1 \cos\varphi_1) + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 = L$$

akkor pontosh. veszi a mozg. energiát

$x^{(t)}$ koordináta: $l_1 \cdot \sin(\varphi_1^{(t)}) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2^{(t)})$

$y: -l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2)$

$\dot{x} = l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 \cdot \cos(\varphi_2)\, \dot{\varphi}_2$

$\dot{y} = l_1 \sin(\varphi_1)\, \dot{\varphi}_1 + l_2 \cdot \sin(\varphi_2)\, \dot{\varphi}_2$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ sebesség négyzete

φ_1 és φ_2 lesz az által koordináta

L-nek két koordinátája lesz

$$L_{\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}} = \begin{matrix} -\sin(\varphi_1) g \cdot m_1 \cdot l_1 - m_2 \cdot g\, l_2 \cdot \sin(\varphi_1) \; (\dots) \circledast \\ \\ \end{matrix}$$

$$L_{\varphi_1} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\varphi}_1} = 0$$

- 2 ismeretlen fv.

$$L_{\varphi_2} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\varphi}_2} = 0$$

$\uparrow$

L $\dot{\varphi}_2$ szerinti deriváltja

$\circledast$

$$(\dots) - \frac{d}{dt}\left(m_1 \cdot l_1^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 0$$

3. feladat

$L = t\,x + x'^2 + \cos(x\,x'')$

$$\boxed{0 = L_x - \frac{d}{dt}\left(L_{x'} - \frac{d}{dt}\left(L_{x''}\right.\right.}$$

- 1 d.e., mert 1 db általánosított koordináta

$$\underbrace{t - x'' \sin(x\,x'')}_{L_x} - \frac{d}{dt}\left(2x' - \frac{d}{dt}\left(-\sin(x\,x'')\right)\right) = 0$$

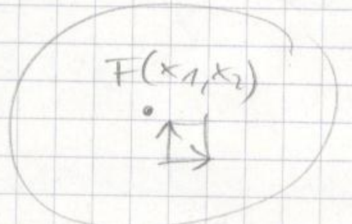
$$-\left(x' \cdot \sin(x x'') + x\cos(x x'')\left(x'x'' + x x'\right)\right)$$

ezt kell kivonni az x'' - ből

1db - 4 edrendű d. e

(helyfüggő)

4, gumi ki van feszítve, inhomogén, izotróp, áll, ennek kell felírni az erővel ami meg van terhelve



$$F(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$u(x_1, x_2)$ kitérés

a megny. felületett energia arányos a rugalmassággal

u_{x_1} u_{x_2} deriv. lineáris közelítés alkalmazása

---

rugalmas visszatérítő erő, ami arányos a kitéréssel

+ a peremen nem rögzített, külső erő hat, v rugalmas erők

5, inhomogén rezgőhúr differenciálegyenlete

megnyúlás: u_x -ben lineáris közelítés

rezgő membrán d.e-e

minimálfelületek d.e.-e

u két v. fv

$$L = x u_y - y u_x + u^2$$

$$L = x u_x^2 + y u_y^2 + 3u^2 - u u_x u_{xx}$$

E. L. d. e.

4. feladat

$$L = x u_x^2 + y u_y^2 + 3u^2 - u u_x u_{xx}$$

$$\sum_{|\alpha| \le n} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(L_{\partial^\alpha u} \right) = 0$$

$\boxed{\alpha = \overset{x\ y}{(0, 0)}}$ $\qquad L_u$ — u szerinti derivált

x szerinti derivált

$\boxed{\alpha = 1, 0}$ $\qquad - \partial_x L_{u_x}$

$\boxed{\alpha = 0, 1}$ $\qquad - \partial_y L_{u_y}$

$\boxed{\alpha = 2, 0}$ $\qquad \partial_x^2 L_{u_{xx}}$

$\boxed{\alpha = 0, 2}$ $\qquad \partial_y^2 L_{u_{yy}}$

$\boxed{\alpha = 1, 1}$ $\qquad \partial_{xy}^2 L_{u_{xy}}$

ezek összege az Euler-Lagrange differenciálegyenlet

$$L_u = \underbrace{6u - u_x u_{xx}}$$

$$- \partial_x \left(\underbrace{2x u_x - u u_{xx}} \right)$$

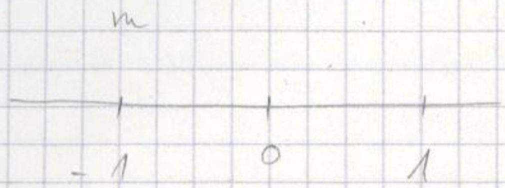
x szerint lediff. úgy hogy u x-től és y-tól függ

$$\left(2u_x + 2x u_{xx} - u_x u_{xx} - u u_{xxx} \right)$$

2011. 11. 10

Irányítási feladatok

1., - 1-ben elindítok egy tömegpontot és 1-ben megállítom



$|a| \leq 1$

2., holdraszállás
$$h''(t) = -g + w(t)$$
$$0 \leq w(t) \leq a$$

g - gravitáció erőtér

minimális üzemanyag és fogy. alkalmaz

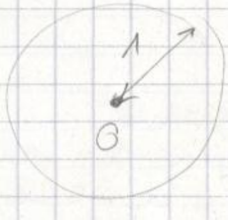
3., visszajut a holdról

Fourier transzformáció

- Számoljuk ki a fourier-tr. annak a fv-nek $\mathbb{R}$-en $[-1, 1]$

- $e^{-\pi x^2}$ (differenciálegy. levezetése, és megn. hogy a differenciál milyen four. tr. tesz eleget)

- $\mathbb{R}^2$-n 1 sugarú körlap karakt. fv.-ének fourier tr.



1 feladat

$H = p\,f - \lambda L$ ahol $\lambda = 1$

- először a mozgásegyenletek felírása
- a gyorsulás a vezérlési fv. $a(t) = w(t)$

$$x(0) = -1 \quad v = x' = v_0 + \int_{t_0}^{t} w\,dt$$

$$x = -1 + \int_{t_0}^{t} v \, dt \qquad v'(0) = v_0 = 0$$

$$\int_{t_0}^{t} L(t, x(t), v(t)) \, dt \longrightarrow \min$$

$L = 1$ mert

$$\int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t_1 - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{t_0} = t_1$$

és mi a t_1-et akarjuk minimalizálni

$v(t_1) = 0$

$x(t_1) = 1$

$\vec{x} = (v, x)$

p – időtől függő sorvektor, segéd dolog

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f_1 &= v \\ f_2 &= v \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x, v) \, dt \quad \text{(vezérlési egyenlet)}$$

$$p_1 f_1 + p_2 f_2 - \lambda \cdot 1 = H$$

$p_1 v + p_2 v - \lambda = H$ → ennek maxim kell legyen a megfelelő vezérlése és p_1, p_2-re

t_1 pontban vezessem a határf.

$$\vec{g}(t_1, \vec{x}(t_1)) = 0$$

milyen sebesség menyjek

$v_1(t_1) = 0$

$x_1(t_1) = 1$

$g_1(v, x) = v$ $\quad$ g_1 a (v, x) helyen 0 kell legyen

$g_2(v, x) = x - 1$ $\quad$ hol legyek $\quad$ g_2 a (v, x) helyen 0 kell legyen

$p' = -H_x$ $\quad x' = H_p$ → ez nem ad semmi újat, mert ezek a ver. egyenl. csak differenciále alakban

$p_0 = H$

$p_0' = H_t$

$p_1' = p_2$

$p_2' = 0$ $\quad v' = w$ $\quad p_0' = 0$

$x' = v$

H explicite nem függ p-től

transzverzalitási feltételek felírása

$\vec{p}(t_1) = -\vec{\lambda}\ \vec{g}_{\vec{x}}(t_1, \vec{x}(t))$

vektor értékűek

$p_1(t_1) = -\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad p_2(t_2) = -\lambda_2$

$p_0(t_1) = 0$

itt a g-t kell $\vec{x}$ szer. $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

$p_0(t_1) = \vec{\lambda}\ \vec{g}_t(t_1, \vec{x}(t))$

a g függhet a t-től is

$g(t, v, x)$

$p_2(t) = -\lambda_2$ $\quad C_0 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$p_1(t) = -\lambda_2 t + C_0$ $\quad C_0 = -\lambda_1 + \lambda_2 t_1$

$\hookrightarrow p_1(t) = -\lambda_2 t - \lambda_1 + \lambda_2 t_1 = -\lambda_2(t - t_1) - \lambda_1$

$p_0(t) = 0$

a, mi van ha λ_1 és λ_2 arcon 0

akkor a x-is 0 lenne, nem lehet mindkettő 0

$$p_1(t)w(t)+p_2(t)v(t)-\lambda = \max_{w^*\in U} p_1(t)w^* + p_2(t)v(t)-1$$

jelen esetben a $[-1,1]$ halm. végen

ha $p_1(t)=1$ akkor $w^*=1$, ha neg akkor $w^*=-1$ ekkor max

$w(t)=1$, ha $p_1(t)>0$

$w(t)=-1$, ha $p_1(t)<0$

$p_1(t)$, a t^* időpontban előjelet vált, de csak 1x, mert lineáris

- fő célunk a vezérlés megtalálása

2 feladat

$$\ddot{h} = -g + w(t)$$

$$v = \int_{t_0}^{t} (-g + w(t))\,dt$$ → integrál alak elő, mert az alatta lévő f-eket keressük

$$h = x = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$f = \begin{pmatrix} g + w(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} w(t)\,dt$$ → ez a költség fv. amit minimalizálni akarok

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 - \lambda w$$

$L = w$ $\lambda = 1$-et írunk

- úgy tekintj. hogy f függ x, t, w-től

$$H = p_1(g + w) + p_2 v - w$$

$u(t_1) = 0$
$v(t_1) = 0$ } leszállítunk

$g_1 = u$
$g_2 = v$

$$g' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p(t_1) = -\lambda$ → vektoregyenlettünk lett beleintézni

$p_1(t_1) = -\lambda_1$

$p_2(t_1) = -\lambda_2$

$p_0(t_1) = 0$

p-k-ra a differenciálegyenletek

$p' = -H_x = -\begin{pmatrix} p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ – a p_2 konstans lesz a p_1 meg lineáris

↓

$x' = H_p = f$

vmi feladatban előre tudjuk a maximumhelyet

$p_2 = -\lambda_2$

$p_1 = -\lambda_2(t - t_1) - \lambda_1$

w-nek olyannak kell lennie amelyre a H pontosan W-ben maximális

$H = p_1(g + w) + p_2 v - w$ → max

$H = (p_1 - 1) w + p_1 g + p_2 v$

ha p_1 pozitív akkor $w = a$

ha p_1 negatív $w = 0$

$(p_1 - 1)$ lineáris, egy darabig szabadon esünk, majd teljes erővel fékezek

Bang-bang elv: a vezérlés mindig a vezérlési tartomány szélén mozog

3. feladat

$[-1,1]$ fourier-transzformáltja

$$\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x) \cdot e^{-2\pi i t \cdot x}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-2\pi i t x}\, dx = \left[-\frac{1}{2\pi i t} e^{-2\pi i t x}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i t}\left(e^{-2\pi i t} - e^{2\pi i t}\right) =$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2j}$$

$$= + \frac{1}{\cancel{2}\pi t} \cancel{2} \sin(2\pi t)$$

4. feladat

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\{|x|<1\}} e^{-2\pi i \langle t, x\rangle} =$$

skal. szorzat

az a halm. amin van

áttérünk polárkoordinátákra

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, e^{-2\pi i (t_1 r \cos x + t_2 r \sin x)}\, dx\, dr$$

Ezzel a gyak. nagyjából a ZH

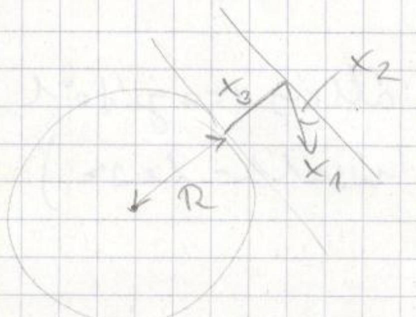
Visszatérés a Holdról

x_1 - sebesség

x_2 - hajlásszög a pillanatnyi vízszinteshez

x_3 - magasság (R földsugár egységekben)

feltesszük h. a föld tökéletes gömb



w - a fékezés (fékezőszárnyak állássz.)

ettől függ mekkora az ellenállás és emelőerő

a levegő sűrűsége: $\underbrace{\rho = \rho_0 e^{-\beta R x_3}}_{\text{barometrikus magasságformula}}$

$x_1(t_0) = 10{,}8 \frac{km}{s}$

$x_2(t_0) = 0{,}015\pi$

$x_3(t_0) = 120 km / R$

a célunk, hogy $x_1(t_1) = 8{,}1 \frac{km}{s}$

körpálya. akarok rep. $\leftarrow$ $x_2(t_1) = 0$

$x_3(t_1) = 75 \frac{km}{R}$

a vezérlési feltételeket d.e. írják le:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, w)$$

a g nem állandó, függ a mag.

$$f_1 = -\frac{F \rho x_1^2}{2} c_1(w) - \frac{g \cdot \sin x_2}{(1+x_3)^2}$$

$$f_2 = \frac{F \rho x_1}{2} c_2(w) + \frac{x_1 \cdot \cos(x_2)}{R \cdot (1+x_3)} - \frac{g \cdot \cos(x_2)}{x_1 (1+x_3)^2}$$

x_1-el le van osztva

$$f_3 = \frac{x_1 \sin x_2}{R}$$

magasság változása

Az F az űrhajónak a $\frac{\text{leeresztett metszet}}{\text{tömeg}}$-e

$$c_1(w) = 1{,}174 - 0{,}9\cos(w)$$

fékezés a féklapok állásszögétől függően ($\cos(w)$ kisebb lesz)

$$c_2(w) = 0{,}6 \cdot \sin(w)$$

aerodinamikus ellenállás, emelőerő (nem SI-ben vannak adva)

A felmelegedést akarjuk minimalizálni, a felmelegedésre egy tapasztalati képlet van

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^3 \sqrt{S} \rightarrow \text{minimaliz kell}$$

Az űrhajósok mindent kibírnak, jelenleg nincs vezérlési korlátozás

Optim. vez. meghat.

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i f_i(x_1, x_2, x_3) - \underbrace{x_1^3 \sqrt{S}}_{L;\ \lambda = 1}$$

maximális, tehát $H_w = 0$

w szerinti deriváltja (nincs vezérl. korlát.

$$H_w = \mu_1 \cdot \frac{F \cdot 3x_1^2}{2} c_1'(w) + \mu_2 \frac{F\, 3 \cdot x_1}{2} \cdot c_2'(w) \qquad (f_3 \text{ nem függ } w\text{-től})$$

ezt megoldva megvan a vezérlés

$$\mu_1 \cdot x_1 \cdot 0{,}9 \cdot \sin w = \mu_2 \cdot 0{,}6 \cdot \cos w$$

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\mu_2 \cdot 0{,}6}{0{,}9 \cdot \mu_1 x_1} = \frac{2\mu_2}{3\mu_1 x_1}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 w = 1 + \frac{4\mu_2^2}{9\mu_1^2} = \frac{9\mu_1^2 x_1^2 + 4\mu_2^2}{9\mu_1^2 x_1^2}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{\cos^2 w}$$ – veszem mindkét old. reciprokát és gyökét vonok

$$\Rightarrow \cos^2 w = \frac{9\mu_1^2 x_1^2}{4\mu_2^2 + 9\mu_1^2 x_1^2}$$

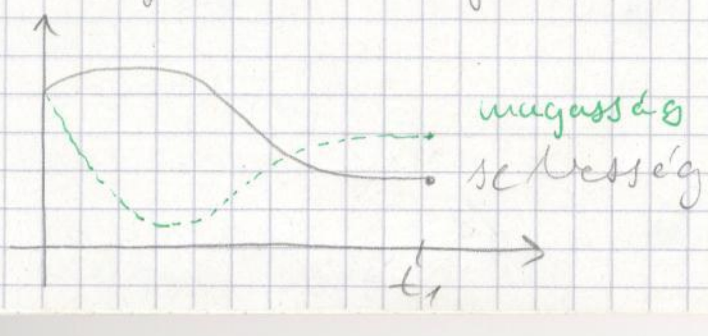
$$\gamma^2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos w &= \frac{\pm 3\mu_1 x_1}{\gamma} \\ \sin w &= \frac{\pm 2\mu_2}{\gamma} \end{aligned}\right\}$$ mindkét helyen mínuszt kell választani !
(H-ba visszaírva ez jön ki)

ezt nem magyarázta

6 db differenciálegyenlet +
7 feltétel, ezeket megoldjuk
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, x_1, x_2, x_3, t_1$

A megoldást a tanár elmondja:



$t_1 = 224{,}3$ sec-os manőver

Fourier transzformációs feladat

Határozzuk meg az alábbi fv. Fourier tr.

$$f(x) = e^{-\pi x^2} \qquad \hat{f} = ?$$

kezdeti feltétel

$$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -2\pi x f(x) \quad \text{ez a d.e.}$$

→ a fourier tr is egyenlőek

$$\hat{f'}(x) = \left(-2\pi x f(x)\right)^{\wedge}$$

$$\hat{f}' = 2\pi i x \hat{f} = \left(-2\pi x f(x)\right)^{\wedge} = \underbrace{(-i)\left(2\pi i x f(x)\right)^{\wedge}}_{(-i)\,\hat{f}'}$$

ide be akarok csempészni i-t mert ez valami azonosság

$$\hat{f}'(x) = -2\pi x \hat{f}(x)$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i 0 x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{y^2}{2\pi}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} =$$

olyat akarok csinálni, hogy a norm. eloszl. lehessen integrálni, mert az integr. 1

$$x = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}$$

Hf: e^{-x^2} fourier tr. (összetevő.)

2011. 11. 18.

Konzultáció

- 1 elméleti kérdés és 5 db feladat
- 90 perc <u>Aud. Max</u>
- általános Fourier-tr. definíciója már nem kell

1. feladat

$$F(x) = 3\,tg(x) - x + |x-1|$$

$$\left.\begin{aligned} T_1(x) &= 3\,tg(x) + |x-1| \\ T_2(x) &= arc\,tg\,\frac{x-|x-1|}{3} \end{aligned}\right\}$$ transzformációk

$T_1(x) = x$ fixpont probléma és

$T_2(x) = x$

$$tg(x) = \frac{x - |x-1|}{3}$$ → látom, hogy ekvivalens $F(x)$-el

- mindkettő fixpont prob. ekvival. $F(x)$-el
- vegyük az alt. iterációja

↳ T'-at meg kell nézni (kontrakció-e?)

$$T_1'(x) = \frac{3}{\cos^2 x} + sgn(x-1)$$

ha $\cos x$ tart a nullához, a deriv. nagyon nagy lehet

- akkor hogy kontrakció legyen 1-nél kisebbnek kell lennie az absz. ért.

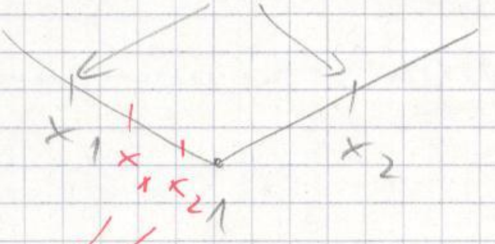
$$T_2'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-|x-1|}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\underbrace{\left(1-\mathrm{sgn}(x-1)\right)}_{\le 2}$$

↳ ez kisebb mint $\frac{2}{3}$ mindenütt

↳ $x=1$ helyen nem diffható

az egy-oldali jobbra és balra is kontrakciónak kell lennie

itt veszem a fv. értékét



$T_2(x_1) - T_2(x_2) \le \frac{2}{3}|x_1-x_2|$

biztos kontrakció, nem kell vizsgálni

kontrakció, tehát biztos alk. itera

2. feladat

Síkban mozog egy bolygó a nap terében

$-\frac{GM}{r}$ → gravitációs potenciál

G - gravit áll.

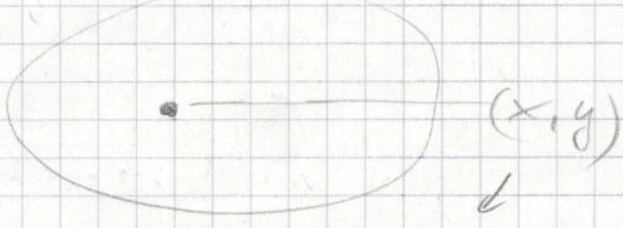
M - a nap tömege

Lagrange-fv. felírása

mozgási energia - helyzeti energia

$L = T - U$

- az origóba teszi a napot



ezek a koord. vannak a bolyg.

$$U = + \frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x'^2 + y'^2 = v^2 \rightsquigarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(x'^2+y'^2\right) + \frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

fel kell írni a mozgásegyenleteket

vektorok

$$L_x - \frac{d}{dt}\left(L_{x'}\right) = 0$$

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$$L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0$$

$$0 = \frac{GM \cdot \cancel{2}x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \cdot -\frac{1}{\cancel{2}} - \frac{d}{dt}\frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}x'$$

$$0 = m x'' + \frac{GMx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$ x és y időfüggő

az egyenl. szimmetrikusak x-ben y-ba, a másikndál y van x helyén

$$0 = m y'' + \frac{GMy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

– lehet polárkoordináták segítségével r 1-vel felírni mindkettő függ az időtől

$x = r \cdot \cos l$

$y = r \cdot \sin l$

- az E. L. független attól, hogy milyen koordinátákban dolgozunk

- ha körpályán lenne r nem függ az időtől, csak a l!

3. feladat

megvan adva egy hatásfv.

$$S(u) = \iint\limits_D \frac{1 + u(x,y)\, u_x(x,y)}{u_y(x,y)}\, dx\, dy$$

↳ ennek a hatásnak a minimuma kell

$$L = \frac{1 + u u_x}{u_y}$$

E. L. differenciálegy: $L_u - \frac{d}{dx} L_{u_x} - \frac{d}{dy} L_{u_y} = 0$

$$L_u = \frac{u_x}{u_y}$$

$$L_{u_x} = \frac{u}{u_y}$$

$$L_{u_y} = 1 + u u_x (-1) u_y^{-2}$$

kétszer folyt. diffható, mindegy a sorrend

$$\frac{u_x}{u_y} - \frac{u_x \cdot u_y - u u_{yx}}{u_y^2} + u_y u_x + u u_{xx} u_y^2$$

...

és így tovább, ezt nem fejtette tovább

4. feladat   Holdra szállás, rakéta

m tömeg. vált.

$$v'(t) = h''(t) = -g + \frac{w(t)}{m(t)} \qquad m'(t) = -k\, w(t)$$

$$\left.\begin{aligned} h(t_0) &= h_0 \\ m(t_0) &= m_0 \end{aligned}\right\} \text{kezdeti feltételek} \qquad \left.\begin{aligned} h(t_1) &= 0 \\ v(t_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{célfeltételek}$$

$0 \leq w \leq a$ vezérlési feltétel

- cél minimum üzemanyagfogy. való leszállás

-> vez. egyenl.

-> vezérlési funkcionál

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t)\, dt \to \min$$

a tolóerő az üzemanyag fogy. arányos

vezérlési egyenletek

$$m(t) = m_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{-k\, w(t)}_{f_3}\, dt$$

ideiv. is szerepel -> sebesség bevezetése

$$h'(t) = v(t) \qquad h(t) = h_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{v(t)}_{f_1}\, dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{-g + \frac{w(t)}{m(t)}}_{f_2}\, dt$$

3 vez. egyenletem van

$$p_0 = H = p_1 v + p_2\left(-g + \frac{w}{m}\right) + p_3(-k\, w) - \lambda w$$

ez a Pontrjagin fv.

- következik a transzverzalit. feltételek, vektorértékű fv.

$$\vec{g}(t_1, u(t_1), v(t_1), m(t_1)) = \vec{0}$$

$\hookrightarrow$ $g_1(t, u, v, m) = u$

$g_2(t, u, v, m) = v$ (t_1-be van, csak u és v)

$g_3(t, u, v, m) = 0$

$p(t_1) = -\lambda g_t$ ← végfelt. a t_1-ben

$p_0(t_1) = \lambda g_t$

$p_0(t_1) = 0$

$$\begin{pmatrix} p_1(t_1) \\ p_2(t_1) \\ p_3(t_1) \end{pmatrix} = -(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$p_1(t_1) = -\lambda_1$

$p_2(t_1) = -\lambda_2$

$p_3(t_1) = 0$

ezzel megvannak a transzverzalit feltételek

ha a diffegyenletek a kérdés akkor azok az egyenl.

$x' = H_p$ alább egyenletet adódna

$p' = -H_x$

5. feladat

$[-1,1]$ $f(x) = \hat{\chi}_{[-1,1]}(x)$ az eredm. seg. az alábbi int. meghat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^2}\, du$$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]} \cdot e^{-2\pi i t x}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i t x}\, dx = 2\int_0^1 \cos 2\pi t x\, dx =$$

páratlan fv. szinuszos integrálja 0

$$= 2\left[\frac{\sin 2\pi t x}{2\pi t}\right]_0^1 = \frac{2\cdot \sin(2\pi t)}{(2\pi t)} = \hat{f}(t)$$

felhasználva:

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

– normája és normájának a négyz. is megegy.

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)^2 dt \rightsquigarrow$$ ez az int. 2-vel egyenlő

$$\|f\|_2 = \text{a karakt. fv. négyzete} = \int_{-1}^{1} 1^2\, dx = 2$$

$$t = \frac{u}{2\pi} \longrightarrow dt = \frac{du}{2\pi}$$

$2\pi t = u$ -t írok

$$2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2 \frac{du}{2\pi} =$$

$$\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = 2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \frac{2\cdot 2\pi}{h}$$

Ismert Fourier tr. négyzetének az integrálja → eredeti fv integrálja

- differenc. hogy vált. meg a Fourier tr.

6. feladat

$f(x) = x\, e^{-x^2}$ ennek a Fourier tr. kell

$\hat{f}(x) = ?$

$g(x) = e^{-\pi x^2}$ $\hat{g} = e^{-\pi t^2}$

$f(x)$ a g deriváltjához hasonlít kicsit

$h(x) = g'(x) = -2\pi x \cdot e^{-\pi x^2}$

$\hat{g'}(t) = (2\pi i t)\underbrace{e^{-\pi t^2}}$ megvan $\hat{h}(x)$ - tr.ja

eredeti fv. szorzódik ezzel

$$\widehat{h\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)} = |s|\, \hat{h}(s t) = \sqrt{\pi}\cdot \hat{h}(\sqrt{\pi}\, t)$$

$s = \sqrt{\pi}$

1-el osztottam

van a helyén ak. venni

$$u\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-x^2}\cdot(-2\sqrt{\pi}\,x) \rightarrow$$ ennek tudjuk a fourier tr.

$$\left(x\cdot e^{-x^2}\right)^\wedge = \frac{\sqrt{\pi}}{-2\sqrt{\pi}}\,\hat{u}(\sqrt{\pi}\,t) =$$

ugyanaz csak $-2\sqrt{\pi}$ vel szor. van

$$= -\frac{1}{2}\,\hat{u}(\sqrt{\pi}\,t) = -\frac{1}{2}2\pi i\sqrt{\pi}\,t\,e^{-\pi^2t^2}$$

A vége el van számolva! Oldal alján megvan normálisan oldva!

$\hat{g}'$ -t valahogy kc generáljuk

a fourier tr. lin, ha az eredetit osztom, a tr. is osztódik

-azzal jött k. hogy lin, és hogy helyett. mi tört. és ha eltolom akkor e-adossal szorzódik a transzformált

7. feladat

Tychonov regularizációs példát szólni, hogy meg kell csinálni!

Extra feladatok

$f(x) = e^{-x^2}$ $\qquad \hat{f}(t) = ?$

$g(x) = e^{-\pi x^2} \rightarrow \hat{g}(t) = e^{-\pi t^2}$ ismert

$g\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-\pi\frac{x^2}{\pi}}$

$$\boxed{\text{Tétel: } \left(f\left(\frac{y}{s}\right)\right)^\wedge = |s|\cdot\hat{f}(ts)}$$

$$\left(g\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)\right)^\wedge = \sqrt{\pi}\cdot e^{-\pi(t\cdot\sqrt{\pi})^2} = \sqrt{\pi}\cdot e^{-\pi^2t^2}$$

$$g\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^\wedge = \left(f(x)\right)^\wedge = \underline{\sqrt{\pi}\,e^{-\pi^2t^2}}$$

$f(x) = \pi x \cdot e^{-x^2}$ $\qquad \hat{f}(t) = ?$

$g(x) = e^{-\pi x^2} \rightarrow \hat{g}(t) = e^{-\pi t^2}$ ismert

$h(x) = g'(x) = -2x\pi \cdot e^{-\pi x^2}$

$h(t) = j\, 2\pi t \cdot e^{-\pi t^2}$ $\qquad \mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(j\omega)$

$h\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = -2x \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\pi}{\pi}x^2} = -2x\sqrt{\pi} \cdot e^{-x^2}$

$-2\sqrt{\pi}$-vel több mint $f(x)$

$h\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^{\wedge} = |s| \cdot \hat{f}(ts) = \sqrt{\pi} \cdot j\, 2\pi t \sqrt{\pi} \cdot e^{-\pi \pi t^2} =$

$= j\, 2\pi^2 t \cdot e^{-\pi^2 t^2}$

(*) a Fourier-tr. lin. ezért ezzel leosztom!

(*) és még $\sqrt{\pi}$-vel is szorozni

$\frac{\sqrt{\pi}}{-2} \cdot h\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^{\wedge} = \hat{f}(t)$

$\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{\pi}\; j\, \cancel{2}\pi t \sqrt{\pi} \cdot e^{-\pi^2 t^2} = \hat{f}(t)$

$\hat{f}(t) = -j\, \pi^{\frac{5}{2}} t\, e^{-\pi^2 t^2}$

2011.11.23

1. Tyhonov regularizáció

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

x_σ mego. kiszámol Tyhonov regulariz.

$c = 1 \qquad T = \mathbb{R}^2 \qquad A_\sigma = A$

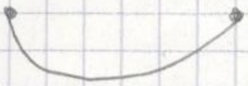
$b_\sigma = b$

$\lim_{\sigma \downarrow 0} x_\sigma$

2. Fourier tr.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^n dx$$

3. Lánc, homogén → egys. hossza eső tömeg ugyanannyi



felfüggesztett súlyos lánc

- variációszám. feladat mellékfeltétellel (a lánc hossza adott)

↓ a köv. felad. mego. kell

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

$x(a) = x_0$

$x(b) = x_1$

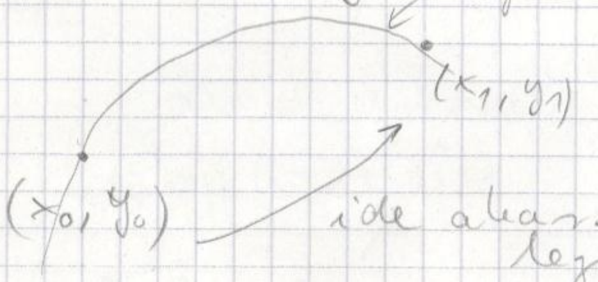
$$\int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,dt = C$$

4. Komplex felső féls. leesett a hó, a hó vastags.

a hóvastags. ford. arány. a sebesség.

$x + iy$ $\quad \frac{1}{y}$

ilyesmi lesz a megoldás



ide akar. eljutni a legrövid. idő alatt
a legk. energiafelh.

- minden időp. az irányt kell megadni

2. Feladat (megoldása) $a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4$$

$$\left(f\left(\frac{y}{s}\right)\right)^{\wedge} = |s|\cdot \hat{f}(ts)$$

$[-1,1]$ karakt. fv.

alkalmas s-hogy ax legyen

$$\int_{-1}^{1} e^{-2\pi i t y}\,dx = \frac{\sin(2\pi y)}{\pi y}$$

$$s=\frac{a}{2\pi}$$

$$2\pi y = ax$$

$$x=\frac{2\pi y}{a} \qquad t=\frac{a}{2\pi}$$

$$\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{\sin(2\pi y)}{\pi y} =$$

$$=\frac{a}{2\pi}\,\frac{2\pi}{a}\cdot\frac{\sin\left(2\pi\cdot\frac{ax}{2\pi}\right)}{\cancel{\pi}\cdot\frac{ax}{\cancel{2\pi}}} =$$

$$=\frac{a}{2\pi}\,\frac{2\pi}{a}\,\frac{\sin(ax)}{\frac{ax}{2}} = \frac{2\sin(ax)}{\cancel{a}x}\cdot\frac{\cancel{a}}{2\pi} =$$

$$=\frac{\sin(ax)}{x\pi}$$

$$\int_{-\frac{a}{2\pi}}^{\frac{a}{2\pi}} \frac{2\pi}{a}\,dx$$

Parseval tétele:

$$\int|\hat{f}|^2dx=\int|f|^2dx$$

$$(f*f)^{\wedge}=\hat{f}\cdot\hat{f}$$

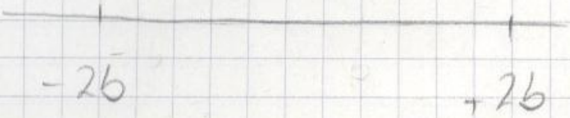
konv. abszolútérték négyzet. az int. egyenlők meg

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

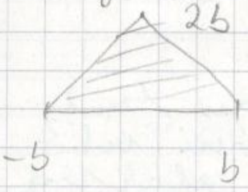
csak akkor a
része lesz a fv-ek
konvolúció jól kiszámolni, ahol mindkettő értéke nem 0

– a konvol. eltben az értelben könnyű

$$b = \frac{a}{2\pi}$$



a konv. ilyen lesz



–b a b-ig az azon. 1 fv-t kell integrálni

ezt kell négyzetre emelni

$$2\int_0^{2b} (2b-x)^2\,dx = 2\cdot\left[4b^2x - 2bx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^{2b} =$$

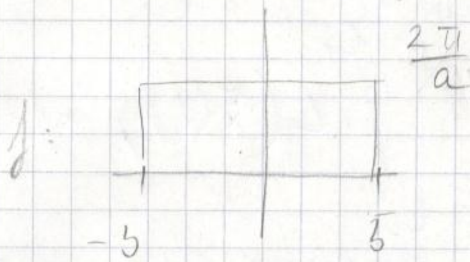
az eredeti fv. konvolúciójának a norma négyz. számoljuk

→ az eredeti fv. a -1 től 1 ig tartó karakt fv.

$$= \cancel{16b^3 - 16b^3} + \frac{16}{3}b^2$$

$$\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3\cdot\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 = (f * f)$$



$$\frac{\sin(ax)}{x}$$

a karakt. fv. önmagával való konv. szám

$\frac{2\pi}{a}\cdot$ karakt. fv.

b=0 van a legn. az értéke

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}^2|^2$$

3. feladat

- olyan alakúra kell átírni amire tudjuk alkalmazni a Pontyagin féle maximumelvet

-> Bolza

$$x'(t) = w(t)$$ f_3 ebben van kezd, ezt kell írni int. egyenl. alakba

új változó bevezetése $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(t)\, dt$ f_3

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(t, x(t), w(t))}_{f_1} dt$$ új vez. egyenlet

$\tilde{x}(t_1) = 0$ (vezérlési változó megállási feltétel

$$\tilde{\tilde{x}}(t) = a + \int_{t_0}^{t} \underbrace{1}_{f_2}\, dt$$ $\tilde{\tilde{x}}(t_1) = b$

$\downarrow$ ha t hely. t_0-t írok az a

-> a felső határ változóvá tettük, legelébb fix volt

lényegében a t-vel egyenlő, az idő helyett van bevezetve

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\tilde{x}(t), x(t), w(t))\, dt$$ -> minimalizálni akarjuk

- 3 vezérlési egyenletünk van

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 - \lambda L \qquad \lambda = 1$$

$$H = p_1 \cdot f(\tilde{\tilde{x}}, x, w) + p_2 1 + p_3 w - L(\tilde{\tilde{x}}, x, w)$$

a köv. órán befejezi...

2011.11.30

1. feladat

$$x_\delta = \frac{a(c-c^2-\delta)}{\delta^2+c^2(\delta-1)} \qquad y_\delta = \frac{(\delta-1)\,a\,(c-c^2-\delta)}{\delta^2+c^2(\delta-1)}+a$$

$\delta \downarrow 0$ esetén

$$\frac{a\cancel{c}(1-c)}{-c^2} \qquad \frac{-a(c-c^2)}{-c^2}+a = -\frac{a(1-c)}{c}+a$$

x_δ ehhez tart

ha c kicsi akkor ez $\rightarrow$ nagyon nagy

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&c\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$$

- a δ nullához közeli de nem annyira h. kerek. hibából adódjon
- sima átmenetet biztosít a kettő között

2. feladat

előző 3. feladat befejezése

$$H = p\,w + \tilde p\, f(\tilde x, x, w) + \tilde{\tilde p} - \lambda L(\tilde x, x, w)$$

idő helyére volt bevezetve

$\lambda = 1$

- felírjuk a p-re a vezérlési egyenleteket

$$p' = -H_x = -\tilde p\, f_x(\tilde x, x, w) + L_x(\dots) \qquad \begin{pmatrix}-L\\-\tilde L\\-\tilde{\tilde L}\\-\tilde L\end{pmatrix}$$

a feltétel $p(t_1) = -L$

$\tilde p' = -H_{\tilde x} = 0 \qquad \tilde p(t_1) = -\tilde L \leftarrow$ a megfelelő vektor koordin

$$\tilde{\tilde{p}}' = -H_{\tilde{\tilde{x}}} = -\tilde{p}\, f_t + L_t \qquad \tilde{\tilde{p}}(t_1) = -\tilde{\lambda}$$

f t szerinti deriváltja

$$0 = H_w = p + \tilde{p}\, f_{x'}(\tilde{\tilde{x}}, x, w) - L_{x'}(\hat{x}, x, w) =$$

w helyén x' áll

$$= -\lambda \int_{t_1}^{t} \tilde{\lambda} f_{x'}(t, x(t), x'(t))dt + L_x(t, x(t), x'(t))dt$$

ez eddig a p a Pontjagin fv.-ből

$$-\tilde{\lambda} f_{x'}(t, x(t), x'(t)) + L_{x'}(t, x(t), x'(t))$$

$$\tilde{p} = -\tilde{\lambda}$$

- ez úgy néz ki mint egy E. L. de.
- az integrált ki akarom küszöb. → t szerint diff

$$\tilde{\lambda} f_x + L_x - \frac{d}{dt}\left(\tilde{\lambda} f_{x'} + L_{x'}\right) = 0$$

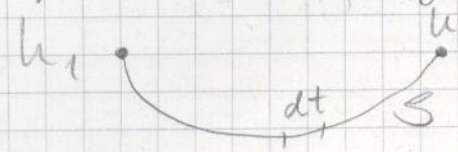
variációsz. szereplő L fv.

$\tilde{L} = \tilde{\lambda} \cdot f + L$ ← bevezetem ezt az új Lagrange fv.

feltétel

- a Lagrange fv-hez konstanst kell hozzáadni f-hez, és erre kell az Euler-Lagrange de felírni
- a feltételes variációszám. a Lagrange multiplikátor-szor a feltételt kell a Lagrange fv-hez hozzáadni

3. feladat homogén súlyos lánc



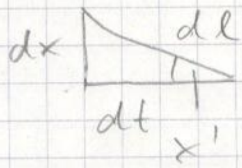
– a helyzeti energ. minimum

t a vízszintes tengely, nem az idő

$x(t_1) = h_1$

$x(t_2) = h_2$

- dt hosszú darab helyz. energ. próbáljuk meghatározni
  - ↳ közelítőleg lineáris
  - ↳ meredeksége $x'(t)$



$$dl = \frac{dt}{\cos(x'(t))}$$

$$dl^2 = \frac{dt^2}{\cos^2(x'(t))}$$

$$dt^2 + dx^2 = dl^2 =$$

$$= dt^2 + (x'(t)\,dt)^2$$

$$dl = \sqrt{dt^2 + (x'(t)\,dt)^2} = dt\sqrt{1 + (x'(t))^2}$$

ez a görbe hossza

ρ – az egységnyi hosszra eső tömeg

$$dm = dl \cdot \rho$$

$$dE_h = dl \cdot \rho \cdot g \cdot x$$

helyz. energiája a darabnak ↗ ezt kell integrálni a teljes energ.

$$I = -\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+(x'(t))^2} \cdot \cancel{\delta} \cdot \cancel{g} \cdot x(t)\, dt$$

mert fordítva van irány.,
de mind1 mert a minim. keressük

- δ és g pozitív konstansok, kihúzhatom
- melléke feltétel, hogy a lánc hossza fix

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+(x'(t))^2}\, dt \rightarrow \text{ez egy konstans}$$

$$\tilde{L} = \lambda \sqrt{1+(x'(t))^2} + x\sqrt{1+x'^2}$$

Lagrange multiplikátor

erre kell az Euler - Lagrange de.

$$\sqrt{1+x'^2} - \frac{d}{dt}\left((\lambda+x)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x'^2}} \cdot 2x'\right) = 0$$

- ez t-től nem függ, erre van egy egyszerűsítés ilyenkor:

$$\tilde{L} - \tilde{L}_{x'} x' = C$$

$$(\lambda+x)\sqrt{1+x'^2} - x'(\lambda+x)\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C$$

$$(\lambda+x)\left(\sqrt{1+x'^2} - \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = C$$

$$(\lambda + x)\left(\frac{1+\cancel{x'^2}-\cancel{x'^2}}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = C$$

$$\frac{(\lambda + x)}{\sqrt{1+x'^2}} = c$$

$$\left(\lambda + x'^2\right) = c^2\left(1+x'^2\right)$$

ez már egy szeparálható differenciál-egyenlet, amit meg tudunk oldani

4. feladat differenciálható sokaság

- henger térképezése a feladat
(mintha összeragasztjuk a lap szélét, és a peremet kihagyjuk)

→ itt ezt képezzük ki!

- az egyik térkép nyílt négyzet

$\varphi_1(x) = (x, y)$

ha végtelen hengert akarok akkor az y-t nem kell megkötnöm

$1 > x > 0$
$1 > y > 0$
} a ragasztás éléből pont kimaradt

a 0 és 1-es pontok össze vannak ragasztva

$\varphi_2(x, y)$
$1 > y > 0$

ebben a térképben az x-ben végigérni kell:

ha $0 \le x < 0{,}5$ $\quad x+1, y$
ha $1 > x > 0{,}5$ $\quad x, y$

* a térképnek nyílt halm. kell lennie
nem eng. meg az egyenlőt → *

polárkoordináta alakban

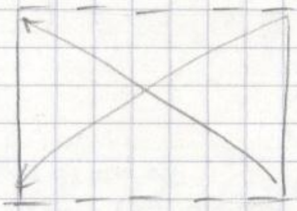
$x = 1 \cdot \cos \varphi$

$y = 1 \cdot \sin \varphi$

$z = z$

ebben az esetben a külső fal pontjait adjuk meg, hogy hol legyenek a henger pontjai (ez az inverze)

5. feladat Möbius szalag



$\varphi_1(x, y) = (x, y)$

$0 < x < 1$

$-1 < y < 1$

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} 0 \le x < 0{,}5 & (x+1, y) \\ 1 > x > 0 & (x, -y) \end{cases}$$

3D-s térben az inv. adjuk meg

- egy egyenes szakaszt a 2 sugarú kör körül körbeviszem és közben forgatom

U, φ ennyinek kell lennie, ha u 0

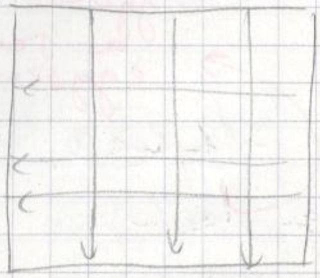
$X = 2 \cdot \cos \varphi$

$y = 2 \cdot \sin \varphi$ ez el van téve házi feladatnak...

$z =$

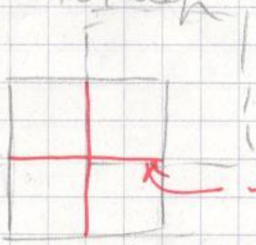
6. feladat Tórusz koordinátázása

3 térképpel koordinátázunk
↳ de ehhez el kell tolni csúnyán



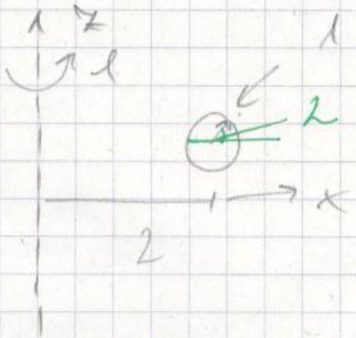
1 térkép a négyzet belseje

2. térkép



ezek maradnak ki

3D-ben a térkép inverze (kintről a tór képe.)



1 sugarú

$x = (2 + \cos\lambda)\cos\varphi$

$y = (2 + \cos\lambda)\sin\varphi$

$z = \sin\lambda$

$0 < \varphi < 2\pi \quad , \quad 0 < \lambda < 2\pi$

$-\pi < \varphi < +\pi \quad , \quad 0 < \lambda < 2\pi$

$0 < \varphi < 2\pi \quad , \quad -\pi < \lambda < +\pi$

$-\pi < \varphi < +\pi \quad , \quad -\pi < \lambda < +\pi$

λ kifejezve x, y, z fv.-ében
az lenne a térkép

7. feladat Klein féle kancsó

- 4 térképet fogunk használni

henger összerag:

$\varphi_1(x,y) = (x,y)$

$-1 < x < 1$

$-1 < y < 1$

$\varphi_2(x,y) = \begin{cases} -1 \le x < 0 & (x+2, y) \\ 1 > x > 0 & (x, y) \end{cases}$

ügyelni kell, hogy a széle egyszer szerep.

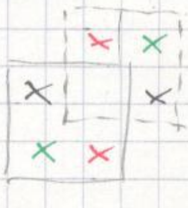
$\varphi_3(x,y) = \begin{cases} 0 < y < 1 & (x,y) \\ 1 \le y \le 2 & (-x, y-2) \end{cases}$

ez a térképezésen

- már csak a 4 szer megfelelő háromszögek

de ezek össze vannak rag.

$\varphi_4(x,y) = \begin{cases} 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 & (x,y) \end{cases}$



mi hova megy

2011. 12. 07

- a felszínig való számol. bevezetnek a görbevon. való számolás

Feladatok:

gömbi koordinátákban van $S_2 = u$

a következő vektormező

$\cos \varkappa \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ha $-\frac{\pi}{2} < \varkappa < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi < 2\pi$

↳ ezt számoljuk át az északi sarkból $(1,0,0)$ való vetítéssel adódó vetítéssel

---

$\cos \varkappa \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\cos \varkappa \frac{\partial}{\partial \varkappa}$

↳ számoljuk ki a Lie zárójeleket

$(1,0,0)$ pontból való vetítéssel adódó koordinátákba

↳ Lie-zárójel kiszámolása

↳ Lie-zárójel transzf. kiszámítása

(ez nem függ a koordinátarendsz.

fv.

Mutassuk meg ha X, Y, f simák akkor

$$[X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$$

1. feladat

- a gömbön van a vektormező
- két koordináta φ és $\varkappa$
- először meg kéne állapítani, hogy mik a koordinátafv. a vektormezőnek
- $\cos \varkappa$ sebességgel megy a φ-be

↳ ez a szemléletes jelentése

$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ $\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)$ → ez az egységvektor

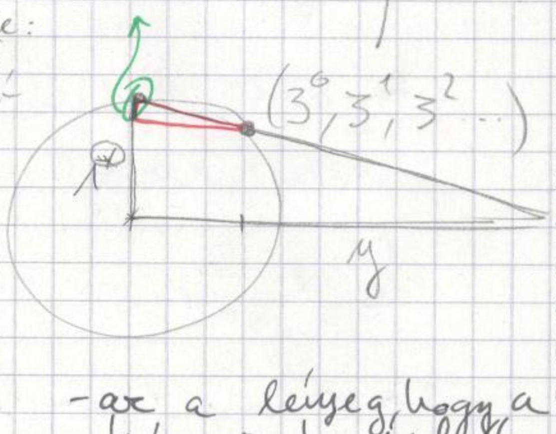
↳ ϑ irányba venni egys. sebességgel

szerintem egységv.

$\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$

vetítés lényege:

⊛ egység sugarú gömb



$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2) \to \left(\overset{y^1}{\frac{\xi^1}{1-\xi^0}}, \overset{y^2}{\frac{\xi^2}{1-\xi^0}}\right)$$

- az a lényeg, hogy a háromsz. hasonlók
- a ϑ úgy megy mint a földgömb.

(z) $\xi^0 = r \cdot \sin\vartheta = 1 \sin\xi$

mert egységgömb

(x) $\xi^1 = r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi = \cos\vartheta \cdot \sin\varphi$

(y) $\xi^2 = r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi$

- most vetítünk az y-ok kellenek

$$y^1 = \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}{1-\sin\vartheta}$$

$$y^2 = \frac{\cos\vartheta - \sin\varphi}{1-\sin\vartheta}$$

- deriváltmátrix kiszámoldása (φ és ϑ szerinti derivált)

a φ az első koordináta!

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial \varphi} & \frac{\partial y^1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y^2}{\partial \varphi} & \frac{\partial y^2}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{\cos x \cdot \sin \varphi}{1-\sin x} & \cos\varphi \dfrac{-\sin x(1-\sin x)-(-\cos x)\cos x}{(1-\sin x)^2} \\ \dfrac{\cos x \cdot \cos\varphi}{1-\sin x} & \sin\varphi \dfrac{1}{1-\sin x} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\cos^2 \sin\varphi}{1-\sin x} + 0 \\ \dfrac{\cos^2 x \cdot \cos\varphi}{1-\sin x} + 0 \end{bmatrix} = (*)$$

ez egy Jacobi mátrix, amit még meg kell szorozni $\begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix}$-val

↳ ezt most ki kell fejezni y^1 és y^2 segítségével

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = \left(\frac{\cos x \cdot \cos\varphi}{1-\sin x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x \sin\varphi}{1-\sin x}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2\varphi + \cos^2 x \sin^2\varphi}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{y^1}{|y|} \qquad \sin\varphi = \frac{y^2}{|y|}$$

$$\sin x = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} = \frac{\dfrac{\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} - 1}{\dfrac{\cos^2 x}{(1-\sin x)^2} + 1} =$$

most ezt bizonyítjuk be
(megsejtettük fáraitól)

$$= \frac{\cos^2 x - (1-\sin x)^2}{\cos^2 x + (1-\sin x)^2} = \frac{\cos^2 x - 1 - \sin^2 x + 2\sin x}{\cos^2 x + 1 + \sin^2 x - 2\sin x} =$$

$$= \frac{-2\sin^2 x + 2\sin x}{2(1-\sin x)} = \sin x \rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right)^2}$$

$$(*) = \left[\begin{array}{c} \sqrt{1-\left(\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)^2} \, y^2 \\ \sqrt{1-\left(\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)^2} \, y^1 \end{array} \right]$$

egyik irányban ilyen a koordináta

2 feladat

$$\underbrace{\cos x \frac{\partial}{\partial \varphi}}_{X \text{ vektormező}} , \quad \underbrace{\cos \varphi \frac{\partial}{\partial x}}_{Y \text{ vektormező}}$$

A Lie zárójel koordinátamezőkben:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \varphi^i} - \underline{Y^i \frac{\partial X^j}{\partial \varphi^i}} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = (*)$$

vektor amivel szorzunk

Y-ok φ szerinti parciális deriváltjai (mátrix)

- kapunk egy vektort eredményül amik a Lie zárójel koordinátái

$$\begin{bmatrix}\cos x\\ 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\ \cos x\end{bmatrix}$$

$\downarrow$

parciális deriváltak

φ és x szerinti deriv.

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\sin x\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\cos x\\ 0\end{bmatrix}}_{X} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\sin x\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \cos x\end{bmatrix}}_{Y}} = \begin{bmatrix}-\sin x\cos x\\ 0\end{bmatrix}$$

a fentieket összevonva

(*)

!

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}+\sin x\cos x\\ 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\varphi}}}$$

- most y^1 és y^2 koordinátarendszerbe számoljuk át, és annak a Lie-zárójelét nézzük

↳ azt kell konstatálni, hogy ugyanaz az eredmény

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{-\cos x\sin\varphi}{1-\sin x} & \dfrac{\cos x}{1-\sin x}\\[2ex] \dfrac{\cos x\cos\varphi}{1-\sin x} & \dfrac{\sin\varphi}{1-\sin x}\end{bmatrix}}_{\text{első felad. kiszámolt áttérés mátrixa}}\begin{bmatrix}\sin x\cos x\\ 0\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-\cos^2 x \sin x \sin \varphi}{1-\sin x} \\ \dfrac{\cos^2 x \sin x \cos \varphi}{1-\sin x} \end{bmatrix}$$

3. feladat

$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$ bizonyítása

vektorból kijön ez

$$\left[\frac{\partial f Y}{\partial \varphi}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f Y^1}{\partial \varphi^1} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^1} Y^1 + f \dfrac{\partial Y^1}{\partial \varphi^1} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{Lie-zárójel első tagja}}$$

- a vektormező a fv-re: $Xf = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}$
(egy fv.-t ad vissza ami)

$$\left[\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial \varphi^1} & \dfrac{\partial X^1}{\partial \varphi^2} & \cdots \\ \dfrac{\partial X^2}{\partial \varphi^1} & \dfrac{\partial X^2}{\partial \varphi^2} & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f Y^1 \\ f Y^2 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\text{negatív előj. véve a Lie-zárójel második tagja}}$$