ANALÍZIS(1) — Mérnök Informatikus szak — II. ZÁRTHELYI β variáns — 2007. nov. 21. — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(6x)}{3x\cdot\sin(2x)} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^{6x}-2e^{2x}}{4e^{3x}+5e^{6x}+7} = ?$

a) $\boxed{7}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ azonosság felhasználásával:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{3x\ \sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{2x}{\sin 2x}}_{\to 1}\ \frac{3^2}{2} = 3$$

(L'H-sal is megoldható.)

b) $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{6x}}{e^{6x}}\ \frac{3-2e^{-4x}}{4e^{-3x}+5+7e^{-6x}} = 1\cdot\frac{3-0}{0+5+0} = \frac{3}{5}$$

---

2. feladat (16 pont)

$$f(x) = 2\pi + \arccos(5-x)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$

a) $\boxed{8}$

$-1 \le 5-x \le 1$ (1) $\Longrightarrow -6 \le -x \le -4 \Longrightarrow 6 \ge x \ge 4$

$D_f = [4, 6]$ (2)

$\arccos(5-x) \in [0, \pi]$ (1) $\Longrightarrow R_f = [2\pi, 3\pi]$ (1)

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(5-x)^2}}\cdot(-1)$, $x \in (4, 6)$

b) $\boxed{2}$ $f'(x) > 0$, ha $x \in (4,6)$ és f folytonos $[4,6]$-on

$\Longrightarrow f$ szigorúan monoton nő $D_f = [4,6]$-on

$\Longrightarrow \exists\, f^{-1}$ D_f-en

(β) an1zh2071121/1

c.) $y = 2\pi + \arccos(5-x) \Rightarrow y - 2\pi = \arccos(5-x)$

$\boxed{6}$ $\Rightarrow 5 - x = \cos(y-2\pi) \Rightarrow x = 5 - \cos(y - 2\pi)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 5 - \underbrace{\cos(x-2\pi)}_{=\cos x}$ 4

$D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi, 3\pi]$ 2

3. feladat (13 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 5$ pontban!

c) Írja fel az $x_0 = 5$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\boxed{2}$

b.) $f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+3(5+h)} - 4}{h} =$ 3

$\boxed{8}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+3h} - 4}{h} \frac{\sqrt{16+3h}+4}{\sqrt{16+3h}+4} =$ 2

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{16+3h-16}{h(\sqrt{16+3h}+4)} = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{3}{\sqrt{16+3h}+4} = \frac{3}{8}$ 3

c.) $y_e = f(5) + f'(5)(x-5) = 4 + \frac{3}{8}(x-5)$

$\boxed{3}$

B an1zh2071121/2.

4. feladat (21 pont)

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{3-x}, & \text{ha } x<3\\ (9+2x^2)^{1/x}, & \text{ha } x\ge 3\end{cases}$$

a) Hol és milyen szakadása van az f függvénynek?

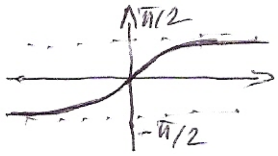
Differenciálható-e a függvény $x=3$-ben?

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a.) Szakadása csak $x=3$-ban lehet, egyébként f folytonos és deriválható

$\boxed{10}$



$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\operatorname{arctg}\frac{\overset{\to -1}{(x-4)}}{\underset{\to +0}{(3-x)}} = -\frac{\pi}{2} \qquad 3$$

$\to -\infty$

$$f(3+0)=f(3)=(9+2\cdot 9)^{1/3}=\sqrt[3]{27}=3 \neq f(3-0) \qquad 1$$

$\Rightarrow$ $x=3$-ban véges ugrása (elsőfajú szakadása) van. 1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x}\,\underbrace{\frac{1-\frac{4}{x}}{\frac{3}{x}-1}}_{-1}\right)=\operatorname{arctg}(-1) \;\; 2 \;\; =-\frac{\pi}{4} \;\; 1$$

$f'(3)\nexists$, mert f nem folytonos $x=3$-ban (nem teljesül a szükséges feltétel) 2

b.)

$\boxed{11}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x-4}{3-x}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(3-x)-(x-4)(-1)}{(3-x)^2}, & \text{ha } x<3\\[2ex] \left(e^{\frac{1}{x}\ln(9+2x^2)}\right)' \;\; 2 \;\; =(9+2x^2)^{1/x}\cdot\underbrace{\left(\dfrac{\ln(9+2x^2)}{x}\right)'}_{\frac{\frac{4x}{9+2x^2}\cdot x-\ln(9+2x^2)\cdot 1}{x^2}\;\; 3} \;\; 2, & \text{ha } x>3\end{cases}$$

B an1zh2071121/3.

5. feladat (19 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{5x^2} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x^7 = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(3x^2)}{\mathrm{sh}(6x^2)} = ?$

a.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{3x}-1}{5x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{3e^{3x}}{10x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9e^{3x}}{10} = \infty$

b.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to +0} \underbrace{x^3 \ln x^7}_{0\cdot(-\infty)} = \lim\limits_{x\to+0} \underbrace{\dfrac{\ln x^7}{\frac{1}{x^3}}}_{\frac{-\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{1}{x^7}\,7x^6}{\frac{-3}{x^4}} =$

$= \lim\limits_{x\to+0} -\frac{7}{3}x^3 = 0$

(Praktikusabban: $(\ln x^7)' = (7\ln x)' = 7\cdot\frac{1}{x}$)

c.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\arcsin 3x^2}{\mathrm{sh}\, 6x^2}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\cdot 6x}{\mathrm{ch}\, 6x^2 \cdot 12x} = \frac{1}{2}$

$\dfrac{6x}{12x} = \dfrac{1}{2}$

6. feladat (18 pont)

a) Legyen f differenciálható az I intervallumon! Igaz-e, vagy hamis-e az alábbi állítás? A hamisra mutasson ellenpéldát!

a1) f szigorúan monoton nő I-n $\Longrightarrow$ $f'(x) > 0$ I-n
a2) f szigorúan monoton nő I-n $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$ I-n

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{(x-3)^3}{x+1}$$

szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!
Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek? Ha igen, milyen jellegű?

a.) $\boxed{4}$ a1) hamis Pl. $f(x)=x^3$ szig. mon. nő, de $f'(x)>0$ nem teljesül ($f'(x)\geq 0$ igaz) 3

a2) igaz 1

B an1zh2071121/4.

b.) $\boxed{14}$

$$f'(x) = \frac{3(x-3)^2(x+1) - (x-3)^3 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(x-3)^2(2x+6)}{(x+1)^2}$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	szak. h.	$\nearrow$		$\nearrow$

3

3

f szigorúan monoton csökken $(-\infty,-3)$-on 1

f szigorúan monoton nő $(-3,-1)$-en és $(1,\infty)$-en 1 1

$x=-3$-ban lokális minimuma van, mert csökkenőből növekvőbe megy át. 2

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (12 pont)

$$f(x) = \ln(2x^2+3)$$

Adja meg a monotonitási intervallumokat!
Hol konvex, hol konkáv a függvény?

$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+3}$ 2 $\quad x \in \mathbb{R}$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

3

$$f''(x) = \frac{4(2x^2+3) - 4x \cdot 4x}{(2x^2+3)^2} = \frac{4(3-2x^2)}{(2x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

3

	$(-\infty,-\sqrt{3/2})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{3/2},\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$		$\smile$		$\frown$

4

8. feladat (8 pont)

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x^2+3)\ \sqrt{x^2-4x+4}}$$

Adja meg a függvény értelmezési tartományát!

Hol és milyen szakadása van a függvénynek? (A megfelelő határértékek kiszámítása után válaszoljon!)

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{x-2}{|x-2|}\ \frac{x+1}{\underbrace{x^2+3}_{\geq 3}} \quad 2 \ ; \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad 1$$

Szakadási hely: $x = 2$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \underbrace{\frac{x-2}{x-2}}_{=1}\ \frac{x+1}{x^2+3} = \frac{3}{7} \quad 2$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \underbrace{\frac{x-2}{-(x-2)}}_{=-1}\ \frac{x+1}{x^2+3} = -\frac{3}{7} \quad 2$$

$x=2$-ben véges ugrása van (elsőfajú szakadás) 1

B anlzh20711211/6.