VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné
Kónya Ilona

2000. február

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Függvény határértéke

Ⓓ Függvény: egyértékű reláció.

$f : D_f \longrightarrow R_f$ $\forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$-hez hozzárendel pontosan egy $y \in R_f \subset \mathbb{R}$-et. $(y = f(x))$

D_f: domain, értelmezési tartomány (ÉT); R_f: range, értékkészlet (ÉK).

(Jelöljük $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ módon is.)

Korlátosság, paritás, monotonitás, periodikusság, néhány függvény: ... (L. előadás!)

Ⓓ Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha

- x_0 torlódási pontja D_f-nek,
- $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon\,, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in D_f$$

(Azaz $f(x) \in K_{A,\varepsilon}$, ha $x \in \dot{K}_{x_0,\delta} \cap D_f$)

<u>H halmazra szorítkozó határérték:</u>

az előző definícióban a $D_f \to D_f \cap H$ helyettesítést elvégezve kapjuk a definícióját.

<u>Jobb oldali határérték:</u> $H = (x_0, \infty)$

Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$

<u>Bal oldali határérték:</u> $H = (-\infty, x_0)$

Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$

A definíciókból következően $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists\, f(x_0-0), f(x_0+0)$ és $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (véges).

Ⓣ Cauchy kritérium ($\neg$B)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : x_1, x_2 \in \dot{K}_{x_0,\delta}$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Pl. $\boxed{\text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim\limits_{x\to 27} \sqrt[3]{x} = 3}$

$|f(x)-3|<\varepsilon$, ha $0<|x-27|<\delta(\varepsilon)$ $\qquad \delta(\varepsilon)=?$

$$\left|\sqrt[3]{x}-3\right| = \left|\left(\sqrt[3]{x}-3\right)\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+3\sqrt[3]{x}+3^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+3\sqrt[3]{x}+3^2}\right| = \frac{|x-27|}{\left|\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9\right|} \underset{x>0}{<} \frac{|x-27|}{9} < \varepsilon$$

Innen $|x-27|<9\varepsilon$, így $\quad \delta(\varepsilon)\leq\min\{9\varepsilon,27\}$
(27 az $x>0$ megkötésből származik.)

Pl. $\boxed{\text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim_{x\to 3}(x^2-x+5)=11}$

$|f(x)-11|<\varepsilon$, ha $0<|x-3|<\delta(\varepsilon)$ $\qquad \delta(\varepsilon)=?$

$$|x^2-x+5-11| = |x^2-x-6| = |x-3||x+2| \underset{\substack{|x-(-2)|<6\\ -8<x<4}}{<} |x-3|\cdot 6<\varepsilon$$

Tehát $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{6}$, vagyis $\qquad \delta(\varepsilon)\leq\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},1\right\}$
(A vizsgálatot leszűkítettük a $(-8,4)$ intervallumra. A vizsgált $x_0=3$ pontnak ezen intervallum végpontjaitól való minimális távolsága 1, tehát δ nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért került be a képletbe 1.)

Pl. $\boxed{\text{Bizonyítsuk be, hogy } \lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{1-x}=-1}$

$|f(x)-(-1)|<\varepsilon$, ha $0<|x-(-2)|<\delta(\varepsilon)$

$$\left|\frac{2x+1}{1-x}+1\right| = \left|\frac{2x+1+1-x}{1-x}\right| = \frac{|x+2|}{|x-1|} \underset{\substack{|x-1|>1\\ (x<0)\vee(x>2)}}{<} \frac{|x+2|}{1}<\varepsilon$$

Tehát $|x+2|<\varepsilon$, vagyis $\delta(\varepsilon)\leq\min\{\varepsilon,2\}$
(2: -2 távolsága 0-tól.)

Feladatok:

A definícióval mutassa meg, hogy

1. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}=3$
2. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x)=3$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}$

4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+1}{3+x} = -\dfrac{1}{2}$

●●●

1.1. Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére

Átviteli elv:

T

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, x_n \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$ $x_n \in D_f$ $x_n \neq x_0$
(P állítás)		(Q állítás)

B

1. Szükségesség $(P \implies Q)$:
   Teljesül: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
   Be kell látni:

   $f(x_n) \to A$, tehát $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$: $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$

   Algoritmus:
   $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$: $\quad |f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$
   $\delta(\varepsilon) \to N_1(\delta(\varepsilon))$: $\quad |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon))$
   De ekkor $\quad |f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon)) \quad \implies \quad N(\varepsilon) := N_1(\delta(\varepsilon))$

2. Elégségesség $(Q \implies P$, ezzel ekvivalens $\neg P \implies \neg Q)$:
   $\forall\, x_n \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$.

   Következik-e ebből, hogy $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon)$:

   $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$?

   Indirekt módon bizonyítunk.

   Tfh. $\exists\,\varepsilon > 0$, melyhez nincs $\delta(\varepsilon)$. Tehát minden δ rossz. Pl. $\delta = \dfrac{1}{m}$ $(m \in \mathbb{N}^+)$ is rossz, tehát $\exists\, x_m$: $0 < |x_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, de $|f(x_m) - A| \geq \varepsilon$. De ekkor lenne olyan $x_m \to x_0$ pontsorozat, amelyre $f(x_m) \not\to A$ ↯

■

1.2. Végesben vett határértékek

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0{+}0) = A \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0{-}0) = A \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\text{:} \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\Omega > 0\text{-hoz } \exists\,\delta(\Omega) > 0\text{:} \\ f(x) > \Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\[2ex] 2.\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty \\[2ex] 3.\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall\,\Omega > 0\text{-hoz } \exists\,\delta(\Omega) > 0\text{:} \\ f(x) < -\Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 1.\ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 2.\ 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\[1ex] 3.\ -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array}\right.$$

•••

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{6-2x} = -\infty}$

$$\frac{1}{6-2x} < -\Omega \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2x-6} > \Omega > 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 < x - 3 < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{6-2x} = +\infty}$

$$\frac{1}{6-2x} = \frac{1}{2(3-x)} \underset{3-x>0}{>} \Omega \quad\Longrightarrow\quad 2(3-x) < \frac{1}{\Omega} \quad\Longrightarrow\quad 3 - x < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

$$\left(-\delta(\Omega) = -\frac{1}{2\Omega} < x - 3 < 0\right)$$

1.3. Végtelenben vett határértékek

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, P(\varepsilon) > 0:$	$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$, ha $x > P(\varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, P(\varepsilon) > 0:$	$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$	$\forall\,\Omega > 0$-hoz $\exists\, P(\Omega) > 0:$	$f(x) > \Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\forall\,\Omega > 0$-hoz $\exists\, P(\Omega) > 0:$	$f(x) < -\Omega$, ha $x > P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\forall\,\Omega > 0$-hoz $\exists\, P(\Omega) > 0:$	$f(x) > \Omega$, ha $x < -P(\Omega)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall\,\Omega > 0$-hoz $\exists\, P(\Omega) > 0:$	$f(x) < -\Omega$, ha $x < -P(\Omega)$

M Az átviteli elv mindegyik típusra kiterjeszthető. A rendőrelv is alkalmazható.

•••

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+3}{2x-1} = \dfrac{3}{2}}$

$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$, ha $x < -P(\varepsilon)$

$$\left|\frac{3x+3}{2x-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6x+6-(6x-3)}{4x-2}\right| = \frac{9}{|4x-2|} < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad |4x-2| > \frac{9}{\varepsilon}$$

$$x < 0 \text{ miatt } -(4x-2) > \frac{9}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad -4x > \frac{9}{\varepsilon} - 2 \quad\Longrightarrow\quad x < -\frac{\frac{9}{\varepsilon} - 2}{4} = -P(\varepsilon)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \{x\} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \{x\} \nexists}$

Ugyanis

$x_n^{(1)} = n \to \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad f(x_n^{(1)}) = 0 \to 0$

$x_n^{(2)} = n + \dfrac{1}{2} \to \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad f(x_n^{(2)}) = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2} \neq 0$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\{x\}}{x^2+1} = 0}$

A rendőrelv segítségével:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le \frac{\{x\}}{x^2+1} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\{x\}}{x^2+1} \to 0, \text{ ha } x \to \pm\infty.$$

•••

1.4. Feladatok

1. A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy

   a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3x^2+1) = \infty$

   b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-3}{2x+4} = \dfrac{1}{2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{1}{(x-2)^3} = \pm\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$

   e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{1+x^2} = 3$

   f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+3x+5} = \infty$

2. Mutassa meg, hogy az alábbi határértékek nem léteznek!

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} [\sin^2 x]$

   d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, ha $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

•••

1.5. Műveletek függvények körében

$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Pl. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sin x$ $\quad (f \circ g)(x) = \sin^2 x$; $\quad (g \circ f)(x) = \sin x^2$

A határértékekre vonatkozó tételek:

T

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ha } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \text{ és } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B, \text{ akkor} \\ \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} (cf)(x) = c \cdot A \quad (= c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)) \\ \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = A + B \\ \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) \left(= \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B \\ \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{A}{B}, \text{ ha } B \neq 0 \end{array}}$$

B A számsorozatokra vonatkozó hasonló tételek alapján. Pl. az összegre:
A feltételek miatt:
$\forall x_n \to x_0 \quad (x_n \neq x_0, x_n \in D_f)$ sorozatra $f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B$
$\implies \quad \forall$ ilyen $x_n \to x_0$-ra: $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to A + B$. $\quad$ Stb.

M A tételek kiterjeszthetők minden határérték fajtára a számsorozatokhoz hasonlóan. Ugyanazok a határozatlan alakok is.

•••

Pl. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{(x-1)}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{(x+1)^2}_{\downarrow \atop 4} = 0$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}\,\dfrac{x-3}{x-3}\,\dfrac{x-2}{(x+3)^2}$

$$\lim_{x\to 3+0}\underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\,\underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\,\underbrace{\frac{x-2}{(x+3)^2}}_{\substack{\downarrow\\ \frac{3-2}{6^2}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0}\underbrace{\frac{1}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ -\infty}}\,\underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\,\underbrace{\frac{x-2}{(x+3)^2}}_{\substack{\downarrow\\ \frac{3-2}{6^2}}}=-\infty$$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2}\underset{\frac{30}{+0}}{=}\;=+\infty$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}\left(\sqrt{4+x}+2\right)=4$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{8+x}{3x^2+6}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underbrace{\dfrac{x}{3x^2}}_{=\frac{1}{3x}\to 0}\,\underbrace{\dfrac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}=0$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{6+3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underbrace{\dfrac{x^2}{3x^2}}_{=\frac{1}{3}}\,\underbrace{\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}=\dfrac{1}{3}$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9-2x^2}{3x+6}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underbrace{\dfrac{-2x^2}{3x}}_{\substack{=-\frac{2}{3}x\\ \downarrow\\ \mp\infty}}\,\underbrace{\dfrac{1-\frac{9}{2x^2}}{1+\frac{2}{x}}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}=\mp\infty$

(Pl.) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^9+6x^5+2x^2+3)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-x^9\underbrace{\left(1-\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{2}{x^7}-\dfrac{3}{x^9}\right)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}=\mp\infty$

Pl. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+8}-\sqrt{x^2+6x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x+8-(x^2+6x)}{\sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+6x}}=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{\frac{-3x}{\sqrt{x^2}}}_{=\frac{-3x}{|x|}=\frac{-3x}{\pm x}}\ \frac{1-\frac{8}{3x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{x}}}=(\mp 3)\cdot\frac{1}{1+1}=\mp\frac{3}{2}$$

1.6. Folytonosság

x_0: az értelmezési tartomány belső pontja ($\exists\, K_{x_0}\subset D_f$)

D f folytonos x_0-ban, ha $\exists\, f(x_0)$ és $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ \text{ha } |x-x_0|<\delta(\varepsilon)$$

Ezzel egyenértékű:

f folytonos x_0-ban, ha $\exists\, f(x_0)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ $\left(=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)\right)$

(Tehát a folytonossági helyeken a határátmenet és a függvényművelet felcserélhető.)

Jobbról folytonos f x_0-ban, ha : $f(x_0)=f(x_0+0)$

Balról folytonos f x_0-ban, ha : $f(x_0)=f(x_0-0)$

Beláthatók a következő tételek:

T Ha f illetve g folytonos x_0-ban, akkor

$c\cdot f, f+g, f\cdot g$ és $g(x_0)\neq 0$ esetén $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.

T Ha g folytonos x_0-ban és f folytonos $g(x_0)$-ban, akkor $f\circ g$ folytonos x_0-ban.

1.7. Szakadási helyek osztályozása

Ha az értelmezési tartomány belső pontjában f nem folytonos, akkor a szakadás lehet:

1. Elsőfajú szakadás

   a) megszüntethető szakadás: $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ (véges), de $\neq f(x_0)$ vagy $\nexists f(x_0)$

   b) véges ugrás: $\exists$ a véges $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$, de $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$

2. Másodfajú szakadás (lényeges szakadás): minden más szakadási hely

Pl. Milyen szakadása van $x=1$-ben az alábbi függvénynek?

$$f(x)=\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-2x^3+10x^2-18x+9}$$

$x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x^2-4)$
A nevezőnek is gyöke $x=1$, ezért kiemelhető belőle $(x-1)$.

$$(x^4-2x^3+10x^2-18x+9):(x-1)=x^3-x^2+9x-9$$

A hányadosnak még mindig gyöke $x=1$, így: $(x^3-x^2+9x-9):(x-1)=x^2+9$.
Tehát

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\substack{\downarrow\\ \pm\infty}}\ \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{\equiv 1}\ \underbrace{\frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2+9}}_{\substack{\downarrow\\ -\frac{3}{5}}}$$

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\mp\infty\ :\quad x=1$ másodfajú szakadás

Pl. Hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x+2|}+\dfrac{1}{x+2}, & \text{ha } x\leq -1\\[2ex] \dfrac{-x^3+x^2+4x-4}{1-x^2}, & \text{ha } x>-1\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$
$x=-2\ :$

Ha $x<-2\ :\ f(x)=\dfrac{1}{-(x+2)}+\dfrac{1}{x+2}\equiv 0\quad\Longrightarrow\quad f(-2-0)=0.$

Ha $-2<x\leq -1\ :\ f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x+2}\quad\Longrightarrow\quad f(-2+0)=+\infty.$

Így $x=-2$ lényeges (másodfajú) szakadás.

Ha $x > -1$: $f(x) = \dfrac{x^2(-x+1) + 4(x-1)}{(1-x)\,(1+x)} = \dfrac{1-x}{1-x}\,\dfrac{x^2-4}{1+x}$

$x = 1$:

$f(1+0) = f(1-0) = -\dfrac{3}{2}$: $x = 1$ megszüntethető szakadás ($\nexists f(1)$)

$x = -1$:

$f(-1-0) = f(-1) = 2$

$$f(-1+0) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1-x}{1-x}\,\underbrace{(x^2-4)}_{\substack{\downarrow\\ -3}}\,\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}} = -\infty$$

Tehát $x = -1$ másodfajú szakadás.

Pl. Mutassuk meg, hogy

$$x,\ x^2,\ x^n,\ P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

mindenütt folytonos!

L. előadás!

Feladatok

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+ax+1}\right) = ?$ $\qquad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt[4]{x^4+ax^2+2} - \sqrt[4]{x^4+bx^2+1}\right) = ?$ $\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\{\pi x\}}{\{x\}} = ?$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2\pm} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}} + \frac{1}{x-2}\right) = ?$

4. a) $\displaystyle\lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}} = ?$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{3x+4}-1} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = ?$

e) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1-\sqrt[6]{x-1}}{1-\sqrt[4]{x-1}} = ?$ (Próbálkozzon $u = \sqrt[12]{x-1}$ helyettesítéssel!)

5. Milyen típusú szakadásai vannak az

$$\frac{x^2-x-20}{|x^2-12x+35|\,(x+4)}$$

függvénynek?

6. Milyen típusú szakadása van $x=-1$-ben f-nek?

$$f(x) = \frac{x^4+2x^2-3}{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}$$

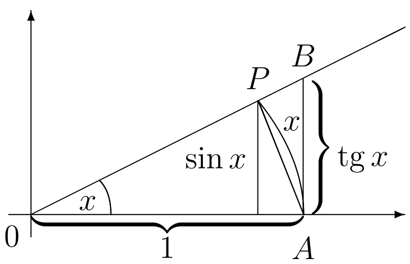
7. Hol és milyen típusú szakadása van f-nek?

$$f(x) = \frac{(x^2+2x-8)\,(x+4)}{|x^2+3x-10|\,(x^2+5x+4)}$$

1.8. Egy nevezetes határérték

(T)

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$



(B) Mivel $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ páros, elég $f(+0)$-val foglalkozni.

Legyen $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$T_{POA\triangle} < T_{POA\triangleleft} < T_{OAB\triangle}$$

$$\frac{1\cdot\sin x}{2} < \frac{1^2\cdot x}{2} < \frac{1\cdot\operatorname{tg} x}{2}$$

Mindkét oldalt $\dfrac{2}{\sin x} > 0$-val megszorozva:

$$\underset{\displaystyle 1}{\overset{\displaystyle 1}{\downarrow}} < \frac{x}{\sin x} < \underset{\displaystyle 1}{\overset{\displaystyle \frac{1}{\cos x}}{\downarrow}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{\sin x} \xrightarrow[+0]{x} 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x}$$

M Tehát $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$-ben $\quad \sin x < x \quad \Longrightarrow \quad |\sin x| \le |x| \quad \forall\, x$-re.

Pl. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\downarrow \atop 1^2} = \frac{2}{3}$$

Pl. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \frac{3}{2}$$

Pl. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \cdot \underbrace{\sin x}_{\downarrow \atop 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \underset{u := x - \frac{\pi}{2}}{=}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u}{\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{-u}{-\sin u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$$

Feladatok

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = ?$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin \sqrt[4]{x} \quad \sin \sqrt[4]{x^3}}{\sin \pi x} = ?$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = ?$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x} = ?$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = ?$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right) = ?$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2} = ?$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 2x}-1}{\sin^2 3x} = ?$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}-1} = ?$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = ?$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$

14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x} = ?$

15. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x} = ?$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}} \dfrac{1-\cos 5x}{5x-\pi} = ?$

17. Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2+3x+2)\ \sin|2-x|}{x^2-4}$$

függvénynek?

18. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x+3|} + \dfrac{1}{x+3}, & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

•••

2. Folytonos függvények tulajdonságai

Néhány definíció:

(D) f folytonos (a,b)-n, ha $\forall\ x \in (a,b)$ -ben folytonos.

(D) f folytonos $[a,b]$-n, ha folytonos (a,b)-n és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

(D) $b \in H$ belső pont, ha $\exists\, K_b :\ K_b \subset H$

(D) h határpont, ha $\forall\, K_h$-ra $K_h \cap H \neq \emptyset$ és $K_h \cap \overline{H} \neq \emptyset$

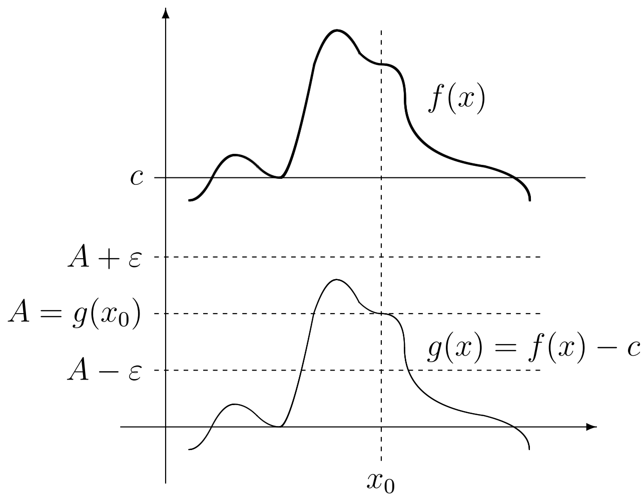
Ⓓ k külső pont, ha $\exists\, K_h: \ K_h \cap H = \emptyset$

Ⓓ Nyílt halmaz: minden pontja belső pont

Ⓓ Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere

Ⓓ **Kompakt halmaz** $\mathbb{R}$-ben: korlátos és zárt halmaz ($\mathbb{R}^n$-ben is érvényes a definíció)

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } f \text{ folytonos } x_0\text{-ban és } f(x_0) > c, \text{ akkor } \exists\, \delta > 0\text{: } f(x) > c, \text{ ha } x \in K_{x_0,\delta}.}$



Ⓑ $g(x) := f(x) - c$
g is folytonos x_0-ban és $g(x_0) > 0$.
Bizonyítandó, hogy $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$g(x) > 0 \quad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}$-ra.
$A := g(x_0)$. A folytonosság miatt:

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

$\varepsilon := \dfrac{A}{2} \longrightarrow \delta\left(\dfrac{A}{2}\right)$, hogy

$|g(x) - A| < \dfrac{A}{2}$, azaz $0 < \dfrac{A}{2} = A - \dfrac{A}{2} < g(x) \ \left(< A + \dfrac{A}{2}\right)$, ha $|x - x_0| < \delta\left(\dfrac{A}{2}\right)$.

Tehát itt $g(x) > \dfrac{A}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = g(x) + c > c + \dfrac{A}{2} > c$.

$\blacksquare$

Ⓣ **Bolzano tétel:**

$\boxed{\text{Ha } f \text{ folytonos } [a,b]\text{-ben és } f(a) < c < f(b), \text{ akkor létezik } \xi \in (a,b)\text{: } f(\xi) = c}$

Ⓑ

1. lépés:

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a,\ b_1 = \dfrac{a+b}{2},\ I_1 = [a_1, b_1]$

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \dfrac{a+b}{2},\ b_1 = b,\ I_1 = [a_1, b_1]$

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c \quad \Longrightarrow \quad \xi = \dfrac{a+b}{2}$. Ekkor vége az eljárásnak. Egyébként

$$f(a_1) < c < f(b_1), \quad [a,b] \supset I_1, \quad |a_1 - b_1| = \frac{|a-b|}{2}$$

2. lépés: Megismételjük az eljárást I_1-re, így kapunk egy $I_2 = [a_2, b_2]$ intervallumot: $f(a_2) < c < f(b_2), \quad [a,b] \supset I_1 \supset I_2, \quad |a_2 - b_2| = \dfrac{|a-b|}{4}$, vagy megkaptuk ξ értékét.
Ha ξ-t nem kaptuk meg, folytatjuk az eljárást.

$\vdots$

n. lépés:
$f(a_n) < c < f(b_n), \quad [a,b] \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$

A Cantor-axióma szerint: $\exists\, \xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, és $|a_n - b_n| = \dfrac{|a-b|}{2^n} \xrightarrow[\infty]{n} 0$

$0 \le |a_n - \xi| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|a_n - b_n|} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$ (rendőrelv)

$0 \le |b_n - \xi| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|a_n - b_n|} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ (rendőrelv)

f folytonossága és az átviteli elv alapján:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Másrészt a sorozatok határértékére vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk:
$f(a_n) < c \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le c$
$f(b_n) > c \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge c$
Tehát $f(\xi) \le c$ és $f(\xi) \ge c$, ami azt jelenti, hogy $f(\xi) = c$.

$\blacksquare$

1. Következmény:

Ha f folytonos $[a,b]$-ben és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van (a,b)-ben.

B A Bolzano tételben $c = 0$-hoz $\exists\, \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = c \quad \Longrightarrow \quad \xi$ gyöke az egyenletnek.

2. Következmény:

Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

B Legyen $f(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$, legyen $a_{2k+1} > 0$. $\Longrightarrow$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \Omega :\ f(\Omega) > 1$ és $\exists\, \omega :\ f(\omega) < -1$
A polinomok folytonosak midenütt, tehát $[\omega, \Omega]$-ban is, így az előző következmény szerint $\exists\, \xi \in (\omega, \Omega) :\ f(\xi) = 0$.

2.1. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

T **Weierstrass I. tétele**

$\boxed{\text{Ha } f \text{ folytonos az } [a,b] \text{ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott } f \text{ korlátos.}}$

B Indirekt:

Tfh. nem korlátos pl. felülről, tehát $\nexists K: \ f(x) \le K$ teljesüljön $\forall\, x \in [a,b]$-re.

$$\begin{array}{llll} \text{Ekkor} & \exists\, x_1: & x_1 \in [a,b], & f(x_1) > 1 \\ & \exists\, x_2: & x_2 \in [a,b], & f(x_2) > 2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \exists\, x_n: & x_n \in [a,b], & f(x_n) > n \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

(x_n) sorozat korlátos ($\forall\, x_n \in [a,b]$) $\overset{\text{B.W. kiv. t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konv. részsorozat: $(x_{n_i}) \to x_0$.
Mivel $a \le x_{n_i} \le b$ mindig fennáll, ezért $a \le \lim\limits_{n_i \to \infty} x_{n_i} = x_0 \le b$. Tehát $x_{n_i} \to x_0 \in [a,b]$, de $f(x_{n_i}) \to \infty$ $\lightning$ f folytonos x_0-ban, ezért $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$.

■

T **Weierstrass II. tétele:**

Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor ott felveszi az infimumát ill. szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x): \ x \in [a,b]\} \qquad \left(= \max_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \max f([a,b])\right)$$

$$f(\beta) = \inf\{f(x): \ x \in [a,b]\} \qquad \left(= \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = \min f([a,b])\right)$$

B $A := f([a,b])$.

Weierstrass I. tétele értelmében A korlátos $\overset{\text{Dedekind}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $\sup A := M$; $\inf A := m$.
Megmutatjuk, hogy $\exists\ \alpha, \beta \in [a,b]: \ f(\alpha) = M, \ f(\beta) = m$.
Bizonyítás $f(\alpha) = M$-re: indirekt. (Hasonlóan lehetne $f(\beta) = m$-re.)
Tfh. $\nexists\, \alpha \in [a,b]: \ f(\alpha) = M \quad \Longrightarrow \quad M - f(x) > 0$, ha $x \in [a,b]$
$\Longrightarrow \ g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ folytonos $[a,b]$-ben $\overset{\text{W. I. t.}}{\Longrightarrow}$ g korlátos $[a,b]$-ben, tehát $\exists\, K$:

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \quad x \in [a,b] \qquad \left(K > 0, \ \frac{1}{M - f(x)} > 0\right)$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{K}}_{\text{felső korlát}} < M \text{ (legkisebb felső korlát)} \quad \lightning$$

■

Pl. $f(x) = x^2 + 2$

1. Mutassuk meg, hogy $\forall\, x_0 \in [1,2]$-ben folytonos a függvény!
2. Megadható-e közös $\delta(\varepsilon)$? (Létezik-e $\inf\limits_{x_0\in[1,2]} \delta(\varepsilon, x_0) > 0$?)

Megoldás:

1. $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 + 2 - (x_0^2 + 2)| = |x - x_0||x + x_0| < |x - x_0|(2|x_0| + 1) < \varepsilon$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

2. $\delta(\varepsilon, x_0) = \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \underset{x_0\,\in\,[1,2]}{\geq} \dfrac{\varepsilon}{2\cdot 2 + 1} = \dfrac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon, 2)$ a közös $\delta(\varepsilon)$

2.2. Egyenletes folytonosság

D Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)$ (A-ban közös):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta; \quad x_1, x_2 \in A$$

M1 Tehát $\exists \inf\limits_{x\in A} \delta(\varepsilon, x) > 0$

M2 Az A halmaz általában intervallum szokott lenni.

Pl. $f(x) = x^2 + 2$

1. Egyenletesen folytonos-e f az $[1,2]$ intervallumon?
2. Egyenletesen folytonos-e f az $(1,2)$ intervallumon?
3. Egyenletesen folytonos-e f az $(1,\infty)$ intervallumon?

Megoldás:

1. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel (lásd előző példa)
2. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Ami a zárt intervallumhoz megfelel, az a nyílthoz is mindig jó.) Általánosságban is igaz, hogy ha f egyenletesen folytonos I-n (nyílt vagy zárt), akkor $I_1 \subset I$ esetén I_1-en is egyenletesen folytonos. Ugyanaz a δ megfelel.

3. f nem egyenletesen folytonos $(1,\infty)$-en.

$x_n^{(1)} := n \to \infty\,,\quad x_n^{(2)} := n+\dfrac{1}{n} \to \infty\,,\quad x_n^{(2)}-x_n^{(1)} = \dfrac{1}{n} \to 0\,;$ egymást tetszőlegesen megközelítik, ha n-et elegendően nagynak választjuk.

Mégis

$$\left|f\left(x_n^{(2)}\right)-f\left(x_n^{(1)}\right)\right| = \left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^2+2-(n^2+2)\right| = 2+\frac{1}{n^2} > 2.$$

Tehát, ha $\varepsilon < 2$, nincs közös δ.

Pl. $\boxed{f(x) = x \text{ egyenletesen folytonos } (-\infty,\infty)\text{-en.}}$

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |x_1-x_2| < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

Pl. $\boxed{f(x) = \sin x \text{ egyenletesen folytonos } (-\infty,\infty)\text{-en.}}$

Felhasználjuk, hogy

$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,,$ ill. $|\sin x| \le |x|$.

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |\sin x_1-\sin x_2| = \left|2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| \le$$

$$\le 2\cdot\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\cdot 1 \le 2\frac{|x_1-x_2|}{2} = |x_1-x_2| < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

M Ezzel persze azt is beláttuk, hogy $\sin x$ mindenütt folytonos.

Pl. $\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x \text{ egyenletesen folytonos } \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\text{-on.}}$

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{\sin x_1}{\cos x_1}-\frac{\sin x_2}{\cos x_2}\right| = \left|\frac{\sin(x_1-x_2)}{\cos x_1\cdot\cos x_2}\right| \le \frac{|x_1-x_2|}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2} = 4|x_1-x_2| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow\quad \delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ nem egyenletesen folytonos } (0,1)\text{-en.}}$

$$x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \to 0, \quad x_n^{(2)} := \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0.$$

Ugyanakkor

$$\left| f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)}) \right| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon \,, \quad \text{ha} \ \ \varepsilon < 1$$

Pl. $\boxed{f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ nem egyenletesen folytonos } (0,1)\text{-en.}}$

$$x_n^{(1)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0, \quad x_n^{(2)} := \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$$

$$\left| f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)}) \right| = \left| \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(3\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right| = |1 - (-1)| = 2 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon \le 2.$$

T: Ha f folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. ($\neg$B)

T: Ha f folytonos $[a, \infty)$ -en és $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ (véges), akkor f egyenletesen folytonos $[a,\infty)$-en. ($\neg$B)

Pl. $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Egyenletesen folytonos-e $(1,10)$-en?

Megoldás:
Mivel P_n folytonos $[1,10]$-en $\Longrightarrow$ P_n itt egyenletesen folytonos
$\Longrightarrow$ P_n az $(1,10) \subset [1,10]$-en is egyenletesen folytonos.

Feladatok

1. $$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

   a) Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?

   b) Van-e minimuma f-nek a $[-1,0]$ intervallumon?

2. $$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{\cos x}$$

   a) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = ?$ $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = ?$

   b) Bizonyítsa be, hogy f-nek van gyöke $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben!

3. Legyen f folytonos $(-\infty,\infty)$-en és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

   Bizonyítsa be, hogy f korlátos $(-\infty,\infty)$-en! Van-e nullahelye f-nek?

4. a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$?

b) Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos a $[2,\infty)$ intervallumon és

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 5, \qquad \sup_{x\in(2,\infty)} f(x) = 6,$$

akkor f értékkészletében szerepel a 6.

5. Van-e gyöke az alábbi egyenletnek a $(0,\pi)$-ben?

$$\frac{1}{x}(\cos^2 x + 1) + \frac{1}{x-\pi}(\sin^2 x + 1) = 0$$

6. $f(x) = 2x^3 - 3$

a) Mutassa meg a határérték definíciója alapján, hogy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 13$ $(\delta(\varepsilon) = ?)$

b) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1,4)$ intervallumon?

c) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1,\infty)$ intervallumon?

3. Differenciálszámítás

D **Differenciahányados (különbségi hányados):**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\text{függvényérték megváltozása}}{\text{független változó megváltozása}} : \text{ húr iránytangense} \right)$$

$\Delta x \to 0$ esetén a húrok átmennek az érintőbe, ha létezik

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{differenciálhányados (derivált)} = \text{az érintő iránytangense.}$$

D Legyen $K_{x_0,\delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

D <u>Jobb oldali derivált:</u> $f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ⓓ Bal oldali derivált: $f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ⓜ $f'(x_0)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists\, f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Ⓓ f differenciálható (a,b)-ben, ha $\exists\, f'(x)\ \forall\, x \in (a,b)$-re.

Ⓓ f differenciálható $[a,b]$-ben, ha differenciálható (a,b)-ben és még $\exists\, f'_+(a), f'_-(b)$.

Példák: ... (l. előadás!)

Ⓣ Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:

f akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $K_{x_0,\delta} \subset D_f$, $|h| < \delta$-ra:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A csak x_0-tól függhet, h-tól nem, és $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

Ⓑ

1. Szükségesség:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

   ahol $\varepsilon \to 0$, ha $h \to 0$. $\quad \Longrightarrow \quad (\Delta f =)\, f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon \cdot h.$

2. Elégségesség:
   $f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$ teljesül. Innen

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A \quad (= f'(x_0))$$

■

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } f \text{ differenciálható } x_0\text{-ban, akkor ott folytonos.}}$

Ⓜ Tehát a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, de nem elégséges. Lásd $|x|$.

Ⓑ A szükséges és elégséges tétel alapján:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

Mindkét oldalon határértéket veszünk. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$-ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos. ■

Pl. $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = ?$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2x \cdot h + h \cdot h = A \cdot h + \varepsilon \cdot h$$

$A = f'(x) = 2x$ (független h-tól), $\quad \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

3.1. Differenciál, érintő egyenes

Ha f differenciálható x_0-ban:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\text{elenyésző rész}}$$

D Az f függvény (elsőrendű) differenciálja az x_0 pontban h megváltozás mellett: $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(x_0, h) := f'(x_0) \cdot h$

M $\mathrm{d}f(x_0, h)$: a függvény x_0-beli érintő egyenesén a függvényérték megváltozása h lépésre.

Egyéb jelölések:

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x; \quad \mathrm{d}f = f'(x)\Delta x = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Pl. $f(x) = x^3$: $\mathrm{d}f = 3x^2 \Delta x$, tehát $\mathrm{d}x^3 = 3x^2 \Delta x$

Pl. $f(x) = x$: $\mathrm{d}f = 1 \cdot \Delta x$, tehát $\mathrm{d}x = \Delta x$. Ez indokolja a differenciál legutolsó jelölését.

Alkalmazása:

$\Delta f \approx \mathrm{d}f$:

$$f(\underbrace{x_0 + h}_{:=x}) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: az x_0 pontbeli érintő egyenes egyenlete.

3.2. Differenciálási szabályok

(T1) Ha f és g differenciálható x-ben, akkor itt $f+g$, $cf (c \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ is differenciálható valamint $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható, és

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
2. $(cf(x))' = cf'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(B)

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
   $z(x) := f(x)+g(x)$

$$z'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h)-z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) = f'(x)+g'(x)$$

2. $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$

$$(cf(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)=$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\underset{\substack{\downarrow\\ f'(x)}}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ g(x)}}{g(x+h)}\ +\ \underset{\substack{\downarrow\\ f(x)}}{f(x)}\ \underset{\substack{\downarrow\\ g'(x)}}{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right)$$

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:

g deriválható x-ben $\Longrightarrow$ g folytonos x-ben

4. $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}=$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\underset{\substack{\downarrow\\ g(x)}}{g(x+h)}\ \underset{\substack{\downarrow\\ g(x)}}{g(x)}}\ \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow\\ g'(x)}}=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$: g folytonossága miatt

($g(x)\neq 0$ és g folytonos x-ben (mivel deriválható) $\Longrightarrow$ $\exists\, K_x:\ g(x)\neq 0$ (lásd a Bolzano tétel előtti segédtételt). Tehát elegendően kis h-ra $g(x+h)\neq 0$.)

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ez már következik az előző két pontból:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=$$

$$=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Láncszabály: összetett függvény deriválása

(T$_2$) Ha f differenciálható K_{x,δ_1}-ben és g differenciálható $K_{f(x),\delta_2}$-ben, akkor $g \circ f$ is differenciálható x-ben és

$$((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (\neg B)$$

(T$_3$) Ha f folytonos $K_{x_0,\delta}$-ban, $x \in K_{x_0,\delta} \setminus \{x_0\}$ (tehát $x \in \dot{K}_{x_0,\delta}$) esetén $\exists\, f'(x)$ és $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = c$, akkor f differenciálható x_0-ban és $f'(x_0) = c$. (¬B)

(Pl.) $f(x) = (2x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 5}$

$$f'(x) = (2x^2+3)'\sqrt{x^2+5} + (2x^2+3)\left(\sqrt{x^2+5}\right)' = 4x\sqrt{x^2+5} + (2x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot 2x$$

(Pl.) $f(x) = \dfrac{x^7 + x^2 + 5}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \frac{(x^7+x^2+5)'\sqrt{x^4+2x^2+1} - (x^7+x^2+5)\left(\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{(7x^6+2x)\sqrt{x^4+2x^2+1} - (x^7+x^2+5)\dfrac{1}{2\sqrt{x^4+2x^2+1}} \cdot (4x^3+4x)}{x^4+2x^2+1}$$

•••

Magasabbrendű deriváltak: ... (l. előadás!)

•••

3.3. Inverz függvény

Inverz függvény fogalma, tulajdonságai. példák: ... (L. előadás!)

Inverz függvény deriválása

Legyen	f szigorúan monoton I-ben	$\Longrightarrow$	invertálható
	f differenciálható I-ben	$\Longrightarrow$	f folytonos I-ben
	és $f'(x) \neq 0$ I-ben.		

A feltételek miatt belátható, hogy $f(I)$ is intervallum. Ekkor f^{-1} differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában (x_0) és

$$f^{-1'}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f^{-1'}(f(x_0))}$$

A tételt nem bizonyítjuk, csak szemléltetjük. L. előadás!

4. Elemi függvények

L. előadás!

Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$(-\infty,+\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0,\pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0,+\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,+\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$

4.1. Példák

(Pl.) $f(x) = \pi - \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$

1. $D_f = ?$ $\qquad R_f = ?$
2. Írja fel az $x_0 = \dfrac{4}{5}$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!
3. Mutassa meg, hogy f-nek létezik az inverze és határozza meg! ($f^{-1}(x) = ?$)

Megoldás:

1. $0 \le \dfrac{1}{x} - 1 \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le \dfrac{1}{x} \le 2 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1: \quad D_f = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

   Itt $0 \le \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \le \dfrac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\pi}{2} \le \pi - \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \le \pi: \quad R_f = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)}} \quad \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$x_0 = \frac{4}{5}; \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}}} \cdot \frac{-5^2}{4^2} = \frac{-25}{8\sqrt{3}}$$

$$y_é = f\left(\frac{4}{5}\right) + f'\left(\frac{4}{5}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{25}{8\sqrt{3}}\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

3. $\frac{1}{2} \le x_1 < x_2 \le 1$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton csökken $\Longrightarrow$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en
   (Vagy:
   $f' < 0$ $D_f = I$-n $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton csökken $\Longrightarrow$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en)

   $y = \pi - \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \quad \Longrightarrow \quad \arccos\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} = \pi - y$

   $\Longrightarrow \quad \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} = \cos(\pi - y) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x} - 1 = \cos^2(\pi - y)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 + \cos^2(\pi - y) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - y)} \qquad (x \leftrightarrow y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\ ; \qquad R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Pl. Legyen

$$f(x) = -\frac{\pi x}{3} + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in (2, \infty)$$

1. $f'(x) = ?$
2. Indokolja meg, hogy a függvénynek létezik az inverze! Határozza meg az inverz függvény értelmezési tartományát!

   Ellenőrizze, hogy f^{-1} grafikonja átmegy a $\left(-\frac{7\pi}{6}, 4\right)$ ponton!
3. Írja fel az inverz függvénynek ezen a ponton áthaladó érintő egyenese egyenletét!

Megoldás:

1. $f'(x) = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \frac{-2}{x^2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{x\sqrt{x^2 - 4}}$, ha $x > 2$.

2. $2 < x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton csökken $\Longrightarrow$ $\exists\, f^{-1}$ D_f-en
   (Vagy:
   $x > 2$-re $f'(x) < 0$ $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton csökken $\Longrightarrow$ invertálható)

   $x \in (2, \infty)$-re $\frac{2}{x} \in (0, 1) \Longrightarrow \arcsin\frac{2}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   $$\Longrightarrow \quad R_f = \left(-\infty, \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\infty, \frac{-\pi}{6}\right) = D_{f^{-1}}$$

   Mivel $f(4) = -\frac{4\pi}{3} + \arcsin\frac{1}{2} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 4$

3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$f^{-1\prime}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{4\sqrt{4^2-4}}} = -\frac{12}{4\pi+\sqrt{3}}$$

$$y = \underbrace{f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}_{=4} + f^{-1\prime}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\left(x - \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4 + \frac{-12}{4\pi+\sqrt{3}}\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

Pl.

> $$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right)$$
> Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Mutassa meg, hogy a teljes értelmezési tartományban létezik az inverze, és írja fel az inverz függvényt!

Megoldás:

$D_f = \{x : |2x-5| \le 1\} = [2,3]$, mert akkor $\left|\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right| \le \frac{\pi}{6}$ miatt tg is értelmezett.

D_f-en $\frac{\arcsin(2x-5)}{3}$ értékkészlete $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \implies R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Mivel $2x-5$, arcsin és tg is szigorúan monoton növő, ezért f is az D_f-en $\implies D_f$-en $\exists\, f^{-1}$

$$y = \operatorname{tg}\underbrace{\frac{\arcsin(2x-5)}{3}}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \implies \operatorname{arctg} y = \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \implies 2x-5 = \sin(3\operatorname{arctg} y)$$

$$\implies x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\operatorname{arctg} y)$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\operatorname{arctg} x)\,; \qquad D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\,; \qquad R_{f^{-1}} = D_f = [2,3]$$

Pl.

> $$f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)}$$
> Adja meg az $x = 5$ pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és írja fel itt az inverz függvényt!
> $D_{f^{-1}} = ?\quad R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás:
$x \in (4,6)$ esetén $\quad \dfrac{\pi}{4}x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}x \in (0,\infty) = D_{\ln}$
Tehát $f:\ (4,6) \to (-\infty,\infty)$ egy-egyértelmű, mert az összetételben szereplő függvények mindegyike szigorúan monoton nő az érintett intervallumon $\Longrightarrow$ f szigorúan monoton nő $\Longrightarrow$ $\exists\, f^{-1}$.
Az inverz:

$$y = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)} \quad \Longrightarrow \quad y^3 = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{(y^3)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}x - \pi}_{\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(y^3)} = \frac{\pi}{4}x - \pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(y^3)} + 4$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{(x^3)} + 4\,; \qquad D_{f^{-1}} = (-\infty,\infty)\,; \qquad R_{f^{-1}} = (4,6)$$

•••

5. A differenciálszámítás középértéktételei

5.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére

(Differenciálható függvényre, az értelmezési tartomány belső pontjában)

(D) f-nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső c pontjában, ha $\exists\ K_{c,\delta}:\ f(x) \le f(c)\ \ (f(x) \ge f(c))$, ha $x \in K_{c,\delta}$.

(T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. $(K_{c,\delta} \subset D_f)$

(B) Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\substack{\ge \\ =}} = \underbrace{f'_{-}(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \quad \ge 0$$

$$\lim_{h \to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad$ (vízszintes érintő) ■

5.2. A differenciálszámítás középértéktételei

(T) Rolle tétel:

Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists\ \xi \in (a,b) : \quad f'(\xi) = 0$$

(B) Weierstrass II. tétele értelmében f-nek van minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv$ konst. és így $\forall\, \xi \in (a,b)$-re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(\xi) = 0$ (ξ a szélsőértékhely).

■

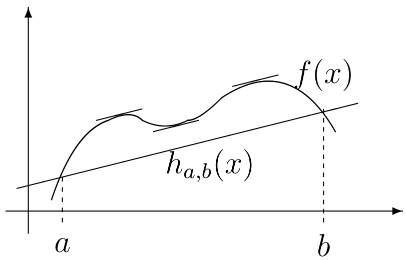
(T) Lagrange-féle középértéktétel:

Ha f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(B) $h_{a,b}(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = h(x)$

$g(x) := f(x) - h(x) \qquad g(a) = g(b) = 0;$
g folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n



$$\overset{\text{Rolle t.}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \xi \in (a,b) :\ g'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{h'(\xi)} = 0$$

■

(T) Cauchy-féle középértéktétel:

Ha f és g folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

(B) $h(x) := (f(b)-f(a))\ g(x) - (g(b)-g(a))\ f(x)$

$$h(a) = (f(b)-f(a))\ g(a) - (g(b)-g(a))\ f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$
$$h(b) = (f(b)-f(a))\ g(b) - (g(b)-g(a))\ f(b) = -f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

h folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és
$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \quad \overset{\text{Rolle t.}}{\Longrightarrow} \quad \exists\,\xi \in (a,b):\ h'(\xi) = 0$, vagyis

$$(f(b)-f(a))\ g'(\xi) - (g(b)-g(a))\ f'(\xi) = 0$$

$g(b)-g(a) \neq 0$, ellenkező esetben $g(a) = g(b)$ miatt g-re alkalmazható lenne a Rolle tétel és akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$, melyre $g'(\xi) = 0$ lenne. Így rendezéssel megkapjuk az állítást.

■

(M)

A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete $(g(x) = x)$, a Rolle tétel pedig a Lagrange speciális esete.

(T) Ha f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor

$$f(x) \equiv c \qquad x \in [a,b]\text{-re}$$

(B) A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall\,[x_1,x_2] \subset [a,b]$-re $\exists\ \xi \in (x_1,x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\,, \qquad \xi \in (a,b)$$

De mivel $f'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \forall\,x_1 \neq x_2$-re $\quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv$ konst.

■

(T) Az integrálszámítás alaptétele:

Ha f és g folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és

$$f'(x) = g'(x), \qquad \text{ha } \ x \in (a, b),$$

akkor $\exists\ C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Tehát csak egy állandóban különböznek.

(B) $h(x) := f(x) - g(x)$-re kell alkalmazni az előző tételt.

■

5.3. Feladatok

1. Alkalmazható-e az

$$f(x) = x \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$$

függvényre a Lagrange-féle középértéktétel a $[-1, 1]$ intervallumon?

2. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az

$$f(x) = |\operatorname{arctg} x|$$

függvényre a $[-1, 1]$ intervallumon?

3. Alkalmazható-e f-re a Lagrange-féle középértéktétel?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad -1 \leq x \leq 0$$

Ha igen, $\xi = ?$

4. Határozza meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x - 2{,}1)(x - 2{,}3)(x - 2{,}5)(x - 2{,}7)$$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

5. Bizonyítsa be, hogy

a) $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|\,, \quad$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.

b) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$, ahol $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{tg} x - 1 > 2x - \dfrac{\pi}{2}$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$

d) $\operatorname{arsh}(1+x^2) < 1 + \operatorname{arsh} x^2$

e) $\sin x \le \left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

6. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{\pi}{4}(x-1), & x \ne 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$

a) Adja meg b értékét úgy, hogy f-re a $[0,1]$ intervallumon alkalmazható legyen a Rolle-féle középértéktétel!

b) Keressen egy olyan értéket, amely a Rolle-tétel értelmében létezik!

6. L'Hospital szabály

($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ alakra alkalmazható közvetlenül.)

(T) Legyen f és g differenciálható $\dot{K}_{\alpha,\delta}$-ban és itt $g(x) \ne 0$, $g'(x) \ne 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$$

Ha $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

(Itt $\alpha = x_0,\ x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty$ lehet, $\beta = b,\ +\infty, -\infty$ lehet).

(B) $\alpha = x_0$-ra bizonyítjuk.

$f(x_0) := 0,\ g(x_0) := 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{(Cauchy-féle k.é.t.)} \quad \xi \in (x, x_0) \quad (\text{ill. } \xi \in (x_0, x))$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ ha ez utóbbi létezik (véges vagy } \infty)$$

■

Hasonló tétel bizonyítható $\frac{\infty}{\infty}$ alakra is.

Határozatlan alakok:

$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$: L'H közvetlenül alkalmazható.

$0 \cdot \infty$: átalakítás után: $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ alakkal próbálkozunk.

$\infty - \infty$: $h(x) := \dfrac{1}{f(x)},\ k(x) := \dfrac{1}{g(x)},\quad f(x) - g(x) = \dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{k(x)} = \dfrac{k(x) - h(x)}{h(x)\, k(x)} \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$: $\quad (f(x))^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

$g(x) \cdot \ln f(x)$ határozatlan alakra már a megismert módon dolgozhatunk.

Példák:

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{n x^{n-1}}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \dots \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{n!}{\mathrm{e}^x} = 0 \qquad (n \text{ lépés})$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{x - \dfrac{\pi}{2}}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - x \mathrm{e}^{\cos x}}{-1 - \sin x + \cos x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \cos 3x - \mathrm{e}^{\cos x} + x \mathrm{e}^{\cos x} \sin x}{-\cos x - \sin x} = \dfrac{3 - \mathrm{e}}{-1}$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{3x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{6x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x}{6} = \dfrac{1}{6}$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} \left(\dfrac{\pi}{2} x\right)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} x\right)} \cdot \dfrac{\pi}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1 + x \mathrm{e}^x}$

$\overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x \mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{2}$

Pl. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\ln (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 5x} = ?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{x^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5\sin 5x}{\cos 5x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-25}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=-\frac{25}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{25}{2}}$$

Pl. $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}=?}$

$$(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}=\mathrm{e}^{\ln(1+\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}}=\mathrm{e}^{\frac{3\ln(1+\cos x)}{\operatorname{ctg} x}}\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{}\mathrm{e}^{3\cdot 1}=\mathrm{e}^3\text{, mert}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\operatorname{ctg} x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}=1$$

Pl. Legyen $f(x)=(\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$, ha $x\in(0,1]$, $\quad f(0)=b$.

1. $f'(x)=?$, ha $x\in(0,1)$
2. $\lim_{x\to 0+}f(x)=?$
3. Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f-re alkalmazható legyen a Lagrange-féle középértéktétel a $[0,1]$ intervallumon?

   (Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!)

Megoldás:

1. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^4}\ln\cos x^2}$

   $$f'(x)=(\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}\left(\frac{\ln\cos x^2}{x^4}\right)'=$$

   $$=(\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}\quad\frac{\frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)\cdot 2x\cdot x^4-(\ln\cos x^2)\cdot 4x^3}{x^8}$$

2. $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\cos x^2}{x^4}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0+}\frac{-1}{2\cos x^2}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}=-\frac{1}{2}$$

   $$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^4}\cdot\ln\cos x^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

3. Ha $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, azaz $b=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, akkor f folytonos $[0,1]$-ben és differenciálható $(0,1)$-ben, így alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel.

Pl. A derivált definíciója alapján mutassa meg, hogy az
$$f(x)=\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$$
függvénynek az $x=0$-ban létezik a jobb oldali deriváltja!
Írja fel az $x=0$ pontbeli jobb oldali érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}-1}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}}\operatorname{sh}\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{x}}}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{4},$$

mert $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}u}{u}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}u}{1}=1$, és most $u=\sqrt{x}\to 0$.

$$y_{\text{é}}=f(0)+f'_+(0)(x-0)=1+\frac{1}{4}x,\qquad x\ge 0$$

7. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

M $I=(a,b)\quad(-\infty,\infty)$ is lehet

Néhány definíció:

D f monoton nő I-n: $\forall\, x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2:\ f(x_1)\le f(x_2)$.

D f szigorúan monoton nő I-n: $\forall\, x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2:\ f(x_1)<f(x_2)$.

D f monoton csökken I-n: $\forall\, x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2:\ f(x_1)\ge f(x_2)$.

D f szigorúan monoton csökken I-n: $\forall\, x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2:\ f(x_1)>f(x_2)$.

D f alulról konvex I-n, ha $\forall\, x_1,x_2\in I$-re $f(x)\le h_{x_1,x_2}(x)$, ha $x\in(x_1,x_2)$.
(h_{x_1,x_2} az x_1-en és x_2-n áthaladó húr)

(D) f alulról konkáv I-n, ha $\forall\, x_1, x_2 \in I$-re $f(x) \geq h_{x_1,x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
(h_{x_1,x_2} az x_1-en és x_2-n áthaladó húr)

(D) f-nek x_0-ban inflexiós pontja van, ha ott folytonos, és konvex és konkáv szakaszok találkoznak itt.

(T_1) Ha f differenciálható I-n:

1. f monoton nő $\iff$ $f'(x) \geq 0$
2. f szigorúan monoton nő $\Longleftarrow$ $f'(x) > 0$
3. f monoton csökken $\iff$ $f'(x) \leq 0$
4. f szigorúan monoton csökken $\Longleftarrow$ $f'(x) < 0$

(B)

1. $\Longrightarrow$:
f monoton nő $\Longrightarrow$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ $\quad \left(\frac{+}{+} \text{ vagy } \frac{-}{-} \text{alakú}\right)$
$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

$\Longleftarrow$:
$x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$: $[x_1, x_2]$-ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$ (a feltétel miatt) $\quad \xi \in (x_1, x_2)$.
Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$.

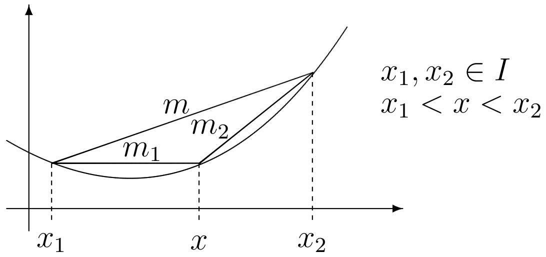
2. Bizonyítása lényegében megegyezik az előzővel.
Itt $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$-ból következik, hogy $f(x_2) > f(x_1)$. Tehát szigorúan monoton.

■

(T_2) Ha f differenciálható I-n:

1. f' monoton nő $\iff$ f konvex
2. f' monoton csökken $\iff$ f konkáv

Ⓑ



1. Csak $\Longleftarrow$ irányban bizonyítjuk.
   Az ábra alapján a konvexitásból következik, hogy $\forall\, x \in (x_1, x_2)$-re:

   $$m_1 \le m \le m_2.$$

   Így $\lim\limits_{x\to x_1} m_1 = f'(x_1) \le m \le f'(x_2) = \lim\limits_{x\to x_2} m_2$, vagyis $f'(x_1) \le f'(x_2)$, tehát f' monoton nő.

∎

Ⓜ

$$f'(x_1) \le m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$$

Ebből
$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \forall\, x_1 < x_2$-re, ill.
$f(x_1) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \forall\, x_1 < x_2$-re.
Tehát konvex görbe az érintője felett halad az érintési pontot kivéve.
(Konkáv görbe pedig az érintője alatt halad az érintési pontot kivéve.)

T_3 Ha f kétszer differenciálható I-n:

1. $f''(x) \ge 0 \iff f$ konvex
2. $f''(x) \le 0 \iff f$ konkáv

Ⓑ

1. $f''(x) \ge 0 \overset{T_1\text{ miatt}}{\Longrightarrow} f'$ monoton nő $\overset{T_2\text{ miatt}}{\Longrightarrow} f$ konvex
   $f''(x) \ge 0 \overset{T_1\text{ miatt}}{\Longleftarrow} f'$ monoton nő $\overset{T_2\text{ miatt}}{\Longleftarrow} f$ konvex

∎

Ⓜ Az állítások igazak maradnak, ha I zárt és f a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Példák

(Pl.) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{7}{2}x^2+6x}$

$$f'(x)=x^2-7x+6=(x-6)(x-1) \qquad f''(x)=2x-7$$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,6)$	6	$(6\,,\,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f(1)=\frac{17}{6} \qquad f(6)=-18$$

x	$\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2},\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$$f\left(\frac{7}{2}\right)<0$$

(Pl.) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-(4x+1)$

1. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f monoton növekedő, illetve fogyó.
2. Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv.

Megoldás:

$$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-4=0 \implies \mathrm{e}^{2x}=2 \implies 2x=\ln 2 \implies x=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

x	$(-\infty,\ln\sqrt{2})$	$\ln\sqrt{2}$	$(\ln\sqrt{2},\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f''(x)=4\mathrm{e}^{2x}>0$$

f monoton csökken $(-\infty,\ln\sqrt{2})$-n, monoton nő $(\ln\sqrt{2},\infty)$-en.
f konvex $(-\infty,\infty)$-en.

(Pl.) Legyen

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x-1}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f monoton nő, f monoton csökken, f konvex, f konkáv!

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Nem intervallum!)

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - (\mathrm{e}^x - 2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1)^2 - \mathrm{e}^x\,2(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^4}\,(1 - \mathrm{e}^{2x})$$

$f'(x) > 0$: f szigorúan monton nő a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumon.
$f''(x) > 0$, ha $x < 0$: $(-\infty, 0)$ intervallumon f konvex
$f''(x) < 0$, ha $x > 0$: $(0, \infty)$ intervallumon f konkáv

8. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

(D) f x_0-ban lokálisan növekedő, ha $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$x \in (x_0 - \delta, x_0)$-ra $f(x) \le f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0 + \delta)$-ra $f(x_0) \le f(x)$.

(D) f x_0-ban lokálisan csökkenő, ha $\exists\, K_{x_0,\delta}$:
$x \in (x_0 - \delta, x_0)$-ra $f(x) \ge f(x_0)$ és $x \in (x_0, x_0 + \delta)$-ra $f(x_0) \ge f(x)$.

(T) Ha f differenciálható x_0-ban és

1. f lokálisan nő x_0-ban $\Longrightarrow$ $f'(x_0) \ge 0$
2. f lokálisan nő x_0-ban $\Longleftarrow$ $f'(x_0) > 0$

(B)

1. $$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{-}{-}} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \ge 0$$

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{+}{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \ge 0$$

2. $$\underbrace{f'(x_0)}_{A} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \qquad \left(A - \varepsilon < \circledast < A + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2}\right)$$

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{3}{2} f'(x_0)\,, \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$$

Tehát $K(x_0,\delta)$-ban $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ lokálisan nő x_0-ban.

■

(T) $K(x_0,\delta) \subset D_f$ (belső pont); $\quad K(x_0,\delta) \subset D_{f'}$

Differenciálható függvény esetén *lokális szélsőérték* létezésének

1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$
2. elégséges feltétele:
   a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0-ban)
   b) Ha f kétszer differenciálható x_0-ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$
   ($f''(x_0) > 0$: lok. min.; $f''(x_0) < 0$: lok. max.)

(B)

1. a Rolle tétel előtt volt
2. a) f' lokálisan csökken:

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f'	$+\ (\geq 0)$	0	$-\ (\leq 0)$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

f' lokálisan nő:

	$(x_0-\delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0+\delta)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

(M) A tétel csak elégséges, ezt mutatja az alábbi példa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

b) $f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ lok. nő x_0-ban és $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ lok. min.
$f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f'$ lok. csökken x_0-ban és $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow$ lok. max.

■

(T) $K(x_0,\delta)\subset D_{f''}$

Kétszer differenciálható függvény esetén *inflexiós pont* létezésének

1. szükséges feltétele: $f''(x_0)=0$
2. elégséges feltétele:
   a) $f''(x_0)=0$ és f'' előjelet vált x_0-ban (f'' lokálisan nő vagy lokálisan csökken x_0-ban)
   b) $f''(x_0)=0$ és $f'''(x_0)\neq 0$

(B)

1. Az inflexiós pont konvex és konkáv szakaszokat választ el.
   Ha f konvex, akkor f' monoton nő. Ha f konkáv, akkor f' monoton csökken. Tehát f'-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, hiszen $\nearrow\searrow$ vagy $\searrow\nearrow$ típusú $\Longrightarrow$
   $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'\right|_{x_0}=f''(x_0)=0$

2. a)

	$(x_0-\delta,x_0)$	x_0	$(x_0,x_0+\delta)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	infl. pont	$\cap$

	$(x_0-\delta,x_0)$	x_0	$(x_0,x_0+\delta)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

   b) Ha $f'''(x_0)>0 \Longrightarrow f''$ növekedően halad át x_0-on, tehát a 2. táblázat igaz.
   Ha $f'''(x_0)<0 \Longrightarrow f''$ csökkenően halad át x_0-on, tehát az 1. táblázat igaz.

■

Példák

(Pl.) $f(x)=(x-1)^3(x+3)^2$ Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$$f'(x)=3(x-1)^2(x+3)^2+(x-1)^3\cdot 2(x+3)=(x-1)^2(x+3)(3(x+3)+2(x-1))$$
$$=(x-1)^2(x+3)(5x+7)$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\frac{7}{5})$	$-\frac{7}{5}$	$(-\frac{7}{5},1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$		$\nearrow$

Pl. $\boxed{\text{Határozza meg az } f(x) = \cos^3 x - 3\cos x \text{ függvény inflexiós pontjait!}}$

Megoldás:
$f'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) + 3\sin x = -3\cos^2 x \sin x + 3\sin x$
$f''(x) = 6\cos x \sin^2 x - 3\cos^3 x + 3\cos x = 3\cos x\,(2\sin^2 x \underbrace{- \cos^2 x + 1}_{=\sin^2 x}) = 3^2 \cos x \sin^2 x$

$f''(x) = 0$:

1. $\cos x = 0: \ x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ inflexiós helyek, mert f'' előjelet vált ($k \in \mathbb{Z}$).
2. $\sin x = 0: \ x = k\pi$ pontokban nincs inflexió, mert f'' nem vált előjelet.

Pl.

Az $y = f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény grafikonja átmegy az $x = 0,\ y = 1$ ponton és kielégíti az

$$y + x\ln y + 2x^2 - x + \ln(1+x) = 1$$

implicit egyenletet, ha $x > -1$.
Milyen lokális tulajdonsága van f-nek az $x = 0$-ban?

Megoldás:
Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$y'(x) + \ln(y(x)) + x\frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1+x} = 0$$

$x = 0,\ y(0) = 1$-et behelyettesítve:
$y'(0) + \ln 1 + 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(0) = 0 \quad$ lok. szé. lehet.
Ismét deriválva:

$$y''(x) + \frac{1}{y(x)}y'(x) + 1 \cdot \frac{1}{y(x)}y'(x) + x\frac{-y'(x)}{y^2(x)}y'(x) + x\frac{1}{y(x)} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

Behelyettesítve:
$y''(0) + 4 - 1 = 0\,, \quad y''(0) = -3 \quad \Longrightarrow \quad$ lok. max. van $x = 0$-ban (értéke $y(0) = 1$).
Mivel $y''(0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ nincs inflexiós pont itt.

Pl.

Milyen lokális tulajdonsága van az f függvénynek az $x_0 = 0$ pontban, ha f kétszer folytonosan differenciálható és az $y = f(x)$ egyváltozós függvény kielégíti az

$$x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} y = 0$$

implicit függvénykapcsolatot?

Megoldás:
$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \operatorname{ch} y_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 0 = f(0)$

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \operatorname{ch} y - y(\operatorname{sh} y) \cdot y' = 0$$

$0 + 0 - y' - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(0) = 0$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - y'' \operatorname{ch} y - y'(\operatorname{sh} y)y' - y'(\operatorname{sh} y)y' - y(\operatorname{ch} y)y'y' - y(\operatorname{sh} y)y'' = 0$$

$1 + 1 + 0 - y''(0) - 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''(0) = 2$ és $y'(0) = 0$, tehát lokális minimuma van.

9. Egyenes aszimptota $\pm\infty$-ben

(D) A $g(x) = Ax + B$ f lineáris aszimptotája a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \qquad (\lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x)) = 0)$$

Pl. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$-nek $g(x) = x + 2$ lineáris aszimptotája $\pm\infty$-ben.

Ha $\exists\ +\infty$-ben aszimptota:
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = \lim_{x\to\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x} \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) \right) = 0 \text{ miatt}$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0\text{-nak fenn kell állnia.}$$
Vagyis $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ szükséges feltétele az aszimptota létezésének.
De nem elégséges, mert még kell, hogy ezzel az A-val:
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax - B) = 0 \iff \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = B$$
($x \to -\infty$-re hasonlóan).

Tehát $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = A,\ \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax) = B \iff \exists$ lineáris aszimptota.

(Pl.) $\boxed{f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} \quad \text{Van-e lineáris aszimptotája } +\infty\text{-ben?}}$

Megoldás:
$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = 1$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\underset{h:=\frac{2}{x}}{=}\lim_{h\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{h}-1}{\frac{1}{2}\cdot h}=2$$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h}-1}{h}=1 \text{ nevezetes határérték}\right)$$

(L'H-lal is megoldható, de hogyan?) Tehát $g_a=x+2$.

10. Függvényvizsgálat

Teendők:

1. D_f; nullahelyek (ha megállapítható); periodicitás; paritás; határértékek: $+\infty$-ben, $-\infty$-ben (ha van értelme), a szakadási pontokban, határpontokban.
2. f' vizsgálata ($\nearrow$, $\searrow$, lok. szé.).
3. f'' vizsgálata ($\cap, \cup$, infl. pont) Ha szükséges, magasabb deriváltak vizsgálata.
4. Lineáris aszimptoták.
5. f ábrázolása, R_f meghatározása.

10.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek)

Zárt intervallumban folytonos függvénynek van minimuma és maximuma (Weierstrass II. tétele). Lehetséges helyek:

- ahol a függvény nem deriválható
- deriválható és lokális szélsőértékhely (elég a szükségességet vizsgálni)
- az intervallum végpontjaiban

Végül a szóbajövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet.

Példák:

Pl. $f(x) = x^2 \ln x$ Végezzen függvényvizsgálatot!

Megoldás:
$D_f = (0, \infty)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to+0} -\dfrac{1}{2}x^2 = 0$
Nullahely: $\ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$
$f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = -\dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

x	$\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$f''(x) = 2\ln x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

x	$\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}} \qquad f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = -\dfrac{3}{2\mathrm{e}^3} \qquad R_f = \left[-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}, \infty\right)$

Aszimptota: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln x = \infty \quad \Longrightarrow \quad$ nincs egyenes aszimptota.

HF. Hány valós gyöke van az $x^2 \ln x - a = 0$ egyenletnek? $(a \in \mathbb{R})$

Pl. Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot, és ábrázolja a függvényt! Van-e a függvénynek egyenes aszimptotája a $+\infty$-ben?

Megoldás:
$D_f = \mathbb{R}$ Nullahelyek: $x = \pm 1$
Páros függvény, ezért elég $x \geq 0$-ra vizsgálni és tükrözni az y tengelyre.

Van-e lineáris aszimptota $+\infty$-ben?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}=\infty$$

Nincs lineáris aszimptota.

$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-1}}=\nexists$

x	$\cdots$ $(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	lok, max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$f(0)=1,\qquad f(1)=0$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\frac{4}{3}\frac{(x^2-1)-\frac{2}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}=\frac{4}{9}\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

x	$[0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cap$	infl. pont	$\cup$

$f(\sqrt{3})=\sqrt[3]{4},\qquad f'(\sqrt{3})=\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\qquad\qquad R_f=[0,\infty)$

Pl.

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-8}-\frac{2}{3}x+3$$

Keresse meg f szélsőértékeit a $\left[0,\dfrac{9}{2}\right]$ intervallumon!

Megoldás:

f folytonos $\left[0,\dfrac{9}{2}\right]$-en $\overset{\text{W. II. t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ min. és max.

Ahol nem deriválható: $x = 4 \in I : \quad f(4) = \dfrac{1}{3}$

Az intervallum végpontjai: $f(0) = 1, \quad f\left(\dfrac{9}{2}\right) = 1$

Ahol differenciálható és lokális szélsőértéke lehet: $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2x-8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 - \dfrac{2}{3} = 0 \quad \Longrightarrow$
$(2x-8)^{-\frac{2}{3}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 8 = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{9}{2}, \dfrac{7}{2} \qquad f\left(\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{1}{3}$

Tehát a fenti értékek közül kiválasztva, a maximum $x = 0$-ban ill. $x = \dfrac{9}{2}$-ben van, értéke: 1, a minimum pedig $x = \dfrac{7}{2}$-ben, értéke: $-\dfrac{1}{3}$.

11. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi határértékeket!

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}$

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$

   e) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$

   f) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 1}$

2. Határozza meg az

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x$$

   értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

3. A derivált definíciója alapján vizsgálja meg, hogy differenciálható-e a 0-ban az

$$f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sin 2x \cdot \arcsin 3x}$$

   függvény?

4. $f(x) = 3\pi - \arccos(1 - x)$

   a) $D_f = ?$ Írja fel az $x_0 = \dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

   b) Invertálható-e f? $\quad f^{-1}(x) = ? \quad D_{f^{-1}} = ?$

5. $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x} \quad x_0=-\dfrac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenese?

6. Ábrázolja az

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x$$

függvényt!

7. $f(x)=x\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}; \qquad g(x)=x^2\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

   a) Tegye folytonossá a 0 helyen az f és g függvényeket!

   b) $f'(0)=?,\quad g'(0)=?$

8. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x\neq 1\\ 0, & \text{ha } x=1\end{cases}$

   $f'(1)=? \quad \lim\limits_{x\to 1} f'(x)=?$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}+1}{2e^{2x}+3e^{3x}+1}=? \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}+1}{2e^{2x}+3e^{3x}+1}=?$

10. Határozza meg az

$$f(x)=1+\ln\left(x^3+1\right)$$

függvény inverzét (ha létezik), az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11. $$f(x)=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

    Adja meg a fenti függvény

    a) értelmezési tartományát, értékkészletét,

    b) inverzét, amennyiben és ahol az létezik.

12. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)$

    a) $D_f=?,\quad R_f=?$

    b) $f^{-1}(x);\quad D_{f^{-1}}=?;\quad R_{f^{-1}}=?$

13. $f'(x)=?$

    a) $f(x)=(\ln x)^x$

    b) $f(x)=(\sin x)^{\cos x^2}$

    c) $f(x)=\sqrt[x]{x}$

    d) $f(x)=(\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^x$ f) $f(x) = x^x$

14. Írja fel a megadott ponton átmenő $y = f(x)$ függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti a megadott implicit kapcsolatot!

   a) $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0; \qquad x_0 = 1; \quad y_0 = -2$
   b) $x \sin y + y \sin x = \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}; \quad y_0 = \frac{\pi}{4}$
   c) $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2); \qquad x_0 = 3; \quad y_0 = 1$
   d) $y^2 \sin \pi y + x \cos \pi x + y = 1; \qquad P_0(1, 2)$
   e) $x \ln y + y \ln x = 1; \qquad P_0(\mathrm{e}, 1)$
   f) $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = -18; \qquad P_0(-1, 1)$

15. Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$ pontban az
$$x^2 \sin y + y + \sin x = 1$$
implicite adott függvénynek?

16. $$(x-2)^3(1-x) = y^3 + y; \qquad x_0 = 2, \quad y_0 = 0$$
Van-e a fenti implicit megadású görbének lokális szélsőértéke, ill. inflexiója az (x_0, y_0) pontban?

17. Milyen lokális tulajdonságai vannak az
$$x \cos \pi y + y^2 x + y \cos \pi x = 0$$
egyenlet által definiált $y(x)$ függvénynek az $x = 0$ pontban?

18. A kétszer folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény kielégíti az
$$y^3 - x^5 + x^2 - y^2 = 4$$
implicit egyenletet és $y(1) = 2$.

   a) $y'(1) = ?\quad y''(1) = ?$
   b) Van-e 1-nek olyan környezete, amelyben a fenti $y = y(x)$ függvény alulról konvex vagy alulról konkáv? (Vigyázat! Ez nem nem lokális tulajdonság.)

19. $$f(x) = x - 1 + \operatorname{arctg} x^3$$

   a) $f'(x) = ?$ Invertálható-e D_f-en?
   b) Írja fel az f^{-1} függvény $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x = ?$ (Indokoljon!)

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{th} \dfrac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ b, & x = -2 \end{cases}$

Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f mindenütt folytonos legyen? Hol létezik $f'(x)$?

c) Az inverzfüggvény meghatározása nélkül számítsa ki ${f^{-1}}'(0)$ értékét!

21. Vizsgáljuk meg, hogy $0 \le \varepsilon < 1$ esetén invertálható-e az

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x$$

ún. Kepler-egyenletnek eleget tevő függvény! Ha invertálható, határozzuk meg az inverz deriváltját is.

Megoldás:

$y' = 1 - \varepsilon \cos x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Mivel $\varepsilon \in [0,1) \implies y' > 0 \implies y$ szigorúan monoton nő $\implies$ invertálható (mivel y folytonos is, az inverz is folytonos). Mivel az inverzfüggvényt nem tudjuk explicite előállítani, csak az implicit függvény deriválása végezhető el. Az inverzfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet ($x \leftrightarrow y$):

$$x = y - \varepsilon \cdot \sin y$$

Ezt x szerint deriválva:

$$1 = y'(x) - \varepsilon\,(\cos y)\; y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

22. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ha } x \le 1 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken a függvény szigorúan monoton!

b) $\sup\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$ $\quad \inf\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$ $\quad \min\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]} \{f(x)\} = ?$

c) Tekintsük az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó húrokat, ahol $1 < a < b < 2$. Van-e köztük vízszintes?

d) Legyen $g(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$ és $D_g = (1, \infty)$.

Határozzuk meg a g^{-1} inverz függvényt! $D_{g^{-1}} = ?$

23. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to +0} x^n \ln x$; $\qquad n \in \mathbb{N}^+$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$; $\qquad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \cdot \sin x} \right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

i) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1} \right)^x$

k) $\lim\limits_{x\to +0} x^x$

l) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\operatorname{tg} x}$

m) $\lim\limits_{x\to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

p) $\lim\limits_{x\to +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \ln \dfrac{e^x - 1}{x} \right)$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} 2x}$

s) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^k}$, $\qquad k \in \mathbb{N}^+$

24. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határértékek kiszámításánál, és számítsuk ki a keresett határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \cos x}{\sin 2x + 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \left(= \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x \right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(x+5)}{\operatorname{ch}(x-1)}$

25. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^{x \cdot \sin x}, & \text{ha } x > 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen $\mathbb{R}$-en!

26. $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{x^{-2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

b) Írja fel az $x_0 = 1$ pontbeli érintő egyenletét!

27. $f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2} x\right)^{\frac{1}{1-x}}$

a) $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?\,,\quad$ ha $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

28. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$

29. $f(x) = \begin{cases} (x^2)^{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

b) Bizonyítsa be, hogy ekkor f differenciálható is a 0 pontban!

c) Írja fel a 0 pontbeli érintő egyenes egyenletét!

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Válassza meg a értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$-ban!

b) $f'(x) = ?$

31. Legyen $f(x) = |x| 3^{-|x|}$

a) Létezik-e $f'(0)$?

b) Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét $\mathbb{R}$-en, amennyiben ezek léteznek.

c) $\min\limits_{x \in [1,\infty]} \{f(x)\} = ?, \qquad \inf\limits_{x \in [1,\infty]} \{f(x)\} = ?$

32. a) Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján. (Konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük.)

b) Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényében!

33. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

b) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

34. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + x^2 \sin \dfrac{1}{x}$

Van-e lineáris aszimptotája $\pm\infty$-ben?

35. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Van-e lineáris aszimptotája $-\infty$-ben?

36. $x(t) = \dfrac{\sin t}{t^2 + 1}; \quad y(t) = \sqrt{2 + \cos t} + 2t$

a) $\dot{x}(t) = ?\quad \dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

37. $x(t) = \mathrm{e}^{2t} + t^2; \quad y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

38. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x = t^2 + 2\cos\frac{\pi}{2}t, \qquad y = \sin \pi t + \frac{\pi}{2}t^2$$

által meghatározott $y = f(x)$ függvénynek a $t_0 = 1$ paraméterű $x_0 = x(t_0)$ pontban?

12. Néhány kidolgozott feladat

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + x^2 \sin \dfrac{1}{x} \qquad \pm\infty\text{-ben van-e lineáris aszimptota?}}$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \Bigg(\underset{\substack{\downarrow \\ \frac{\text{korl.}}{\infty} \to 0}}{\frac{\sin x}{x^2}} + \underbrace{x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1} \Bigg) = 1 = A$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-Ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\Bigg(\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\sin x}{x}}+\underbrace{x^2\sin\frac{1}{x}-x}_{\infty\cdot 0-\infty}\Bigg)=\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{x^2\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}_{\infty\cdot 0}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=0=B$$

$g_a=x$: aszimptota a $\pm\infty$-ben.

Pl. $\boxed{f(x)=\sqrt{x^2-x+1}\quad \text{aszimptota } -\infty\text{-ben?}}$

Megoldás:

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\underset{u:=-x}{=}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(\sqrt{u^2+u+1}-u\right)\frac{\sqrt{u^2+u+1}+u}{\sqrt{u^2+u+1}+u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u+1}{\sqrt{u^2+u+1}+u}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{u\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{u}\,\frac{1+\frac{1}{u}}{\sqrt{1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

$g_a=-x+\dfrac{1}{2}$

Pl. Legyen $f(x)=|x|3^{-|x|}$.

1. Létezik-e $f'(0)$?
2. Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét $\mathbb{R}$-en (amennyiben ezek léteznek)!
3. $\min\limits_{x\in[1,\infty)} f(x)=?\qquad \inf\limits_{x\in[1,\infty)} f(x)=?$

Megoldás:

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{|x|3^{-|x|}}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{|x|3^{-|x|}}{x} = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$-ban nem differenciálható

2. f páros, $x \ge 0$ esetén $f(x) = x\,3^{-x}$

   $f(0) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{3^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3^x \ln 3} = 0$

   $f'(x) = 3^{-x} - \ln 3 \cdot x\,3^{-x} = 3^{-x}(1 - \ln 3 \cdot x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\ln 3}$

x	$\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$	$\frac{1}{\ln 3}$	$\left(\frac{1}{\ln 3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

   $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0 \qquad \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{\ln 3}\, 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

3. $\dfrac{1}{\ln 3} < 1 \quad$ (mert $\ln 3 > 1$)

   $\min\limits_{[1,\infty)} f(x)$ nem létezik, $\quad \inf\limits_{[1,\infty)} f(x) = 0$

Pl.

1. Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján (konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük).
2. Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényeként. Válaszát indokolja.

Megoldás:

1. $f(x) = x(x-3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,\ x = 3$

   $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$

   $f(1) = 4,\ f(0) = 0$

2. $f(x) = C$ egyenlet megoldásainak a száma: $R_f = \mathbb{R}$

   $\Longrightarrow \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$-re van metszéspontja az $y = f(x)$ és $y = C$ görbéknek.

   $c < 0$: 1 megoldás; $c = 0$: 2 megoldás; $0 < c < 4$: 3 megoldás; $c = 4$: 2 megoldás; $c > 4$: 1 megoldás.

Pl.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = ?$

2. Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

Megoldás:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}{1} = 0$

2. $D_f:\ |x| > 1 \qquad \lim\limits_{x\to-1\pm0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (x + \ln(x^2-1)) = \lim_{x\to-\infty} x\Bigg(1 + \underbrace{\frac{\ln(x^2-1)}{x}}_{\downarrow\atop 0}\Bigg) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = -1-\sqrt{2}\,, \quad x_2 = -1+\sqrt{2} \notin D_f$$

f $(-\infty, -1-\sqrt{2}]$-ben és $(1,\infty)$-ben monoton nő, $[-1-\sqrt{2}, -1)$-ben monoton csökken.

$f(-1-\sqrt{2}) < 0$: itt lok. max.

$f''(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ konkáv

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = 1,$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad$ csak $x = \pm 1$ aszimptota