Jelek és rendszerek

Tantermi gyakorlat feladatgyűjteménye

Szerk.:
Varga Lajos,
2010.

Jelek és rendszerek - 1. gyakorlat

1. Jelek

1.1. Definiáljuk a következő fogalmakat, adjunk példákat:

1. jel
2. determinisztikus
3. sztochasztikus
4. értelmezési tartomány
5. értékkészlet
6. időfüggő
7. folytonos idejű
8. diszkrét idejű
9. folytonos értékű
10. diszkrét értékű
11. egységugrás
12. egységimpulzus
13. ablakozó függvény

1.2. A műveletek közül melyik értelmezett folytonos illetve diszkrét jeleken?

Művelet	folytonos	diszkrét
öszeadás		
szorzás		
lineáris kombináció		
eltolás		
ablakozás		
integrálás		
összegzés		
differenciálás		
konvolúció		

1.3. Definiáljuk a következő, jelekre vonatkozó fogalmakat:

1. belépő
2. páros
3. páratlan
4. korlátos
5. véges időben korlátos
6. abszolút integrálható / összegezhető
7. véges energiájú / négyzetesen összegezhető
8. véges idejű (ablakozható)
9. periodikus

1.4. Feladatok

1. Belépő jel-e?
   (a) $f[k] = \varepsilon[k-2]$
   (b) $j(t) = \sin(2(t-1))$
   (c) $l(t) = \varepsilon(t-1)\sin(2(t-1))$
   (d) $m[k] = \varepsilon[k+1]\sin(2(k+1))$
2. Periodikus jel-e?
   (a) $f(t) = \cos(4t+5)$
   (b) $f[k] = \cos(0,2k)$
   (c) $f[k] = \cos(0,2\pi k)$
3. Adjuk meg az alábbi jeleket ablakozással!
   (a)
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{ha } 2 < t \end{cases}$$
   (b)
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 2 & \text{ha } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{ha } 2 < t < 3 \\ -1 & \text{ha } 3 < t < 4,5 \\ 0 & \text{ha } 4,5 < t \end{cases}$$
   (c)
   $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ A\cdot\mathrm{t} & \text{ha } 0 < t < T \\ 0 & \text{ha } T < t \end{cases}$$
4. Számítsuk ki az alábbi jelek általánosított deriváltját!
   (a) $f(t) = \varepsilon(t-2)$
   (b) $f(t) = e^{-\alpha t}$
   (c) $f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]e^{-\alpha t}$
   (d) $f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\sin(\frac{\pi t}{T})$

2. Rendszerek

2.1. Elméleti alapok

Definiáljuk a következő fogalmakat, adjunk példákat:

1. rendszer
2. lineáris
3. időinvariáns
4. kauzális
5. gerjesztés-válasz stabil
6. véges impulzusválaszú
7. konvolúció

2.2. Feladatok

1. Lineárisak-e az alábbi rendszerek?

   (a) $y(t) = 4u(t) + 2u(t-2)$
   (b) $y(t) = 2u(t) + 1$
   (c) $y(t) = 2u'(t)$
   (d) $y[k] = 2^k u[k]$

2. Invariánsak-e az alábbi rendszerek?

   (a) $y(t) = 2u(t)$
   (b) $y(t) = 2u'(t)$
   (c) $y(t) = 2\int u(t)dt$
   (d) $y[k] = 2^k u[k]$

3. Kauzálisak-e az alábbi rendszerek?

   (a) $y(t) = 3u(t-1)$
   (b) $y(t) = 3u(t+1)$
   (c) $y[k] = 3u[k+1] + u[k] + 2u[k-1]$
   (d) $y[k] = 3u[k-1]0,5^k \varepsilon[k]$

4. Véges impulzusválaszúak-e az alábbi rendszerek?

   (a) $h(t) = 3\delta(t)$
   (b) $h(t) = 3\varepsilon(t)$
   (c) $h(t) = 3(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2))$
   (d) $h(t) = 3\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$
   (e) $h[k] = 3u[k] + u[k-3] + 2u[k-1024]$

5. GV-stabilak-e az alábbi rendszerek?

   (a) $y(t) = 3u(t)$
   (b) $y(t) = 4u'(t)$
   (c) $y(t) = 5\int u(t)dt$
   (d) $y(t) = 6(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2))$
   (e) $y(t) = 7\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$
   (f) $y[k] = 8u[k] + u[k-3] + 2u[k-1024]$
   (g) $y[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} 3u[k]$

6. Számítuk ki a rendszer válaszát, ha adott a gerjesztés és az impulzusválasz!

$$u[k] = 0,6^k \varepsilon[k]; \qquad h[k] = -1,5 \cdot 0,8^k \varepsilon[k] + 2,5\delta[k]$$

7. Számítuk ki a rendszer válaszát, ha adott a gerjesztés és az impulzusválasz!

$$h(t) = \varepsilon(t)[8e^{-0,5t} - 4e^{-0,1t}]$$

   (a) $u(t) = \varepsilon(t)$
   (b) $u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$
   (c) $u(t) = (1 - \varepsilon(t)) + 2\varepsilon(t)$

3. Házi feladat

3.1. Jelöljük be a táblázatban az alábbi jelekhez tartozó tulajdonságokat! (Tipp: ábrázoljuk a jeleket!)

a) Folytonos idejű; b) Diszkrét idejű c) Belépő; d) Páros; e) Páratlan; f) Korlátos; g) Véges időben korlátos; h) Véges idejű (ablakozható); i) Véges energiájú; j) Periodikus; k) Abszolút integrálható vagy összegezhető

Jel ($f[t]$ vagy $f[k]$)	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
$3\delta(t)$											
$2\varepsilon(t)$											
$2\varepsilon(t-1)$											
$2\varepsilon(t+1)$											
$3(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2))$											
$3(\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1))$											
$3\delta[k]+\delta[k-3]+2\delta[k-1024]$											
$3e^{-2t}$											
$3e^{+2t}$											
$3\varepsilon(t)e^{-2t}$											
$3e^{\|t\|}$											
$3\varepsilon(-t)e^{-2t}$											
$3\delta(t)$											
$[\varepsilon(t)]\sin(\frac{\pi t}{T})$											
$[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\sin(\frac{\pi t}{T})$											
$\cos(4t+5)$											
$\cos(4\pi t+5)$											
$\cos(4k+5)$											
$\cos(0,4k+5)$											
$\cos(4\pi k+5)$											
$\|t\|$											
$\|k\|$											
$k\varepsilon[k]$											
$\delta[k-1]0,6^k$											
$\left(\frac{1}{2}\right)^k$											
$\left(\frac{2}{1}\right)^k$											
$\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon[k]$											
$\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon[-k]$											

3.2. Számítsuk ki a rendszer válaszát!

1. $h[k]=5\varepsilon[k-1]\cdot\left(0,5^{k-1}-0,1^{k-1}\right)$, $u[k]=\varepsilon[k]$; $y[0]=?$, $y[1]=?$, $y[2]=?$, $y[3]=?$,
2. $h(t)=5\varepsilon(t)e^{-2t}$, $u(t)=10\varepsilon(t)cos(4t)$; $y(t)=?$
3. $h(t)=5\varepsilon(t)e^{-2t}$, $u(t)=10cos(4t)$; $y(t)=?$

1. gyakorlat – ellenőrző feladatok

Rendelkezésre álló idő: 15 perc

1.1. Lineárisak-e az alábbi, gerjesztés-válasz kapcsolatukkal adott rendszerek?

a) $y(t) = 2u(t) + 1$ b) $y(t) = 2u'(t)$

1.2. Jelöljük be a táblázatban az alábbi jelekhez tartozó tulajdonságokat!

a) Folytonos idejű; b) Diszkrét idejű c) Belépő; d) Páros; e) Páratlan; f) Korlátos; g) Véges időben korlátos; h) Véges idejű (ablakozható); i) Véges energiájú; j) Periodikus; k) Abszolút integrálható vagy összegezhető

Jel ($f[t]$ vagy $f[k]$)	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
$3\varepsilon(-t)e^{-2t}$											
$\cos(0,4k+5)$											
$\left(\frac{1}{2}\right)^k$											
$\left(\frac{2}{1}\right)^k$											

1.3. Számítsuk ki a rendszer válaszát a $k = 2$ időpillanatban, ha adott a gerjesztés és az impulzusválasz!

$$h[k] = 5\varepsilon[k-1] \cdot \left(0,5^{k-1} - 0,1^{k-1}\right); \quad u[k] = \varepsilon[k]$$

---

1. feladat	2. feladat	3. feladat	$\sum$
/2p	/4p	/4p	/10p

Jelek és rendszerek – 2. gyakorlat

1. feladat

Állapotváltozós leírásával adott egy diszkrét idejű rendszer. (*Fodor*[94])
Határozzuk meg a rendszer válaszának időfüggvényét ($\mathbf{y}[k]$), ha gerjesztése: $\mathbf{u}[k] = 0,5^k \cdot \varepsilon[k]$!

$$\underline{\mathbf{x}}[k+1] = \underline{\underline{A}}\underline{\mathbf{x}}[k] + \underline{B}\mathbf{u}[k]; \quad \mathbf{y}[k] = \underline{C}^T\underline{\mathbf{x}}[k] + D\mathbf{u}[k]$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,5 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

2. feladat

Állapotváltozós leírásával adott egy folytonos idejű rendszer. (*Fodor*[104])
Határozzuk meg a rendszer válaszának időfüggvényét ($\mathbf{y}(t)$), ha gerjesztése: $\mathbf{u}(t) = \varepsilon(t)$!

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = \underline{\underline{A}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{y}(t) = \underline{C}^T\underline{\mathbf{x}}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3. feladat

Egy rendszer állapotváltozós leírásából az 1./2. feladatban megismert módon kiszámítottuk a karaktarisztikus polinomot. Ebből az alábbi sajátértékeket kaptuk:

$$\lambda_1 = -0,5 + 0,2j; \quad \lambda_2 = -0,5 - 0,2j.$$

Adjuk meg a rendszer válaszának szabad összetevőjét (*Fodor*[75]), ha
a) diszkrét idejű, (*Fodor*[86-87])
b) folytonos idejű! (*Fodor*[87-88])

4. feladat

Egy rendszer állapotváltozós leírásából meghatároztuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 - m\lambda + 0,05 = 0.$$

Az m paraméter mely értékeire lesz stabil a rendszer? (*Fodor*[133-134])
A választ folytonos és diszkrét esetre is adjuk meg!

5. feladat

Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozóinak időfüggését az alábbi egyenlet írja le:

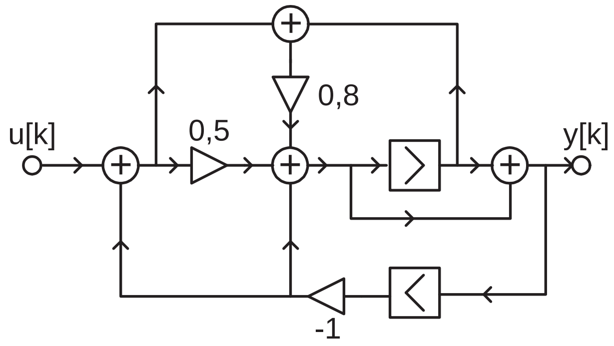
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t).$$

- Aszimptotikusan stabil a rendszer? (*Fodor*[134])
- Gerjesztés-válasz stabil a rendszer? (*Fodor*[46,135])

Jelek és rendszerek – 3. gyakorlat

1. feladat

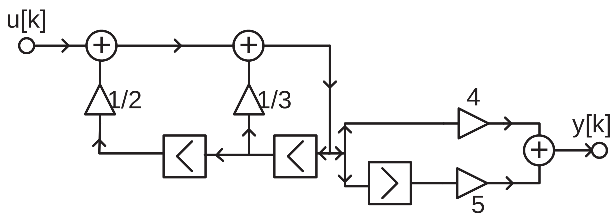
Jelfolyamhálózatával adott egy diszkrét idejű rendszer.



Adjuk meg a rendszerhez állapotváltozós leírását normálalakban!
Vizsgáljuk meg a rendszer stabilitását! (AS!)

2. feladat

Jelfolyamhálózatával adott egy diszkrét idejű rendszer.



Határozzuk meg a rendszer válaszát $k = 0, 1, 2, 3$ esetén, ha a gerjesztés $u[k] = \varepsilon[k]$! Alkalmazzunk folyamatos behelyettesítést!

3. feladat

Állapotváltozós leírásával adott egy folytonos idejű rendszer.

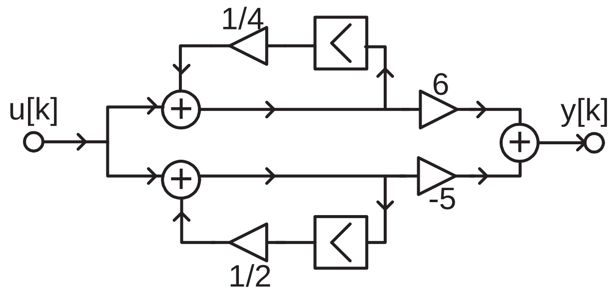
$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = \underline{\underline{A}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{y}(t) = \underline{C}^T\underline{\mathbf{x}}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a rendszer válaszát ($y(t)$), ha a gerjesztés $u(t) = 10\cos(2t + 0,5)$!

4. feladat

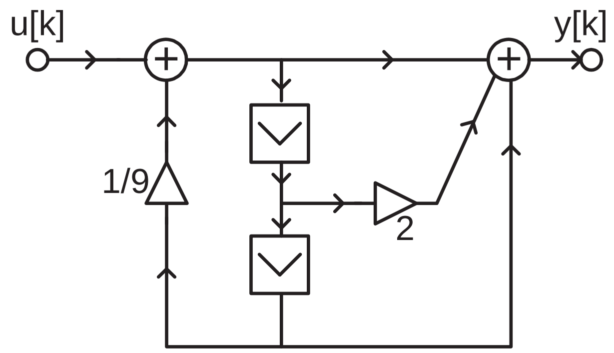
Jelfolyamhálózatával adott egy diszkrét idejű rendszer.



Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
Határozzuk meg a rendszer válaszát ($y[k]$), ha a gerjesztés $u[k] = 5\cos(\frac{\pi}{2}k)$!

5. feladat

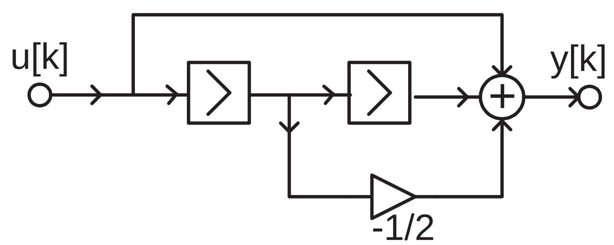
Jelfolyamhálózatával adott egy diszkrét idejű rendszer.



Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
Határozzuk meg a rendszer válaszát ($y[k]$), ha a gerjesztés $u[k] = 4\cos(\frac{\pi}{6}k + \frac{\pi}{4})$!

6. feladat

Jelfolyamhálózatával adott egy diszkrét idejű rendszer.

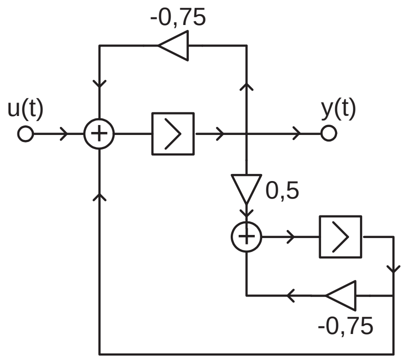


Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
Ábrázoljuk az amplitúdókarakterisztikát! Magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

Jelek és rendszerek – 4. gyakorlat

1. feladat

Jelfolyamhálózatával adott egy folytonos idejű rendszer.



a) Adjuk meg az átviteli karakterisztikáját!
b) Adjuk meg a rendszer válaszát, ha adott gerjesztésének időfüggvénye! (T=20)

$$u(t) = \begin{cases} 10\cos(\omega_0 t), & \text{ha } 0 < t < \frac{1}{4}T \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{4}T < t < \frac{3}{4}T \\ 10\cos(\omega_0 t), & \text{ha } \frac{1}{4}T < t < \frac{3}{4}T \end{cases}$$

2. feladat

Az $u[k]$ diszkrét idejű jel periodikus, periódusának hossza $L = 4$.
Egy perióduson belül a jel értékei: $u[0] = 1$, $u[1] = 1$, $u[2] = 0$, $u[3] = 0$.
a) Határozzuk meg $u[k]$-hoz tartozó Fourier-sort!
b) Milyen választ adnak a fenti $u[k]$ periodikus gerjesztésre az alábbi rendszerek:

$$H_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-0{,}5e^{-j\theta}} \qquad H_2(e^{j\theta}) = \frac{1-\frac{7}{4}e^{-j\theta}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\theta}+\frac{1}{8}e^{-j2\theta}}$$

3. feladat

Számítsuk ki és ábrázoljuk az alábbi jelek amplitúdóspektrumát!

a) $f_a(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$;
b) $f_b(t) = \varepsilon(t+T-T_0) - \varepsilon(t-T-T_0)$;
c) $f_c(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \alpha > 0$;
d) $f_d(t) = (1-\varepsilon(t))e^{\alpha t}, \alpha > 0$;
e) $f_e(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$

Jelek és rendszerek – 5. gyakorlat

1. feladat

Számítsuk ki az alábbi jelek Fourier-transzformáltját (spektrumát)!

a) $f_a(t) = [\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)]\cos(\omega_0 t)$

b) $f_b(t) = \cos^2(\omega_0 t)$

2. feladat

Számítsuk ki az alábbi jelek sávszélességét! ($\varepsilon_L = 0,1$) (*Fodor*[273])

a) $f_a(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \alpha > 0;$

b) $f_b(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$

3. feladat

Adjuk meg, milyen β paraméterértékekre teljesül a torzítatlatlan jelátvitel feltétele! ($\varepsilon_L = 0,1$) (*Fodor*[269])

Jel: $u(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$. (*Fodor*[272])

Rendszer: $H(j\omega) = \frac{2}{j\omega+\beta}$. (*Fodor*[273])

4. feladat

Határozzuk meg az alábbi jelek Fourier-transzformáltját (spektrumát)!

a) $f_a[k] = \delta[k] + \delta[k-1]$

b) $f_b[k] = \frac{1}{2}\delta[k+1] + \delta[k1] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$

c) $f_c[k] = 0,5^k \cos(\frac{\pi}{6}k)\varepsilon[k]$

Jelek és rendszerek – 6. gyakorlat

1. feladat

Számítsuk ki az alábbi jelek Laplace-transzformáltját!

a) $f_a(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$

b) $f_b(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

c) $f_c(t) = A \cdot e^{-\alpha t} + B \cdot e^{-\beta t}$

d) $f_d(t) = A \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$

e) $f_e(t) = A \cdot t \cdot \cos(\omega_0 t) \varepsilon(t)$

2. feladat

Számítsuk ki az alábbi jelek Laplace-transzformáltját!

a) $f_a(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\frac{t}{\tau}$;

b) $f_b(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]e^{-\alpha t}$;

c)

$$f_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{A}{\tau}t, & \text{ha } 0 \le t \le \tau \\ 0, & \text{ha } t > \tau \end{cases}$$

d)

$$f_d(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ A\cos(\frac{2\pi}{T}t), & \text{ha } 0 \le t \le \frac{T}{4} \\ 0, & \text{ha } t > \frac{T}{4} \end{cases}$$

e) $f_e(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-T) + \varepsilon(t-2T) + \varepsilon(t-3T) + \ldots$;

3. feladat

Számítsuk ki az alábbi komplex frekvenciatartománybeli függvények inverz Laplace-transzformáltját!

a) $Y(s) = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+4)}$, $y(t)$=?;

b) $H(s) = \frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+4)}$, $h(t)$=?;

c) $Y(s) = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)^2}$, $y(t)$=?;

d) $H(s) = \frac{1}{s^2+8s+25}$, $h(t)$=?;

4. feladat

Számítsuk ki az átviteli függvényével adott rendszer válaszát az $u(t)$ gerjesztésre!

$$H(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ U_m, & \text{ha } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -U_m, & \text{ha } \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0, & \text{ha } t \geq T \end{cases}$$

5. feladat

Számítsuk ki az átviteli függvényével adott rendszer válaszát az $u(t)$ gerjesztésre!

$$H(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{U_0}{\tau}t, & \text{ha } 0 \leq t < \tau \\ 0, & \text{ha } t \geq \tau \end{cases}$$

Jelek és rendszerek – 7. gyakorlat

FONTOS: A gyakorlat anyagát képezik az előző előadáson, közös évfolyamgyakorlat keretein belül megoldott feladatok is!

1. feladat

Adott a diszkrét idejű $y[k]$ időfüggvény Z transzformáltja, $Y(z)$.

Adjuk meg $y[k]$ legegyszerűbb valós alakját!

$$Y[z] = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

2. feladat

Az alábbiakban adottak egy FI rendszer pólusai és zérusai.

$p_1 = -4$; $p_2 = -2$

$z_1 = -3 + 2j$; $z_2 = -3 - 2j$

Tudjuk még a rendszerről azt, hogy ugrásválaszának állandósult állapotbeli értéke 5.

Adjuk meg a rendszer átviteli függvényét!

3. feladat

Átviteli függvényével adott egy folytonos idejű rendszer.

Írjuk fel az átviteli függvényt egy mindenáteresztő és egy minimálfázisú rendszer kaszkád (soros) realizációjaként!

$$H(s) = \frac{(s+1)(s-3)}{(s+2)(s+4-2j)(s+4+2j)}$$

4. feladat

Az alábbiakban adottak egy DI rendszer pólusai és zérusai.

$p_1 = -0,5$; $p_2 = 0,8$

$z_1 = 0,4 + 0,2j$; $z_2 = 0,4 - 0,2j$

Tudjuk még a rendszerről azt, hogy ugrásválaszának állandósult állapotbeli értéke 10.

a) Adjuk meg a rendszer átviteli függvényét! GV stabil a rendszer?

b) Adjuk meg a rendszer impulzusválaszát!

c) Adjuk meg a rendszer állandósul állapotbeli válaszát, ha a gerjesztés $u[k] = 3\varepsilon[k]$!