. előadás 2010. XI. 25.

Folytonos idejű Markov-láncok

Ha valahova beleugrik, akkor van egy másik, ahova mehet.

$$i \quad \begin{array}{l} \cdot\ \mathrm{Exp}(\lambda_{i_1}) \\ \cdot\ \mathrm{Exp}(\lambda_{i_2}) \\ \cdot\ \mathrm{Exp}(\lambda_{i_3}) \\ \cdot\ \mathrm{Exp}(\lambda_{i_4}) \end{array}$$

Amelyik előbb cseng, oda ugrik.

M/M/1-nél ez:

$$i \quad \begin{array}{ll} \cdot\ i+1 & \mathrm{Exp}(\lambda) \\ \cdot\ i-1 & \mathrm{Exp}(\mu) \end{array}$$

Amelyik előbb történik meg, oda ugrik.

Az átmenet rátájának nevezzük a paramétert, így Λ a rátamátrix.

$$P(X(t_1)=i_1,\ X(t_2)=i_2, \dots, X(t_n)=i_n) =$$

Az időhomogénség miatti átmenet-valószínűségeket szorozzuk össze

$$= P(X(t_1)=i_1) \cdot P_{i_1 i_2}(t_2-t_1) \cdot \ldots \cdot P_{i_{n-1} i_n}(t_n-t_{n-1})$$

Van olyan is, hogy:

$$P(X(t)=j \mid X(0)=i) =: P_{ij}(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t)=j) = ?$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t I\{X(s)=j\}\,ds}{t}$$ = az idő hány %-ában tartózkodik a j-ben. (Hosszútávon)

$$\int_0^t I\{X(s)=j\}\,ds$$ = $[0,t]$ intervallumban mennyi ideig tartózkodott a j-ben.

(I: az indikátorfgv.)

Diszkrét időben egylépéses átmenet-valószínűségmátrixot vettünk. Itt ilyen nincs, de van t idejű: $P(t)$.

Tétel: Létezik egy A $|S|\times|S|$ mátrix úgy, hogy $P'(t)=A\cdot P(t)=P(t)\cdot A$, ahol A a Markov-folyamat generátora.

A deriváltmátrix:

$$[P'(t)]_{ij}=P_{ij}'(t)$$

mindegyik koordinátája egy különleges fgv-e, s ezeknek a deriváltját venni.

Volt egy ilyen is:

$$P(t)\overset{?}{=}M^t$$

$P'(t)=A\cdot P(t)$ egy differenciálegyenlet.

Ennek a megoldása: $$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}=:e^{At}$$

$$\left(\text{mert } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=e^a\right)$$

Általában nem könnyű ezt kiszámolni.

$P'(t)=A\cdot P(t)$ bizonyításvázlata

Először a teljes valószínűség tételét vesszük:

$$P_{ij}(t) = P\left(X(t)=j \mid X(0)=i\right) =$$

teljes valószínűség-tételt veszünk az első ugrás idejére és helyére.

$$= \underbrace{e^{-\lambda(i)\cdot t} \cdot I\{i=j\}}_{\text{az első ugrás ideje } t \text{ után van}} + \int_0^t \lambda(i)\cdot e^{-\lambda(i)(t-s)} \cdot \sum_{k\neq i} \Big[Q_{ik} \cdot P\left(X(t)=j \mid X(t-s)=k\right)\Big] ds$$

az első ugrás ideje t után van

Ez pont $P(T_1 > t) = e^{-\lambda(i)t}$, ahol $T_1 \sim Exp(\lambda(i))$

az első ugrás $(t-s)$ időben történt. Ez exp. eloszlású. A feltétel sűrűségfgv-vel kell szorozni. Ez az első tag.

Az első ugrás ideje $(t-s)$-ben

Amikor ugrik, akkor Q szerint ugrik: az első ugrás i-ből k-ba megy.

$P(X(t)=j \mid X(t-s)=k)$ pedig a maradék időt írja le: $P_{jk}(s)$ → a maradék s időben eljut k-ból j-be.

$$e^{-\lambda(i)\cdot t} \cdot I(i=j) + \int_0^t \lambda(i)\cdot e^{-\lambda(i)(t-s)} \sum_{k\neq i} Q_{ik} \cdot P\left(X(t)=j \mid X(t-s)=k\right) ds$$

Átrendezve:

$$P_{ij}(t) = e^{-\lambda(i)t} \left[I\{i=j\} + \int_0^t \lambda(i)\cdot e^{\lambda(i)\cdot s} \sum_{k\neq i} Q_{ik} P_{kj}(s)\, ds \right]$$

Itt aztán deriválunk és átrendezünk:
(t-szerint)

$$P_{ij}'(t) = \overbrace{-\lambda(i)}^{A_{ii}} \cdot P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \overbrace{\lambda(i) \cdot Q_{ik}}^{A_{ik}} \cdot P_{kj}(t)$$

Legyen $A_{ii} = -\lambda(i)$

és $A_{ij} = \lambda(i) \cdot Q_{ij} \quad i \neq j$

itt igazából k-t kellett volna írni, mert az eredetiben is az volt.

Ekkor

$P_{ij}' \cancel{(t)} =$

$$P_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} A_{ik} \cdot P_{kj}(t)$$

Vagyis $\left[P'(t)\right]_{ij} = \left(A \cdot P(t)\right)_{ij}$

<u>Megjegyzés</u>:

~~A fentiekben~~

Az A minden információt tartalmaz a folyamatról.
(Q és $\lambda(i)$-k).

~~Ha viszont~~

Ha a Λ rátafüggvény adott (ez a 2. definíció szerinti), akkor

$$A_{ij} = \Lambda_{ij} \quad i \neq j$$

$$A_{ii} = \sum_{j \in S} \Lambda_{ij}$$

A generátormátrix fog segíteni kiszámolni a stacionárius elolást.

Példa: M/M/1

~~A~~

$X(t)$ = t időben a várakozók száma. $X(t)$ Markov-folyamat, ezt tudjuk. Mi a generátora?

A rátamátrixból ki lehet számolni a generátort.

$$\Lambda_{i\,i+1} = \lambda \qquad i \geq 0$$

minden 1-gyel feljebb lépésig Exp idő telik el

$$\Lambda_{i\,i-1} = \mu \qquad i \geq 1.$$

lefelé lépés rátája (mennyi időt kell várni egy kiszolgálásig) exponenciális.

Az A generátormátrix tehát:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \lambda & \lambda & 0 & \\ 1 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \emptyset \\ 2 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 3 & \emptyset & & \ddots & \ddots \end{array}$$

Ez a generátormátrix.

$$\Lambda_{ii} = \sum_{j\in S} \lambda_{ij} = -\left(\Lambda \text{ } i\text{-edik sorában az elemek összege}\right).$$

~~Az $\eta A = 0$ vektortól tudjuk majd ... stb~~

Stacionárius Markov-folyamat

Def: Egy $(X(t), t \geq 0)$ folytonos idejű sztochasztikus folyamat stacionárius, ha $\forall\, t_1, t_2, \dots, t_n$ időre, továbbá $\forall\, s > 0$ számra $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ eloszlása $=$ $(X(t_1+s), X(t_2+s), \dots, X(t_n+s))$ eloszlása.

úgy veszi a Markov-láncot, hogy mind el van tolva s-sel

Veszünk egy szeletet, megnézzük annak az eloszlását, majd arrébbmegyünk, ugyanazt látjuk.

Speciálisan, ha $n=1$, akkor $X(t)$ eloszlása $= X(t+s)$ eloszlása $\Leftarrow$ $\forall$ időben ugyanazt látjuk (azt, amivel elindítottuk).

$$\text{eloszlása} = X(0)$$

Def: η invariáns (sorvektor), ha $\eta = \eta P(t)$ $\forall t \geq 0$.

Ennek jelentése: Ha η eloszlás, akkor

$$\sum_{i \in I} \eta_i = 1 \qquad \eta_i \geq 0, \text{ akkor}$$

$$P(X(0) = i) = \eta_i \quad \Leftarrow \eta \text{ kezdeti eloszlás.}$$

és

$$P(X(t) = i) = \big[(\text{kezdeti eloszlásvektor}) \cdot (t \text{ idejű átmenet-valószínűségmátrix})\big]_i = [\eta \cdot P(t)]_i = \eta_i$$

Ez azt jelenti, hogy minden $t \geq 0$-ra $X(t)$ eloszlása ugyanaz az η eloszlás.

Def: Egy π kezdeti eloszlás stacionárius eloszlás, ha invariáns és az eloszlás $\pi = \pi P(t)$ $\forall t \geq 0$

$\pi_i \geq 0$ és $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$.

a kezdeti eloszlás ($X(0)$ eloszlása, ami π) tetszőleges t-re megegyezik $X(t)$ eloszlásával, ami pedig $\pi \cdot P(t)$.

Áll: Ha stacioner eloszlással indítunk (a kezdeti eloszlás stacionárius), akkor a Markov-folyamat stacionárius folyamat.

Biz: A diszkrét esethez hasonlóan + a múlt órában közül a 2. tulajdonság.

$(X(t), t \geq 0)$

Tétel: Tegyük fel, hogy a beágyazott Markov-lánc visszatérő és irreducibilis. Ekkor az

(2) $\underline{\eta} = \underline{\eta}\, P(t)$ $\forall t \geq 0$

egyenletrendszernek egyetlen egy megoldása van.
(a konstans szorzótól eltekintve)

A Markov-folyamatnak létezik egyetlen stacionárius eloszlása $\Leftrightarrow$ $\sum_{i \in S} \eta_i < \infty$.

Ekkor a stacionárius eloszlás:

$$\pi_i = \frac{\eta_i}{\sum_{j \in S} \eta_j} > 0 \quad \forall i\text{-re}$$ (ez deriválható és így van).

a koordináták összege.

(A Markov-lánc irreducibilis, így ha ahonan lép, az (+), akkor a hova lép, az is (+))

A lényeg: A (2)-nek a megoldása megkapható

$$\underline{\eta} \cdot A = \underline{0}$$ megoldásával.

↑ egyetlen lin. egyenletrendszert kell megoldani.

Biz: Ha $\underline{\eta} P(t) = \underline{\eta}$, akkor t-szerint deriválva

$$\underline{\eta}\, P'(t) = \underline{0}$$

Itt alkalmazzuk az előző tétel eredményét.

$$\underline{\eta} \cdot A \cdot P(t) = \underline{0}$$

Speciálisan $t=0 \to P(0) = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} = I$

↑ nulla idő alatt csak ide mehet.

így $A\,P(0) = A$, vagyis

$$\underline{\eta} \cdot A = \underline{0}$$

Visszafelé a bizonyítás hasonló.

Diszkrét idejű Markov-láncoknál megnéztük, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P_{\underline{x}}(X(t)=j)$$

Most is ezt szeretnénk megtudni.

Def: Egy folytonos idejű Markov-lánc ergodikus, ha visszatérő, irreducibilis és létezik stacionárius eloszlás.

Tétel: Ha $(X(t), t \geq 0)$ Markov-lánc ergodikus, akkor tetszőleges $\underline{a}$ kezdeti eloszlásvektor esetén $\lim_{t \to \infty} P_{\underline{a}}(X(t)=j) = \Pi_j$

Vagyis ha $\exists$ stac. eloszlás $\Rightarrow$ elfelejti a kezdeti állapotot. (eloszlást).

$\lim_{t \to \infty} P_{\underline{a}}(X(t)=j) =$

P(sok idő múlva ránézve a rendszerre a Markov-lánc épp a j állapotban van.)

Időátlagok

Tfh. van valamilyen költségráta fgv.

Adott egy ergodikus $(X(t), t \geq 0)$ Markov-lánc és egy költségráta függvény (f) $(f: S \to \mathbb{R})$

Ha i állapotban van egy ideig, akkor ennek költsége $f(i)$.

Ha pl. 13,5 s-ig van ott, akkor költsége $13{,}5 \cdot f(i)$

$[0,t]$ időben a költség:

$$\int_0^t f(X(s))\, ds$$

annyi időt van $f(i)$-ből, amennyi ideig ott tartózkodik.

A hosszútávú átlagos ktg:

$$\lim_{t \to \infty} \underbrace{\frac{\int_0^t f(X(s))\, ds}{t}}_{t \text{ idő alatt volt átlagos ktg}} = \text{ez egységnyi időre eső költség.}$$

hosszútávú átl. ktg

Tétel: Ha $\sum f(i)\pi_i < \infty$, akkor a hosszútávú átlagos költség kiszámolható:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(s))\,ds = \sum_{i\in S} f(i)\pi_i$$

Ez az ergod-tétel.

~~Legyen~~ ~~Ha~~ Ha $f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

hosszú távon hányad részében tartózkodik 1, 2, ... állapotokban?

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s))\,ds = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t I\{X(s)=j\}\,ds}{t} =$$

az idő hányad részében tartózkodik a j állapotban.

$= \pi_j$

Az ergod-tétel szerint

Példa: ① M/M/1 ill. ② M/M/1/B ← korlátos

① M/M/1

Legyen $X(t)$, a t időben a rendszerben lévő igények száma.

Tudjuk, hogy $(X(t), t\geq 0)$ egy folytonos idejű Markov-lánc

és tudjuk a generátorát:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ 2 & 0 & \mu & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \end{array}$$

Tfh. $\lambda < \mu$.

a, Mi a valsége, hogy sok idő múlva a rendszer j állapotban van?

b, Az idő hány %-ában tartózkodik a j állapotban? (∀ egyes állapotra)?
$\hookrightarrow j = 0, 1, \dots$

c, Ha 1 ügyfél egységnyi idejű várakozása költsége 1 Ft, akkor mennyi a kiszolgálórendszer működésének átlagos költsége?

d, Ha $\lambda = 1$, $\mu = 2$, akkor mekkora az a sorhossz, akkor mekkora az a sorhossz, melyet az idő legfeljebb 10^{-8}-ad részében lép fel?

a, Itt a π_j-t kell meghatározni

b, Itt is π_j kell.

$\pi = (\pi_j, j \in S)$ a stacionárius eloszlás.

c, $f(i) = i$ $\quad i = 0, 1, 2, \dots$

A válasz ekkor c,-re: $\sum_{i=0}^{\infty} i \pi_i$ az ergod tétel alapján.

d, A legkisebb az N, amelyre $\pi_{N+1} + \pi_{N+2} + \dots \le 10^{-8}$

H~~atározzuk meg~~

Határozzuk meg a stacionárius eloszlást:

(1) $\underline{\pi} A = \underline{0}$ → invariáns

(2) $\pi_0 + \pi_1 + \ldots = 1$ → stacionárius

sorvektor

$(1) \Rightarrow -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0$

$$\lambda \pi_0 - (\lambda + \mu)\pi_1 + \mu \pi_2 = 0$$

$$\vdots$$

$i \geq 1$ esetére: $\lambda \pi_{i-1} - (\lambda + \mu)\pi_i + \mu \pi_{i+1} = 0$

Két egymást követő sort kivonva, némi átrendezés után $\pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \pi_i \quad \forall i \geq 0$

A rekurzióból:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\right) = \pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \overset{(2)}{=} 1$$

vagyis $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Ezt visszahelyettesítve:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ez a stacionárius eloszlás geometriai eloszlás (pesszimista) $\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$ paraméterrel.

d)

Ez az összeg $= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} = 10^{-8}$

Ezt kell kiírni.

Ebből $\lambda = 1$

$\mu = 2$

$N \approx 27$

M/M/1/B

$\uparrow$

kapacitás = puffer.

HF: meghatározni a garanciát.