Gyakorló feladatok

1. Teljes indukcióval igazolja : (a) $2^n > n^2$ ha $n \geq 5$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Adja meg a legnagyobb intervallumot ahol a függvény invertálható és adja Meg az inverz függvényt.: (a) $x^2 - 2x + 3$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\infty < x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x < \infty \end{cases}$$

3. A definíció alapján igazolja, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{2+n+2n^2} = \frac{1}{2}$

4. Határozza meg a következő számsorozatok határértékét:

$\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}$, $(1-\frac{1}{n})^n$, $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$

$\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^5$, $\frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$, $\frac{n^2 - 8.4^n}{n^2+3^n}$, $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$,

5 Bizonyítsa be, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A > 0$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

Bizonyítsa be, hogy ha $\lim_{n\to\omega} \sqrt[n]{a_n} < 1$ akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6.. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$. Konvergens – a sorozat? Ha konvergens határozza meg a határértékét.

7. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis :
   a. a sorozat korlátos $\Rightarrow$ a sorozat konvergens
   b. a sorozat konvergens $\Rightarrow$ a sorozat monoton
   c. a sorozat monoton $\Rightarrow$ konvergens

8.Adja meg az alábbi műveletek eredményét trigonometrikus alakban :

$(-1+i)^5$, $\sqrt[4]{8}$, $(1+i)^n + (1-i)^n$, $\sqrt[3]{-i}$

9.. $1 - i$ egy komplex szám negyedik gyöke. Adja meg a többi negyedik gyököt.

10 Oldja meg a következő egyenleteket:

$$z^5 - (1 + i)z = 0, \quad z^2 - 3z + 3 - i = 0, \quad z^6 + 16z^2 = 0$$

11.. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Állapítsa meg, hogy melyek végezhetők el az alábbi szorzások közül, és adja meg a szorzat mátrixokat.: $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{B}}$

12.. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ A vektorrendszer lineárisan független vagy lineárisan összefüggő ?

13.. L' Hospital tétel nélkül számítsa ki a következő határértékeket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$$

14. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges valós a,b számok esetén

$$|arctgb - arctga| \le |b - a|$$

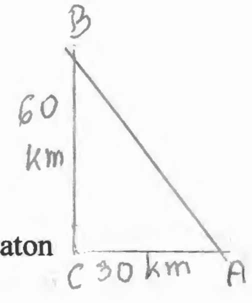
15. Hol szigorúan monoton (a) $x + |\sin x|$, (b) $\sqrt{1+x^2}$

16. Határozza meg a következő határértékeket :

$$\lim_{x\to 0} \frac{chx - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right), \quad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

17. Határozza meg annak a maximális térfogatú kúpnak az adatait, amelynek az alkotója d.

18.. A-ból árút akarnak szállítani B-be. C és B között vasút közlekedik, ezért autóutat terveznek A-ból a vasútvonalig. Hol építsék az utat, ha a szállítási költséget akarják minimalizálni és a szállítási költség vonaton fele az országúti szállítás költségének



19.Vizsgálja meg a következő függvényeket :

$x+\dfrac{1}{x+1}$, $\quad xe^{-x}-1$, $\quad x\ln x$

20..Állapítsa meg a következő mátrixok rangját

$$:\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Határozza meg a mátrixok inverzeit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

22 Állapítsa meg, hogy mely x értékek esetén invertálható az

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \quad \text{mátrix}$$

23 . Oldja meg a következő egyenletrendszereket :

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 0 \\ y+2z-u &= 0 \\ x+z+3u &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-y+z+u &= 1 \\ x+2y-z+4u &= 2 \\ x+7y-4z+11u &= 5 \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} x+y+cz &= 1 \\ x+cy+z &= d \\ cx+y+z &= 2d \end{aligned}$$

Mely c és d értékek esetén a) van 1 megoldás ?

b) nincs megoldás ?

c) van végtelen sok megoldás ?

FELADATOK.

1. Oldja meg a differenciálegyenleteket: $y'' - 2y' = e^x.\sin x$, $y'' - 4y' + 4y = 2x$

   $y''- y'-2y = 4x^2$, $y'' - 5y' = 2e^{5x}$

2. Oldja meg a kezdeti érték feladatot : $y'' - y' - 2y = 4x^2$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$

3. Oldja meg a differenciálegyenlet rendszereket::

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y - 3x \\ \dot{y} &= y - 2x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\dot{x} &= -5x - y + e^t \\ \dot{y} &= x - 3y + e^{2t}\end{aligned}$$

4. Hol folytonosak az alábbi függvények?

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad y \geq x \\ 0 & \text{ha} \quad y < x \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Hol differenciálhatók a következő függvények? Adja meg a gradienseiket..

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f(x,y) = x.y + \frac{x}{y}, \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

6. Írja fel a $z = x^2 + 2y^2$ egyenletű felület $P_0(2,1)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

Többesintegrálok

1. Számítsa ki a következő függvények kettősintegráljait az adott tartományon:
   (a) $f(x,y) = y\sin x$, T határai : $y = 2x$, $x=4$, $y=0$, $y=2$
   (b) $f(x,y) = y^2 - 2x$, T határai : $y^2 = x + 3$, $x = 0$

2. Számítsa ki az $y = \sqrt{x}$ és $y = x/3$ görbék által határolt tartomány területét.

3. Adjon alsó és felső becslést az $\iint_T (2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$ kettősintegrálra,

   ha $T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$

4. Határozza meg a következő síkok által határolt test térfogatát :
   $x + y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 4$

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 = 1$ henger $z = 0$ és $z = 2 - x - y$ síkok közötti részének a térfogatát.

6. Számítsa ki a $\iiint_V x^2 yz dV$. hármasintegrált ha

   $V : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

7. Számítsa ki az $f(x,y,z) = x^2 z$ függvény hármasintegrálját, az

   $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömb $z = \dfrac{x^2 + y^2}{3}$ paraboloid feletti részére.

8. Számítsa ki a következő hármasintegrált : $\iiint_V (y^2 + z^2)dxdydz$,

   Ha V az $x^2 + y^2 \leq 4$ alapkörű egyenes henger $z = 2$ és $z=8$ síkok közötti része.

Feladatok.

1. Adja meg a következő görbéket vektor-skalár függvénnyel :
(a) $4(x-1)^2+(y+2)^2=4,\ z=1$ (b) $x^2+9y^2=1,\ z=0$

2. Milyen görbét ír le a vektor-skalár függvény?
(a) $\underline{r}(t)=(1+\cos t)\underline{i}+3\underline{j}+\sin t\,\underline{k}$, (b) $\cos t\,\underline{i}+9\sin t\,\underline{j}+t\,\underline{k}$

3. $\underline{r}(t)=1/\cos t\,\underline{i}+\sin t\,\underline{j}+\cos t\,\underline{k}$ Hol folytonos, hol differenciálható?
Írja fel az érintő egyenletét az $(1, 0, 1)$ pontban.

4. A mozgás pályagörbéje : $\underline{r}(t)=e^{-t}\cos t\,\underline{i}+e^{-t}\sin t\,\underline{j}+e^{-t}\,\underline{k}$
Adja meg a sebességet és a gyorsulást

5. $x(t)=t\cos 3\ln t,\ y(t)=t\sin 3\ln t,\ z=2t\ \ 1\le t\le e$ Számítsa ki az ívhosszt.

6. Határozza meg az $\underline{r}(u,v)=u\cos v\,\underline{i}+(u^2+1)\,\underline{j}+u\sin v\,\underline{k}$ felület
$P(1, 2, 0)$ pontbel érintősíkjának az egyenletét.

7. Adja meg a vektormező deriváltjának mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban
(a) $\underline{v}(\underline{r})=\underline{r}.|\underline{r}|$, (b) $\underline{v}(\underline{r})=\underline{r}\ln|\underline{r}|$ $\quad \underline{r}\in R^3$

8. Határozza meg a következő függvények görbementi integrálját :
(a) $\underline{v}(\underline{r})=2xy\,\underline{i}-(x+z)\,\underline{j}+4xy\,\underline{k}$ L: $y=x^2+3\ \ 0\le x\le 3$
(b) $\underline{v}(\underline{r})=\operatorname{grad}(x^2+4y^2-2z)$ L : $\cos t\,\underline{i}+\sin t\,\underline{j}+2t\,\underline{k}\ \ 0\le t\le\pi$

9. Határozza meg – ha létezik – a potenciálfüggvényt :
(a) $(yz+z/x^2)\,\underline{i}+xz\,\underline{j}+(xy-1/x)\,\underline{k}$
(b) $|\underline{r}|^2\underline{r}\quad \underline{r}\in R^3$

10. Határozza meg a $\underline{v}(\underline{r})=(y+z-x^2)\underline{i}+(x-y^2+z)\underline{j}+(x+y-z^2)\underline{k}$
vektormező felületmenti integrálját a $z=4-x^2-y^2$ felület $z\ge 0$
részére $\underline{n}\,\underline{k}\ge 0$ irányítással.

11. Határozza meg az $yz\,\underline{i}+2xy\,\underline{j}-(2x+4)z\,\underline{k}$ vektormező felületmenti
integrálját:
(a) az $x^2+y^2+z^2=1$ felületre kifelé irányított normálissal.
(b) a fenti felület $z\ge 0$ részére.

12. Határozza meg a $h(y)$ függvényt úgy, hogy $\operatorname{divgrad} f(\underline{r})=0$ legyen,
ha $f(\underline{r})=x^2-y^2h(y)-z^2$

FELADATOK.

1. Vizsgálja meg konvergencia szempontból a következő $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorokat:

$a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{n.2^n}$, $a_n = (1+ 1/n)^n$, $a_n = \dfrac{3^n}{4^n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

2. Vizsgálja meg konvergencia szempontból a következő $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorokat

$a_n = (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$, $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^3+1}$, $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2+2}$

3. Adja meg a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorok konvergencia tartományát :

$a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

4. Számítsa ki a következő integrálok közelítő értékét Taylor sorral, 10^{-3} pontossággal:

$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$, $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{e^x - 1}{x} dx$, $\displaystyle\int_0^{0,2} \sqrt{1+x^3}\, dx$

5. Fejtse Fourier sorba az alábbi függvényeket az adott intervallumokon.

$f(x) = x \quad -\pi \le x \le \pi$, $\quad f(x) = \operatorname{sgn} x \quad -\pi \le x \le \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ -1 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$