

Pótló zárthelyi dolgozat

A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

- Egy megkevert magyarkártya-pakliból 4 lapot húzunk. Legyenek P, Z, T ill. M azon események, hogy a húzott lapok közt van piros, zöld, tők ill. makk. Jelölje továbbá rendre A, F, K ill. \hat{A} azt, hogy húztunk legalább egy alsót, felsőt, királyt ill. ászot, valamint N_i azt, hogy húztunk i értékű lapot, ahol i lehetséges értékei 7, 8, 9 ill. 10. Fejezzük ki a következő eseményeket a fent megadott események és a halmazműveletek segítségével:
 - húztunk számos és figurás lapot is,
 - négy ászot húztunk,
 - a húzott lapok a piros alsó, a piros felső, a piros király és a piros ász.

A megadott kifejezések helyességének indoklása is szükséges.

(Egy pakli magyar kártya a következő 32 lapból áll: minden színből (piros, zöld, tők és makk) van 4 darab számos lap 7, 8, 9 ill. 10 értékekkel, illetve 4 figurás lap: alsó, felső, király és ász.)

- Az $A, B \subset \Omega$ eseményekről tudjuk, hogy $1/4$ a valószínűsége annak, hogy kettejük közül egyik sem következik be, illetve hogy ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy mindkettő bekövetkezik. Határozzuk meg az $\mathbb{P}(B \setminus A)$ valószínűséget, ha azt is tudjuk, hogy az A esemény kétszer akkora valószínűséggel következik be, mint a B esemény.
- Száz kocka közül 98 szabályos, kettő pedig szabálytalan, ez utóbbiaknak mindegyik oldalán 6-os van. Találomra választunk egy kockát a százból, majd a kiválasztott kockával háromszor dobunk. Mekkora az esélye, hogy szabálytalan kockával dobtunk, ha mindhárom dobás eredménye hatos lett?
- Egy fiókban 10 pár (azaz 20 darab) párosítatlan zokni van. Véletlenszerűen kihúzzunk belőlük 4 darabot, jelölje X a négy húzott zokniból összerakható párok számát. Határozzuk meg X eloszlását.
- Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(XY > 0 \mid X < 2)$ valószínűséget és az $\mathbb{E}(X + 2Y)$ várható értéket.

	X			
Y				

- Legyenek $X \sim Geo(p)$ és $Y \sim Geo(p)$ független, geometriai eloszlású valószínűségi változók, melyeknek $p \in (0; 1)$ paramétere azonos. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X \geq 3)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\mathbb{D}(X + Y) = 2$.

Nevezetes eloszlások táblázata

Eloszlás neve	Jelölés	$\text{ran}X$	$f_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$1 - p, p$	p	$p(1 - p)$
binomiális	$Bin(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
geometriai	$Geo(p)$	\mathbb{N}^+	$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$