A49

2021. november 11., csütörtök 11:58

A49

A4 Valószínűségszámítás — IX. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. november 11.

2D sűrűségfüggvények tulajdonságai

együttes : $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$

perem $$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

feltételes $$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$P(X<5 \mid Y=1) = \int_{-\infty}^{5} f_{1|2}(x|y)\,dx \Big|_{y=1}$$

Szorzatszabály $P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A)$

$$f(x,y) = f_{2|1}(y|x)\cdot f_1(x) = f_{1|2}(x|y)\cdot f_2(y)$$

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) \iff \text{X és Y függetlenek}$$

2D eloszlásfüggvények tulajdonságai

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x,y) = 1$$

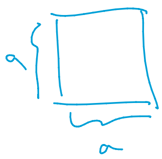
peremeloszlás

$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,y)dy}^{f_1(s)}ds = \int_{-\infty}^{x} f_1(s)ds$$

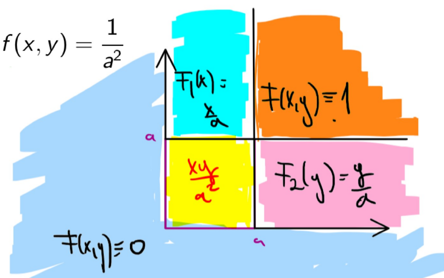
$$F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dxdt = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)dt$$

Kétváltozós egyenletes eloszlás négyzeten

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \text{ vagy } y<0, \\ \frac{xy}{a^2}, & \text{ha } 0<x\le a \text{ és } 0<y\le a, \\ \frac{x}{a}, & \text{ha } 0<x\le a \text{ és } y>a, \\ \frac{y}{a}, & \text{ha } x>a \text{ és } 0<y\le a, \\ 1, & \text{ha } x>a \text{ és } y>a, \end{cases}$$



$$\frac{1}{T_\square} = f(x,y) = \frac{1}{a^2}$$



Kétváltozós egyenletes eloszlás négyzeten

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{1}{a^2}}^{f(x,y)} dyds = \int_0^x \overbrace{\frac{1}{a}}^{f_1(s)} ds = \frac{x}{a}$$

$$f_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2}dy = \int_0^a \frac{1}{a^2}dy = \left[\frac{y}{a^2}\right]_0^a = \frac{a}{a^2} - 0 = \frac{1}{a}$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2}dxdt = \int_0^y \frac{1}{a}dt = \frac{y}{a}$$

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^y \frac{1}{a^2} \overset{dtds}{=} \frac{xy}{a^2}$$

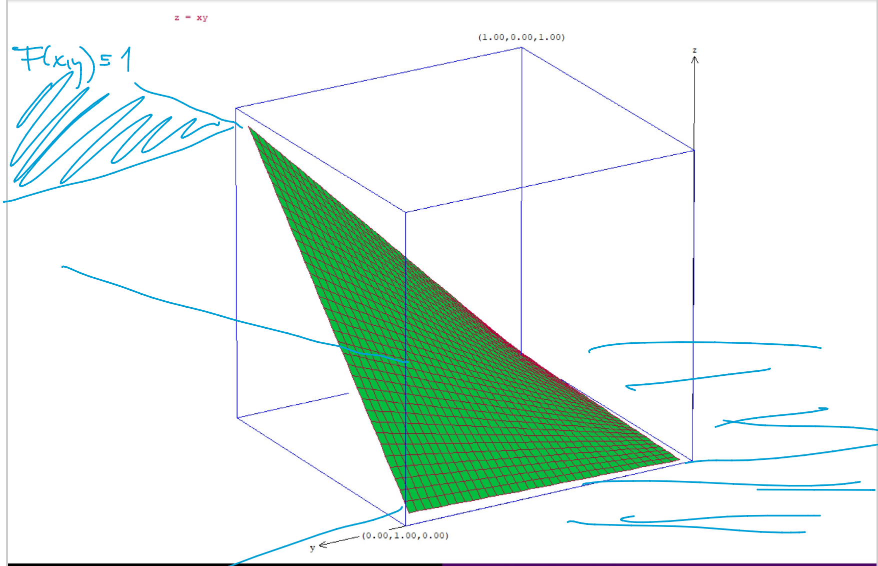
$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1/a^2}{1/a} = \frac{1}{a} = f_2(y)$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/a^2}{1/a} = \frac{1}{a} = f_1(x)$$

$$\frac{1}{a^2} = f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} \iff X \text{ és } Y \text{ függetlenek}$$

Kétváltozós egyenletes eloszlás négyzeten

$F(x,y) = 1$

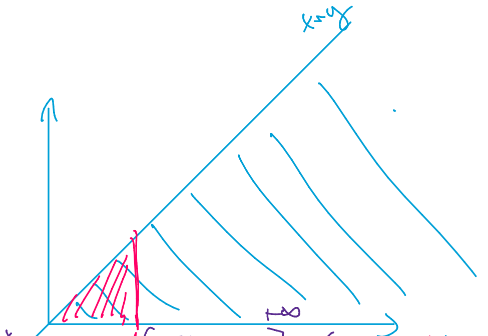


$F(x,y) = 0$

Példa

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-x}e^{-y}, & \text{ha } 0 \le y \le x < \infty, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az $\boxed{y < x}$ *tartományon.* $c = ?$ $P(X \le 1) = ?$



$$1 = c\int_0^{+\infty}\int_0^{x} f(x,y)\,dy\,dx = c\int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-(x+y)}\,dy\,dx = c\int_0^{+\infty}\left[-e^{-(x+y)}\right]_0^{x} dx = c\int_0^{+\infty} -e^{-2x}+e^{-x}\,dx = c\left[\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right]_0^{+\infty} = c\left(\lim_{x\to+\infty} \cancel{\frac{e^{-2x}}{2}} - \cancel{e^{-x}} - \left(\frac{e^0}{2} - e^0\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot c = 1$$

$$c = 2$$

$$P(X \le 1) = \int_0^1\int_0^x 2e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \left[2\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}\right]_0^1 = e^{-2} - 2e^{-1} - \underbrace{\left(e^0 - 2e^0\right)}_{-1} = 1 + \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e}$$

Feltételes várható érték (diszkrét)

X feltételes várható értéke, ha az A esemény adott:

$$E(X|A) = \sum_k P(X = k|A)\cdot k$$

$$E(g(X)|A) = \sum_k P(X = k|A)\cdot g(k)$$

X feltételes várható érték adott Y valváltozó esetén:

$$E(X|Y = y) = \sum_k P(X = k|Y = y)\cdot k$$

Teljes várható érték tétele:

$$\boxed{E(X) = \sum_m P(Y = m)\cdot E(X|Y = m)}$$

$\underbrace{E(X|Y)}_{\text{valváltozó}} = Y$-nak függvénye

Teljes várható érték tétele (diszkrét)

$$\boxed{E(E(X|Y)) = E(X)}$$

TELJES VSZSÉG TÉTELE

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k) = \sum_k k \cdot \sum_m P(X=k|Y=m) \cdot P(Y=m) =$$

$$= \sum_m P(Y=m) \underbrace{\sum_k k \cdot P(X=k|Y=m)}_{E(X|Y=m)} =$$

$$= \sum_m P(Y=m) \cdot E(X|Y=m) = E(E(X|Y))$$

Megjegyzés: A sima várható érték tehát előáll a feltételes várható értékek súlyozott átlagából. Ugyanakkor $E(X=k|Y)$ Y függvénye, és egy valószínűségi változó, tehát van értelme újra venni a várható értékét.

Geometriai eloszlás várható értéke és szórása

$X \sim Geom(p)$
$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p$$

Legyen $A_1 = \{X=1\}, A_2 = \{X>1\}$ azaz elsőre sikeres a kísérlet illetve elsőre sikertelen:

$$E(X|X=1) = 1$$

Ha elsőre nem volt sikeres a kísérlet, akkor mivel a geometriai eloszlás is örökifjú, újraindul a számlálás:

$$E(X|X>1) = 1 + E(X)$$

Használjuk a Teljes várható érték tételét:

$$E(X) = P(X=1)\cdot E(X|X=1) + P(X>1)E(X|X>1) =$$
$$= p + (1-p)(1+E(X)) = \cancel{p} + 1 + \cancel{E(X)} - \cancel{p} - pE(X) = \cancel{E(X)}$$
$$pE(X) = 1$$

Ebből

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Ugyanúgy:

$E(X^2|X=1) = 1$

$E(X^2|X>1) = E((1+X)^2) = 1 + 2E(X) + E(X^2)$

$$E(X^2) = p\cdot 1 + (1-p)(1 + \frac{2}{p} + E(X^2)) = \cancel{p} + 1 + \frac{2}{p} + \cancel{E(X^2)} - \cancel{p} - 2 - pE(X^2) = \cancel{E(X^2)}$$
$$\frac{2}{p} - 1 = pE(X^2)$$
$$\frac{2-p}{p^2} = E(X^2)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Várható érték 2D-ben (folytonos)

Emlékeztető:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)dx \qquad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)dy$$

$$\cancel{\iint_{\mathbb{R}^2} (X,Y)\, f(x,y)\,dxdy}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot x \cdot y \; dxdy$$

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)dxdy$$

$g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{1|2}(x|y)\cdot x\, dx = y\text{-tól függ!}$$

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x)\cdot y\, dy = x\text{-től függ!}$$

Feltételes variancia

Feltételes momentum

$$E(X^k|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{1|2}(x|y)\cdot x^k\, dx$$

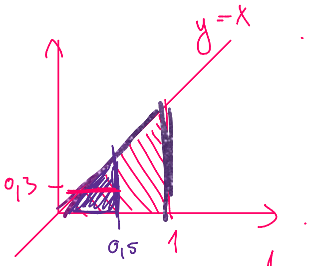
$$E(Y^k|X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x)\cdot y^k\, dy$$

Feltételes variancia

$$D^2(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$$
$$D^2(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2$$

Példa

Legyen $f(x,y)$ egyenletes a következő tartományon:
$x, y > 0, y < x, x < 1$.
$f_1(x) = ?, f_2(y) = ?, f_{1|2}(x|y) = ?, f_{2|1}(y|x) = ?, P(X < 0.5|Y = 0.3) = ?, E(X|Y) = ?, E(X|Y = 0.5) = ? E(Y|X) = ?, E(Y|X = 0.2) = ?, D^2(X|Y) = ?, D^2(Y|X) = ?$



$f(x,y) = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^x 2dy = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_y^1 2dx = 2 - 2y \qquad 0 < y < 1$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2-2y} = \frac{1}{1-y} \qquad 0 < y < x < 1$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \qquad 0 < y < x < 1$$

$$P(X < 0.5|\underset{0.3}{\cancel{Y}}) = \int_y^{0.5} f_{1|2}(x|y)dx = \int_y^{0.5} \frac{1}{1-y}dx = \left[\frac{x-y}{1-y}\right]_{0.3}^{0.5} = \frac{2}{7}$$

$$E(X|Y = y) = \int_y^1 \frac{1}{1-y} \cdot x\, dx = \left[\frac{x^2}{2(1-y)}\right]_y^1 = \frac{1-y^2}{2(1-y)} = \frac{1+y}{2}$$

$$E(X|Y = 0.5) = \frac{1+0.5}{2} = 0.75$$

$$E(Y|X = x) = \int_0^x \frac{1}{x} \cdot y\, dy = \left[\frac{y^2}{2x}\right]_0^x = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

$$E(Y|X = 0.2) = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

$$E(X^2|Y) = \int_y^1 f_{1|2}(x|y) \cdot x^2\, dx = \int_y^1 \frac{x^2}{1-y}\, dx = \frac{1-y^3}{3(1-y)} = \frac{y^2+y+1}{3}$$

$$(E(X|Y))^2 = \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 = \frac{y^2+2y+1}{4}$$

$$D^2(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2 =$$

$$\frac{y^2+1+y}{3} - \frac{1+2y+y^2}{4} = \frac{(y-1)^2}{12}$$

$$E(Y^2|X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2|1}(y|x) \cdot y^2\, d_x = \int_0^x \frac{y^2}{x}\, dx = \frac{x^2}{3}$$

$$(E(Y|X))^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$D^2(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{12}$$

Példa

$X \sim Uni(0,1)$

0 Y X 1

$f(x,y) = ?$

$Y \sim Uni(0,X)$

$0 < y < x < 1$

Van egy egységnyi hosszú bot, amit egy random pontnál (=egyenletes eloszlású) megtörünk, és azt a felét tartjuk meg, ami tartalmazza a bal végét. Ezt az eljárást folytatva (tovább tördelve, mindig a bal véget megtartva) mi lesz a várható hossz két törés után? Legyen X a hossz az első törés után, Y a második törés után. Mi lesz $f_1(x), f_2(y), f(x,y), f_{1|2}(x|y), f_{2|1}(y|x), F_1(x), F_2(y), E(Y), E(Y|X) = ?$

$f_1(x) = 1$ ha $x \in (0,1)$.

$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x}$ ha $y \in (0,x)$.

$f(x,y) = f_{2|1}(y|x) \cdot f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$ SZORZATSZABÁLY

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_y^1 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y$

$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/x}{-\ln y} = -\frac{1}{x \cdot \ln y}$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(s)\, ds = \int_0^x 1\, ds = \boxed{x}$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)\, dt = \int_0^y -\ln t\, dt =$$

$$= -\left([t \cdot \ln t]_0^y - \int_0^y t \cdot \frac{1}{t}\, dt\right) = [t \cdot \ln t - t]_0^y =$$

$$-(y \cdot \ln y - (0 \cdot \ln 0 - 0)) = \boxed{y - y \ln y}$$

$$E(Y) = \int_0^1 -\ln y \cdot y\, dy = [-\frac{y^2}{2} \cdot \ln y]_0^1 + \int_0^1 \frac{y^2}{2y}\, dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}(-\ln y + \frac{1}{2})\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

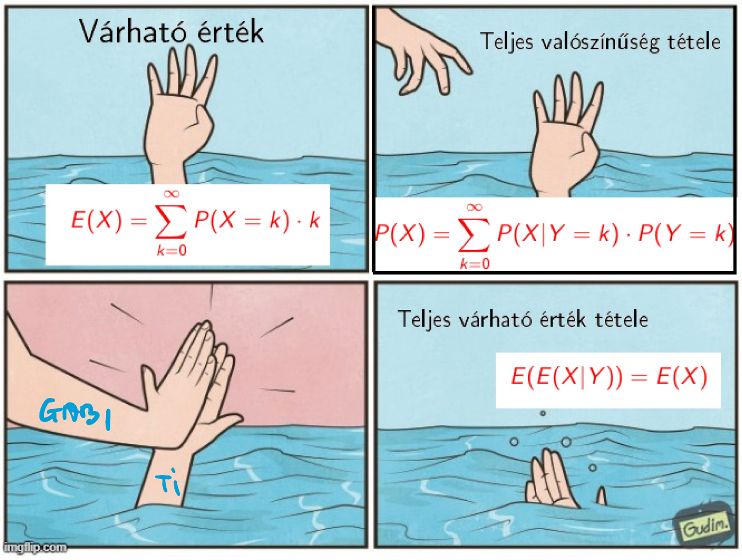
$$E(Y|X) = \int_0^X \frac{1}{x} \cdot y \, dy = \frac{x}{2}$$

Hogyan lehetett volna a várható értékeket sokkal egyszerűbben?

$E(Y|X) = X/2$, mivel a töréspont egyenletes eloszlású $(0, X)$-en, ugyanezért $E(X) = 1/2$. Ekkor

TELJES VÁRHATÓ ÉRTÉK TÉTEL

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{E(X)}{2} = \frac{1}{4}$$



Kovariancia

Ha $E(X), E(Y) < \infty$

$$COV(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) =$$
$$= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) =$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) =$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

A kovariancia azt mutatja meg hogy az $X - E(X)$ illetve $Y - E(Y)$ egyforma vagy különböző előjelűek-e (együtt vagy ellentétesen mozognak-e). Azaz **a pozitív kovariancia lineáris kapcsolatra utal**: ha X nagy Y is nagy és ha X kicsi Y is kicsi. Ugyanakkor a negatív kovariancia nem jelent fordított arányosságot.

Ha X, Y függetlenek $\Longrightarrow COV(X,Y) = 0$

$\not\Longleftarrow$

$COV(X,Y)=0 \not\Rightarrow X,Y$ függetlenek

Példa

$$X = \{-1,0,1\}, \quad Y = |X|$$

$P(X=-1)=\frac{1}{4}$

$P(X=0)=\frac{1}{2}$

$P(X=1)=\frac{1}{4}$

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0$

$E(X) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$

$E(XY) = \sum_m \sum_l P(X=l, Y=m)\cdot l\cdot m = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = 0$

Kovariancia tulajdonságai

$COV(X,X) = D^2(X)$
$COV(X,a) = 0$
$COV(X,Y) = COV(Y,X)$
$COV(aX,bY) = abCOV(X,Y)$
$COV(X+a,Y+b) = COV(X,Y)$

Fun fact:

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 =$$

$$= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)-(E(X))^2-(E(Y))^2-2E(X)E(Y) =$$

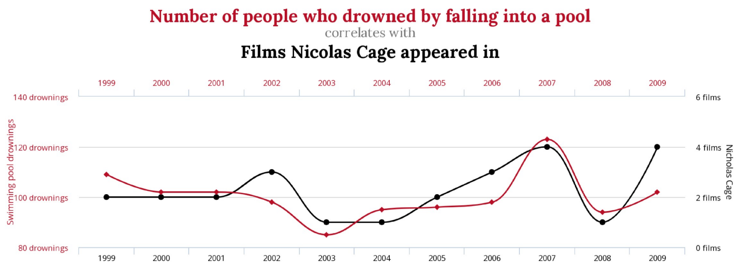
$$= D^2(X) + D^2(Y) + 2COV(X,Y)$$

Ha tehát X, Y függetlenek, akkor $\Rightarrow cov(X,Y)=0$
$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Korreláció

$$CORR(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

A korreláció a kovariancia normált változata.
$CORR(X, Y) = 0$ X, Y korrelálatlanok.
CORRELATION IS NOT CAUSATION! REMEMBER NICHOLAS CAGE!



$-1 \leq CORR(X,Y) \leq 1$

$CORR(X,Y) > 0$ nem értelmezhető, hogy $X \Rightarrow Y$ sem $Y \Rightarrow X$ (nem implikálják egymást)

$CORR(X,Y) = 0$ nem értelmezhető X és Y függetlenek lennének

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists
- Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis —Introduction to Probability

Köszönöm a figyelmet!