Megoldás

ANALÍZIS(2)
Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2002. június 6.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (11 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet-rendszer megoldását!

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \; (2) \rightarrow 1-\lambda = \pm 3 \rightarrow \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 4 \; (2)$$

$$\lambda_1: \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{11} + 3 s_{12} = 0 \; : \quad \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \; (3)$$

$$\lambda_2: \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{21} - 3 s_{22} = 0 \; : \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \; (1)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{s}_2 \; (2) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \; (1)$$

2. feladat (10 pont)
Írja fel a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságával kapcsolatban tanult tételt! Állítását bizonyítsa be!

L. Segédlet!

3. feladat (13 pont)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és az f összegfüggvényét (véges sok elemi művelet segítségével)!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1}} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \; (1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underset{\sim 1}{\sqrt[n]{n}} \; (1) \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \rightarrow R = 2$$

$$\left(\text{Vagy} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{(n+1)} \frac{2^n}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \right)$$

$$x = 2 : \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \; : \text{div.} \quad ; \quad x = -2 : \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \; \text{konv.}$$

$$\text{K.T.}: \; [-2, 2) \; (3)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} \; (2) = \frac{1}{2-x} \quad (4)$$

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \qquad R = 2 \qquad (3)$$

$$f(x) = \int \frac{1}{2-x}\, dx = -\ln(2-x) + C$$

$$x = 0 : \quad f(0) = 0 = -\ln 2 + C \rightarrow C = \ln 2$$

$$f(x) = \ln 2 - \ln(2-x) \; (3)$$

$$\left(\text{Vagy} : \quad f(x) = \int_0^x f'(x)\, dx = \int_0^x \frac{1}{2-x}\, dx \; \ldots \right)$$

4. feladat (10 pont)
A Taylor sor definíciójával írja fel az

$$f(x) = \cos x$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát!
Indokolja meg, hogy a sor minden x-re a függvényt állítja elő!

L. Segédlet!

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y^2+1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0 \text{ és } y \text{ tetszőleges} \end{cases} \qquad P_0(1,-1)$$

a) Hol folytonos a függvény?
b) Totálisan deriválható-e f a P_0 pontban?
   $\operatorname{grad} f|_{P_0} = ?$
c) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel \underline{i} - \underline{j}$

a.) Ha $x \neq 0$, tehát a $(0,y)$ pontok kivételével, a függvény folytonos függvények összetétele és így folytonos. (2)

y tengely:

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{y^2+1}{x^2}}_{\to\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Az y tengely mentén is: $\displaystyle\lim_{\substack{x=0 \\ y\to b}} \underbrace{f(x,y)}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = \frac{\pi}{2} = f(0,b)$$

Tehát f mindenütt folytonos.

$x \neq 0$

$f'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y^2+1}{x^2}\right)^2} \cdot \dfrac{-2(y^2+1)}{x^3}$ ①

$f'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y^2+1}{x^2}\right)^2} \cdot \dfrac{2y}{x^2}$ ①

$x \neq 0$ esetén léteznek és folytonosak $\Rightarrow \exists\ \mathrm{grad}\, f$ ②
tehát $\mathrm{grad}\, f(P_0)$ is $\exists$ (tot diffh)

$\mathrm{grad}\, f(P_0) = f'_x(1,-1)\,\underline{i} + f'_y(1,-1)\,\underline{j} = -\frac{4}{5}\,\underline{i} - \frac{2}{5}\,\underline{j}$ ③

c) $\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j}$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \mathrm{grad}\, f(P_0) \cdot \underline{e} = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2}{5\sqrt{2}}$ ④

6. feladat (17 pont)*

a) Ismertesse a polártranszformációt! Írja fel és számítsa ki a Jacobi determináns értékét!
b) Írja le polárkoordinátákkal az alábbi két tartományt!

$T_1: \quad x^2 + y^2 \le R^2\,, \qquad T_2: \quad x^2 + y^2 - 2x \le 0\,,\ y \ge 0\,,\ y \le x$

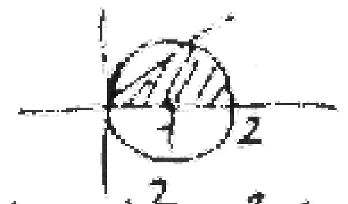
c) $\displaystyle\iint_{T_2} (2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$

a) $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}$ ①

$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$ ① ②

b) $T_1: \quad 0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ ②

$T_2: \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ ②①



$(x-1)^2 + y^2 \le 1$

c) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} (2 + r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$ ②

$= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(r^2 + \frac{1}{3}r^3\sin\varphi\right)\Big|_{r=0}^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/4}\Big(4\underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} + \underbrace{\frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi}_{f^3 f'}\Big)d\varphi =$ ②

$= \left(2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{8}{3\cdot 4}\cos^4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{6} - \left(0 + 0 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi + 3}{2}$ ③

7. feladat (9 pont)*

a) Írja fel az alábbi függvények $z_0 = 0$ körüli Laurent sorait!

$f(z) = \sin z\,, \qquad g(z) = \sin(3z^2)\,, \qquad h(z) = \dfrac{\sin(3z^2)}{z^7}$

b) $\operatorname*{res}_{z=0} h(z) = ?\,, \qquad \operatorname*{res}_{z=0}\left(\dfrac{g(z)}{z^2}\right) = ?\,, \qquad \operatorname*{res}_{z=0}\left(\dfrac{g(z)}{z^5}\right) = ?$

a) $f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \qquad z \in \mathbb{C}$ ①

$g(z) = \sin 3z^2 = 3z^2 - \frac{3^3 z^6}{3!} + \frac{3^5 z^{10}}{5!} - \frac{3^7 z^{14}}{7!} + \dots \qquad z \in \mathbb{C}$ ②

$h(z) = \frac{\sin 3z^2}{z^7} = \frac{3}{z^5} - \frac{3^3}{3!\,z} + \frac{3^5}{5!}z^3 - \dots \qquad |z| > 0$ ①

b) $\operatorname*{res}_{z=0} h(z) = -\frac{3^3}{3!} = -\frac{9}{2}$ ③

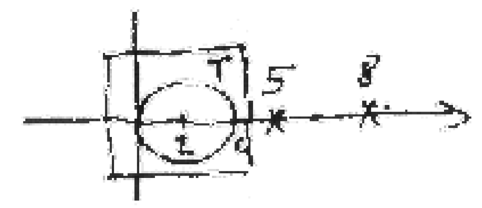
$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin 3z^2}{z^2} = 0$ ① $\left(\text{Sor:}\ 3 - \frac{3^3 z^4}{3!} + \dots\right)$

$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin 3z^2}{z^5} = 0$ ① $\left(\text{Sor:}\ \frac{3}{z^3} - \frac{3^3 z}{3!} + \dots\right)$

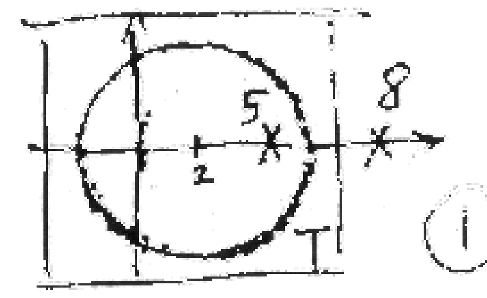
8. feladat (14 pont)*

$I = \displaystyle\oint_L \frac{\cos jz}{(z-5)^2\,(z-8)}\,dz\,, \qquad \mathrm{Re}\, I = ?\,, \quad \mathrm{Im}\, I = ?$

a) L: $|z-2| = 2$
b) L: $|z-2| = 4$

a) 

① $I = 0$, mert az integrandusz T-n reguláris ②
(Cauchy-féle alaptétel)

b) 

① $I = \displaystyle\oint_L \frac{\overbrace{\frac{\cos jz}{z-8}}^{f(z)\ \text{reg}\ T\text{-n}}}{(z-5)^2}\,dz = 2\pi j \left(\frac{\cos jz}{z-8}\right)'\Big|_{z=5} =$ ② ②

$= 2\pi j\, \dfrac{-j(\sin jz)(z-8) - \cos jz}{(z-8)^2}\Big|_{z=5} =$

$$= 2\pi j \, \frac{3j \sin j5 - \cos j5}{9} = j\, \frac{2}{9}\pi\,(-3\,\mathrm{sh}5 - \mathrm{ch}5) \quad 2$$

$$\mathrm{Re}\, I = 0\ ; \quad \mathrm{Im}\, I = \frac{2}{9}\pi\,(-3\,\mathrm{sh}5 - \mathrm{ch}5) \quad 2$$

Pótfeladat (csak az elégséges (és esetleg a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = (y^2 - 4y)\, x e^{2x}$$

$y \equiv 4$, $y \equiv 0$ megoldás 2

$$\int \frac{dy}{y(y-4)} = \int \underset{u}{x}\, \underset{v'}{e^{2x}}\, dx \quad 3$$

$$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4} \quad \ldots \quad A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y}\right) dy = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\ln|y-4| - \ln|y|\right) = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

2 2 1

v1 02 06 06/5.

4 10 pont

További fontos Taylor sorfejtések:

Pl. $f(x) = \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad x \in \mathbb{R}$

Ui.:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$\downarrow$ Innen periodikusan ismétlődik

1

2 $\quad f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ 4

A deriváltak $(-\infty, \infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\, x$-re: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ 3

Pl. $f(x) = \boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad x \in \mathbb{R}$

Az előző példához hasonlóan:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \end{array}\right\} \text{a deriváltak egyenletesen korlátosak}$$

$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \downarrow$ Innen periodikusan ismétlődik

Pl. $f(x) = \boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \quad x \in \mathbb{R}$

$f^{(k)}(x) = e^x; \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad k \in \mathbb{N}$

Konvergencia: $f^{(k)}(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$-en nem korlátos, de tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$-en már igen. $|f^{(k)}(x)| \le e^{\beta}$ Tehát itt a deriváltak egyenletesen korlátosak, így a tétel alapján $f(x) = T(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$-re.

$\alpha \quad x \quad \beta$

Pl. $f(x) = \boxed{\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad x \in \mathbb{R}$

$\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots & x \in \mathbb{R} \\ e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ldots$$