

[Németh Róbert]

WWW.ME.BME.HU

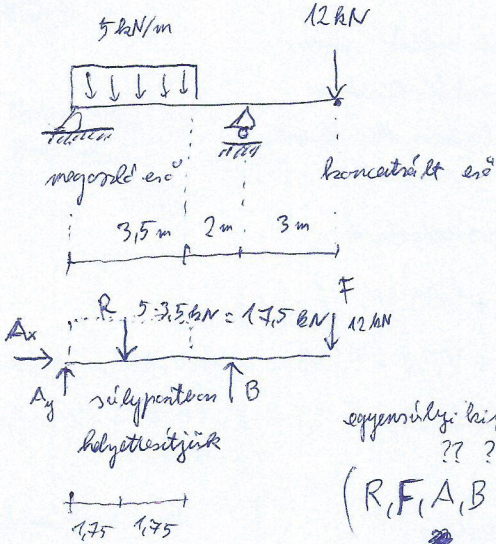
→ OKTATÁS

→ feladatok

Ismeretanyagok, Felülvizsgék

Feladatmegoldó óra

1.



elbűvölés ✓

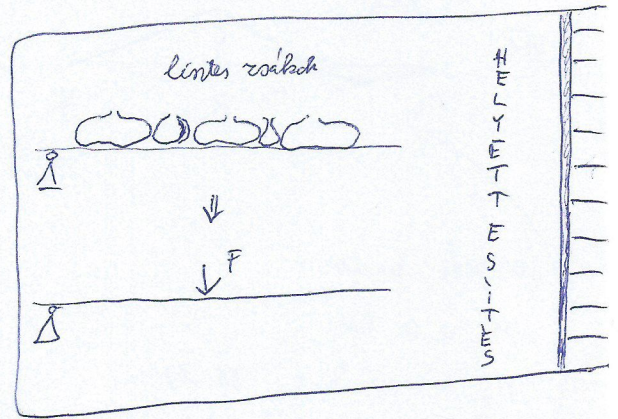
reakcióegyenletek / egyensúlyi egyenletek

egyensúly kiértékelés: ???

$$(R, F, A, B) = 0$$

működés, de először

feltételek annak, hogy egyensúlyban maradjon



(nyomatéki egyenletek: 3 nem egy ~~szemben~~ egyenesre illeszkedő ponton)

levegő

3 ismeretlen  
3 egyenlet

tegyük először az irányban ható erőt, mint ahogy a feladatban

$$\sum F_{ix} : A_x = 0 \quad // \text{ vízszintes egyenlet}$$

$$\sum M_i^{(A)} : ~~A_x~~ + 17,5 \cdot 1,75 + 12 \cdot 3,5 - B \cdot 5,5 = 0 \rightarrow B = 24,11 \text{ kN } (+) (\uparrow)$$

$$\sum F_{iy} : +17,5 + 12 - A_y - 24,11 = 0 \rightarrow A_y = 5,39 \text{ kN } (+) (\uparrow)$$

$$\text{ellenőrző egyenlet} : \sum M_i^{(B)} : -17,5 \cdot 3,75 + 12 \cdot 3 + 5,39 \cdot 5,5 + 0 = 0,02 \approx 0$$

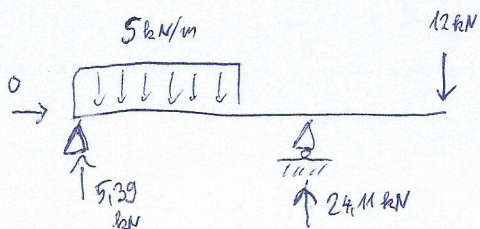
B erőt nem felejt  
rejt meg körül

(belső: hiba: akkor lehet maximum, mint a belső erők. súly)

Ha nem hármaspontú fel a B erőt a további számolásban:

$$\sum M_i^{(B)} : -17,5 \cdot 3,75 + 12 \cdot 3 + A_y \cdot 5,5 = 0 \rightarrow A_y = +5,39 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_{iy} : +17,5 + 12 - 5,39 - 24,11 \stackrel{?}{=} 0 \quad (\text{Ha pl. 24-re jön ki, akkor a 12-est az előjelet elcsúsztattuk.})$$

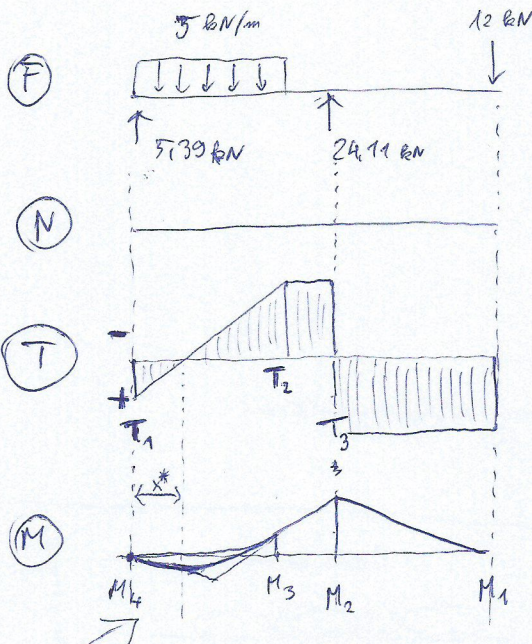


Ismeretanyagok: N, T, M

normál, nyíró, nyomaték

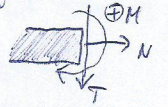
Normálcsi' mindeütt 0 len :

(M)

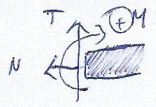


Kinden beartóztatónál  
megvalasztásuk, hogy  
jóllel vagy balról  
nézünk.

jóllel nézve



balról nézve



mit balról  
nézünk (x=0)

koncentrált erőnél ugrás  
megvaló erőnél lineáris  
egyb. helyeken ~~konstans~~

BALRÓL kezdve nézünk :

$$T_1 = +5,39 \text{ kN} \quad (x=0)$$

$$T_2 = +5,39 - 5 \cdot 3,5 = -12,11 \text{ kN} \quad (x=3,5)$$

$$T_3 = +5,39 - 5 \cdot 3,5 + 24,11 = +12 \text{ kN} \quad (x=5,5)$$

JÓBBRÓL kezdve :

$$M_1 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2 = -12 \cdot 3 = -36 \text{ kNm}$$

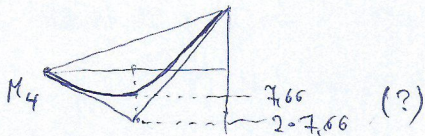
$$M_3 = -12 \cdot 5 + 24,11 \cdot 2 = -11,78 \text{ kNm}$$

$M_4$  : a parabolához kell legalább 3 pont

hellyelzés magyaráz :  $\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{5 \cdot 3,5^2}{8} = 7,66 \text{ kNm}$  aliban az irányban, ahogy a megvaló erő működik.

$\left\{ \begin{array}{l} M \text{ első deriváltja } T \\ T \text{ első deriváltja } F \\ M \text{ második deriváltja } F \end{array} \right.$

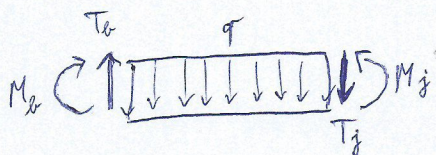
koncentrált erőnél töres  
koncentrált nyomatékúknál ugrás  
(ilyen most nincs)  
konstans T  $\rightarrow$  lineáris M  
lineáris T  $\rightarrow$  parabola M



Másodfokú parabola helyelzésa mindig  $\frac{q \cdot l}{8}$ . [Magic-képlet]  
 $q$  = megvaló erő intenzitása  
 $l$  = beáradás ~~re~~ nekem kőma

$$T(x^*) = 5,39 - 5 \cdot x = 0 \rightarrow x^* = 1,078 \text{ m} \quad \text{lineáris nekem zérushelye}$$

$$M_{\max} = M(x^*) = +5,39 \cdot 1,078 - \left(5 \cdot 1,078\right) \cdot \frac{1,078}{2} = 2,91 \text{ kNm}$$



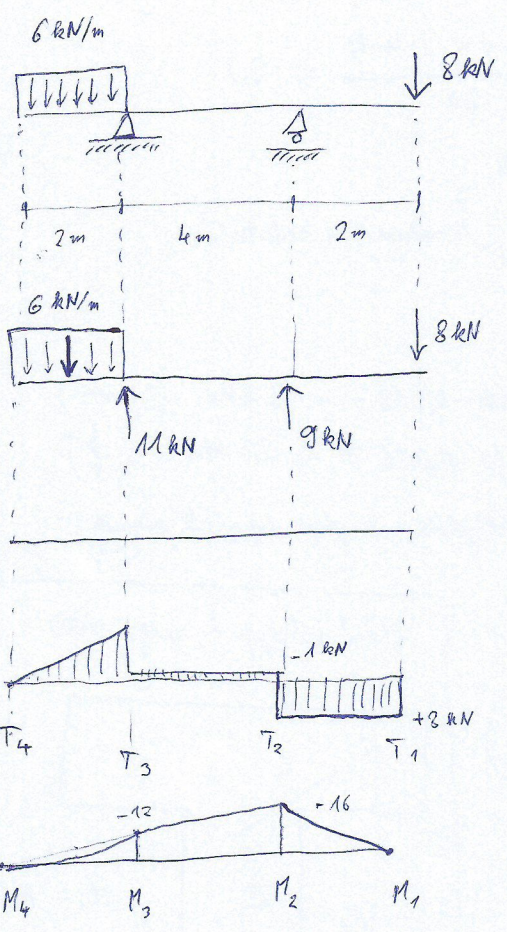
$$M_k = M_i + T_i \cdot \frac{l}{2} - \left(q \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{l}{4}$$

$$\sum F_{iy} : -T_i + ql + T_j = 0$$

$$\sum M_{ij} : +M_i + T_i \cdot l - (ql) \cdot \frac{l}{2} - M_j = 0 \Rightarrow T_i = \frac{M_j - M_i}{l} + \frac{ql}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_k = \frac{M_i + M_j}{2} + \frac{ql^2}{8}}$$

2.



Nyírási (T) számolása JOBBRÓL:

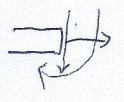
$$T_1 = +8 \text{ kN}$$

$$T_2 = +8 \text{ kN} - 9 \text{ kN} = -1 \text{ kN}$$

$$T_3 = +8 \text{ kN} - 9 \text{ kN} - 11 \text{ kN} = -12 \text{ kN}$$

$$T_4 = +8 \text{ kN} - 9 \text{ kN} - 11 \text{ kN} + 6 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

BALRÓL számolva:  $T_4 = 0$



F

N

T

M

Árét nincs (N), mert az a vízszintes erővel esel.

Koncentrált erőnél (T) ugrik. Tudni kell az ugástól balra és jobbra felváltva lévő értékeket.

Megoldó erő alatt másodfokú parabola.

Konstans (T) → lineáris (M).

Ugás a (T)-ben → törés (M)-ben.

JOBBRÓL számolva:

$$M_1 = 0 \quad (\text{mért az erőben } 0)$$

$$M_2 = -8 \cdot 2 \text{ kNm} = -16 \text{ kNm}$$

$$M_3 = -8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = -12 \text{ kNm}$$

$$M_4 = -8 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 11 \cdot 2 - (6 \cdot 2) \cdot 1 = 0$$

Egyenes közepétől való helyezés:

$$\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{6 \cdot 2^2}{8} = 3$$

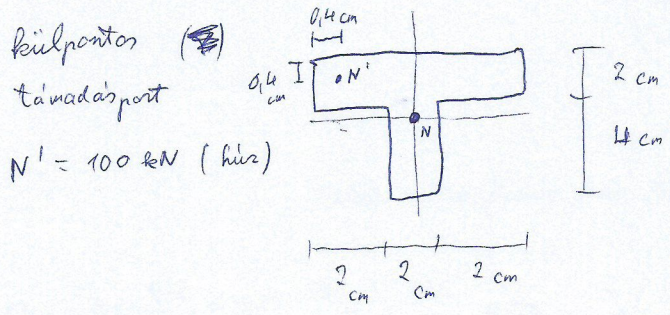
mégegyszer felvétel a 3-cit, ahhoz a végpontok értékeket mértékegységeket kapjuk

n-edfokú polinom meghatározásához n+1 db pont (adat) kell.

3.

Tenyűlegesrámítás - normáltenűleges számítás

súlypontban működő erő: 
$$\sigma_x = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

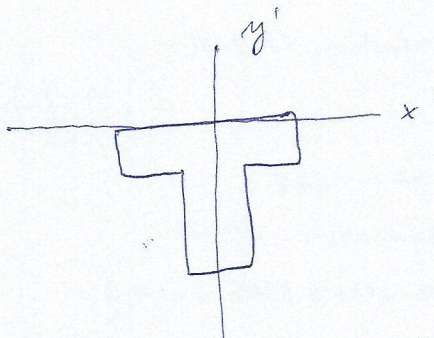


koncentrált koncentrált jellemzők igénybevételek } ezeket nem működő, hogy feszültséget tudjunk számolni

± számításból fogjuk meghatározni

$\sigma_{min}$ ;  $\sigma_{max}$ ;  $\sigma$  feszültségdiagram meghatározása

súlypont mindig rajta van a szimmetriatengelyen  
↳ nincs rajta, ezért külpont



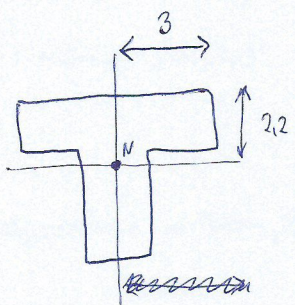
$$y'_s = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4}{20} = 2,2$$

$$N' = (N, M_x, M_y)$$

súlypontba redukálás

$$N = +100 \text{ kN}$$

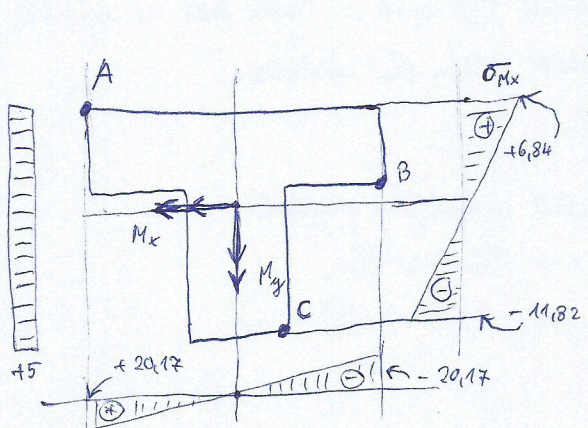
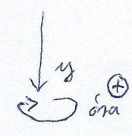
súlypont helye:



$$M_x = -100 \cdot 0,018 = -1,8 \text{ kNm} \quad (\leftarrow\leftarrow)$$

$$M_y = +100 \cdot 0,026 = +2,6 \text{ kNm} \quad (\downarrow)$$

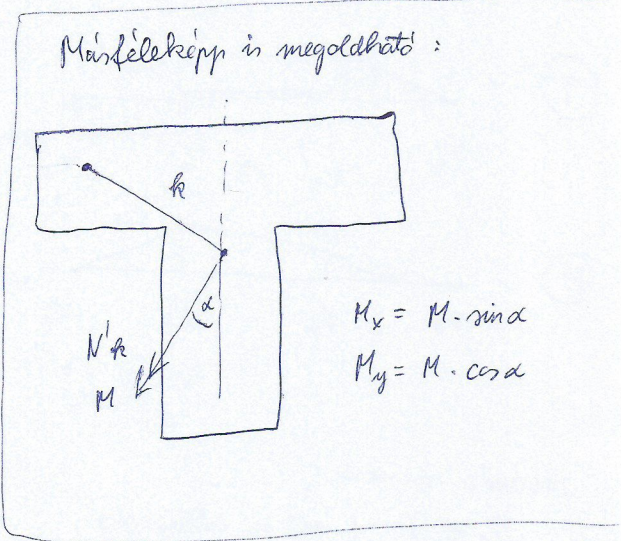
Az előjeleket a tengelyek irányából nézzük.



$$J_y = 38,67 \text{ cm}^4$$

$$J_x = 57,87 \text{ cm}^4$$

adottak  
nem kell kiindolni



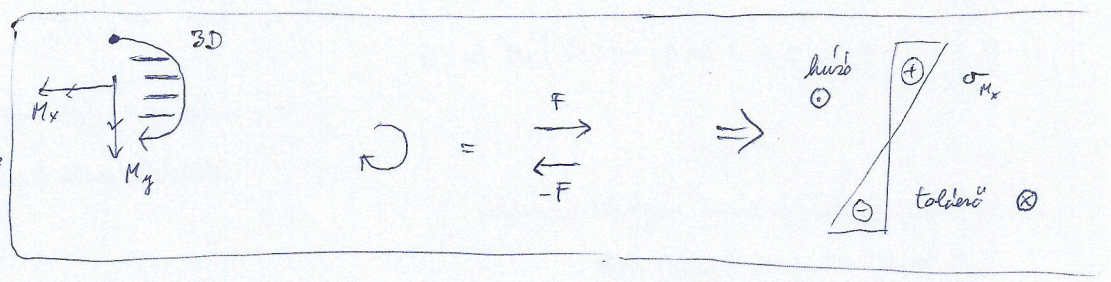
$y$  szimmetriatengely  $\rightarrow$  tehetetlenségi tértényező:  $C_{xy} = 0$

$$\frac{N}{A} \text{ minden pontban ugyanolyan feszültséget eredményez, } \frac{100}{20} = 5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \text{ mindenhol.}$$

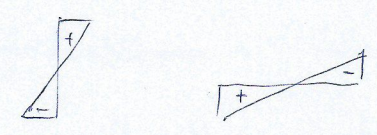
$M_x$  hatására:  $\sigma_{M_x}$

$$\frac{M_x}{J_x} \cdot y = \frac{180}{57,87} \cdot 2,2 = 6,84 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{180}{57,87} \cdot 3,8 = 11,82 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



$$\frac{M_y}{J_y} \cdot x = \frac{260}{38,67} \cdot 3 = 20,17 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



$\sigma_{\max}$ : biztosan a **A** pont normálfeszültsége lesz (mines feszítés és húzás pont)

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = +5 + 6,84 + 20,17 = +32,01 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

stb.

$\sigma_{\min}$ : nem tudjuk biztosan, de lineárisan változik, ezért csak sarokponton lehet

jólbra és lefelé ne legyen keresztmetszet

$$\sigma_B = \frac{100}{20} + \frac{180}{57,87} \cdot 0,2 - \frac{260}{38,67} \cdot 3 = -14,55 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

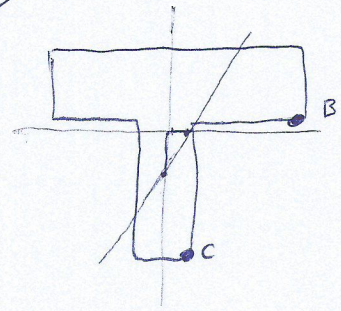
$$\sigma_C = \frac{100}{20} - \frac{180}{57,87} \cdot 3,8 - \frac{260}{38,67} \cdot 1 = -13,54 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Semleges tengely: itt fordul el a test, mines normálterületű, ami ettől merrebb van, annak nagyobb len a normálterületű, amelyre közelebb van, annak kisebb len a normálterületű.

$$\sigma = \frac{100}{20} - \frac{180}{57,87} y - \frac{260}{38,67} \cdot x \quad \text{egyen beosztásúra függvény}$$

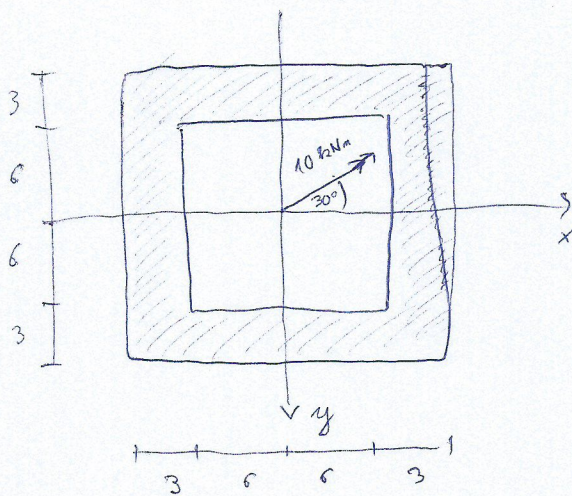
semleges tengely:  $\sigma = 0$

- ha  $x=0$ , akkor  $y = 1,6 \text{ cm}$
- ha  $y=0$ , akkor  $x = 0,74 \text{ cm}$



területek aránya a normálterületek arányával egyenlő

4.



$(\alpha = 30^\circ)$

$M = 10 \text{ kNm}$

$N = 0$  (mest csak 1 nyomaték van megadva?)

$M_x = M \cdot \cos \alpha = 8,66 \text{ kNm}$

$M_y = M \cdot \sin \alpha = 5 \text{ kNm}$

Seladát: feszültségdiagram;  $\sigma_{\min}$ ;  $\sigma_{\max}$ ; semleges tengely

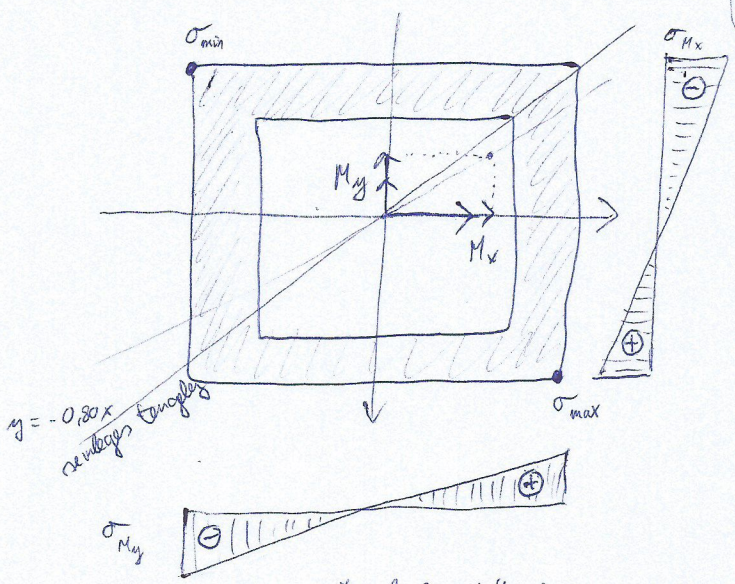
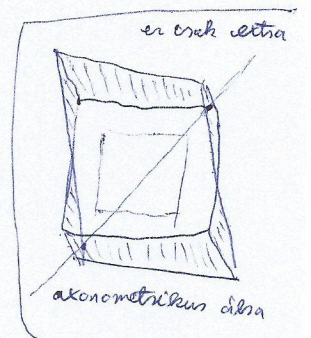
inercia:  $J_x = \frac{ab^3}{12}$

$J_x = \frac{15 \cdot 18^3}{12} - \frac{9 \cdot 12^3}{12} = 5994 \text{ cm}^4$

külső darab inerciaja      belső darab inerciaja

$J_y = \frac{18 \cdot 15^3}{12} - \frac{12 \cdot 9^3}{12} = 4333 \text{ cm}^4$

$$\sigma = + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$



$\frac{M_x}{J_x} \cdot y = \frac{866}{5994} \cdot 9 = 1,30 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

$\frac{M_y}{J_y} \cdot x = \frac{500}{4333} \cdot 7,5 = 0,86 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

$\sigma_{\min} = - \frac{866}{5994} \cdot 9 - \frac{500}{4333} \cdot 7,5 = -2,16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

$\sigma_{\max} = + \frac{866}{5994} \cdot 9 + \frac{500}{4333} \cdot 7,5 = +2,16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

semleges tengely:  $\sigma = + \frac{866}{5994} \cdot y + \frac{500}{4333} \cdot x = 0$

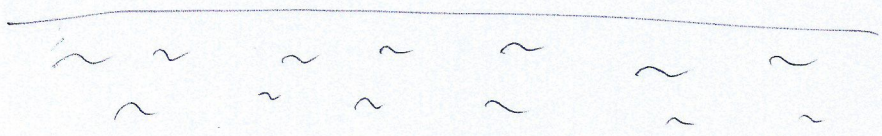
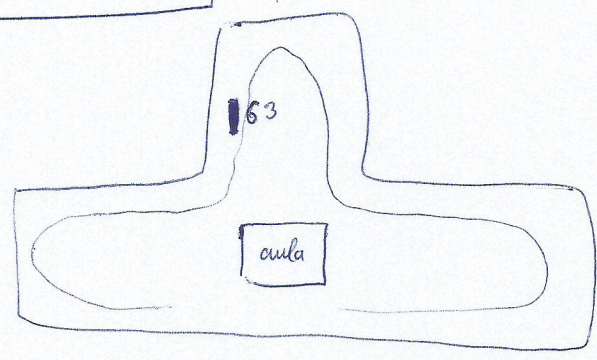
$\rightarrow x = 0; y = 0$

$\rightarrow y = -0,80 \cdot x$

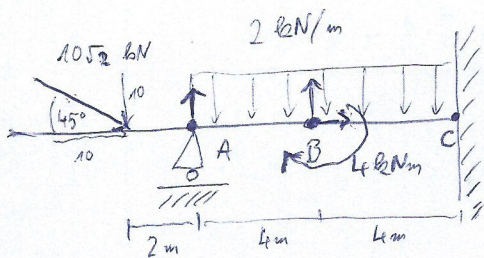
nem a tengelyek mértékét az előjelnél, hanem  $M_y$  és  $M_x$  irányát, akkor ha pozitív értékű csomópont jelölést

K magasföldszint 63 - isáskeli  
virnya ~~1/2~~

kőnyatór



DUNA



$$\sum F_x = 0$$

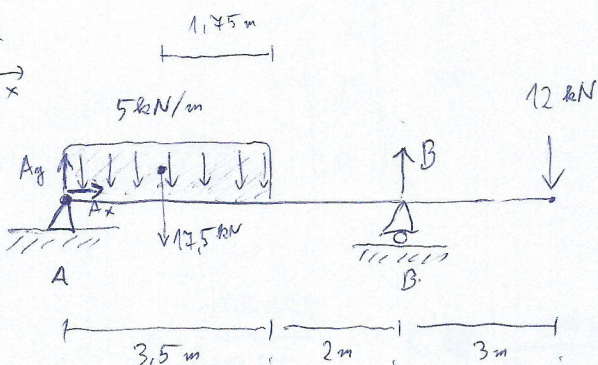
$$10 \text{ kN} + B_x = 0 \rightarrow B_x = -10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$10 \text{ kN} - A_y - B_y = 0$$

$$\sum M_c = 0$$

$$10 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m} - A_y \cdot 8 - B_y \cdot 4 = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$17,5 \cdot 1,75 - B \cdot 5,5 + 12 \cdot 8,5 = 0$$

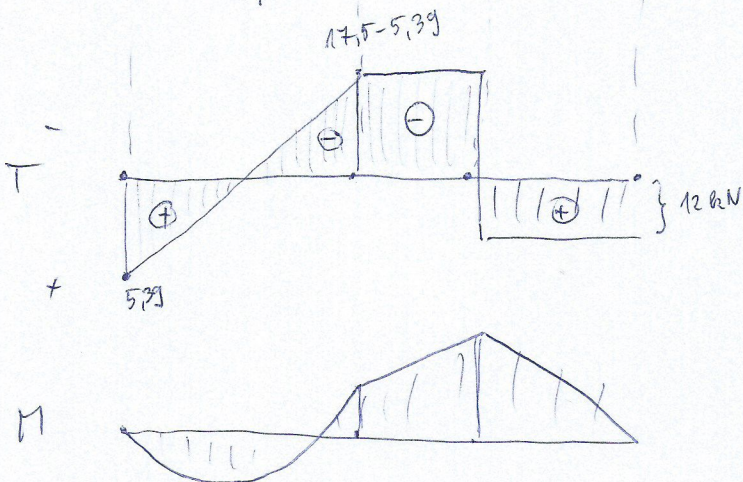
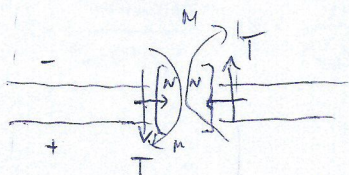
$$\rightarrow B = 24,11 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

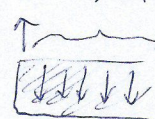
$$A_y - 17,5 \text{ kN} + 24,11 - 12 \text{ kN} = 0$$

$$\rightarrow A_y = -5,39 \text{ kN}$$

Izengyűrtetel:

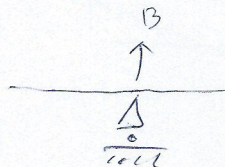


5,39 kN 5 kN/m



$$\sum F = 0$$

$$5,39 \text{ kN} - 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x = 0$$



$$\sum F_y = 5,39 - 17,5$$

$$+ 24,11 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0$$

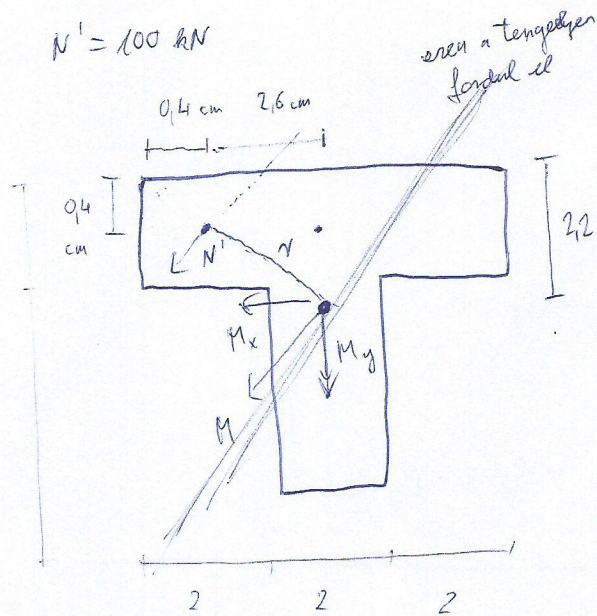
$$F = 5 \cdot x$$

$$F \cdot \frac{x}{2} = 5 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$-5 \cdot \frac{x^2}{2} + 5,39 \cdot x$$

$$A_y \cdot x - (x - 1,75) \cdot 17,5 + 24,11 \text{ kN} \cdot (x - 5,5)$$

$$N' = 100 \text{ kN}$$



$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

tömegközéppont c

$$\frac{6 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4}{20} = 2,2$$

ami a tengelyekkel  
befejező ferdét  
(lásd), az  $\oplus$ ,  
a másik irányba  $\ominus$

$$M_x = -1,8 \text{ kNm}$$

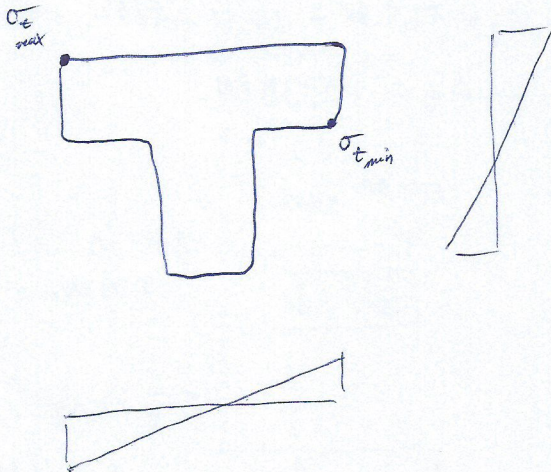
$$M_y = +2,6 \text{ kNm}$$

$$M = r \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = \underbrace{i \cdot y \cdot N}_{M_x} - \underbrace{j \cdot x \cdot N}_{M_y}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_y = -x \cdot N = -0,026 \cdot 100 \text{ kN} = -2,6 \text{ kNm}$$

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = \frac{100 \text{ kN}}{20 \text{ cm}^2} + \frac{-1,8 \text{ kNm}}{57,87 \text{ cm}^4} \cdot y - \frac{2,6 \text{ kNm}}{38,67 \text{ cm}^4} \cdot x$$

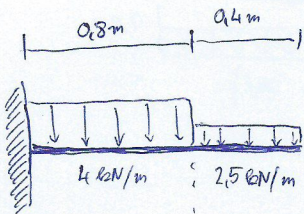


$$\sigma_t' = 0$$

$$\frac{100 \text{ kN}}{20 \text{ cm}^2} - \frac{1,8 \text{ kNm}}{57,87 \text{ cm}^4} \cdot y - \frac{2,6 \text{ kNm}}{38,67 \text{ cm}^4} \cdot x = 0$$



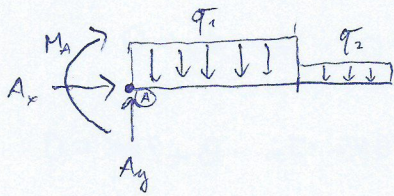
1



a.) reakciók?

b.) igénybevételek?

egyenlet - elhárítás:



- egyensúlyi kijelentés:

$$(A_y, A_x, M_A, q_1, q_2) \doteq 0$$

$$A_x? A_y? M_A?$$

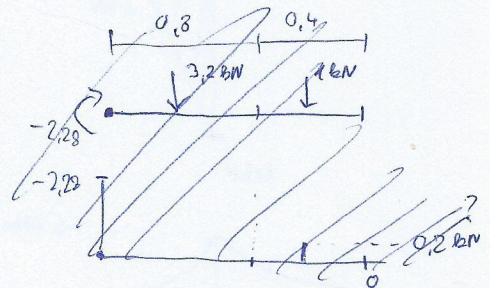
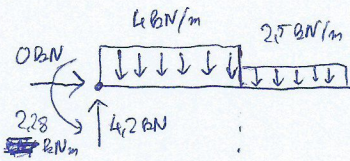
- megoldás:

$$\sum F_x = A_x = 0 \text{ kN} \quad \checkmark$$

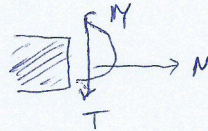
$$\sum F_y = -A_y + 4 \text{ kN/m} \cdot 0,8 \text{ m} + 2,5 \text{ kN/m} \cdot 0,4 \text{ m} = 0 \quad \rightarrow A_y = 4 \cdot 0,8 + 2,5 \cdot 0,4 = 4,2 \text{ kN} \quad \checkmark$$

$$\sum M = M_A + 0,4 \cdot 0,8 \cdot 4 + 1 \cdot 0,4 \cdot 2,5 = 0 \quad \rightarrow M_A = -2,28 \text{ kNm} \quad \checkmark$$

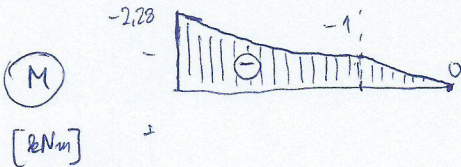
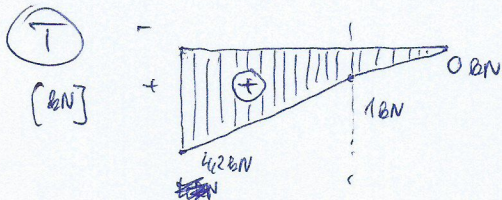
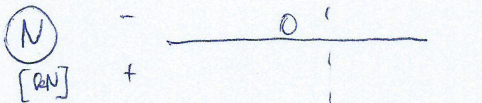
- eredményvárlat:



- igénybevételei ábrák:

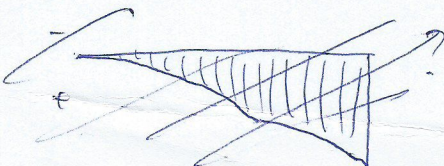


(x-irányú erő)

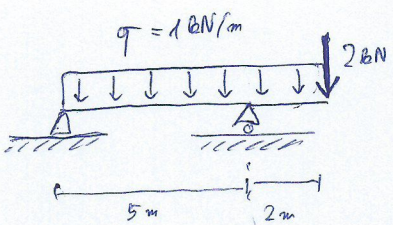


$$-2,5 \cdot 0,4 \cdot \frac{0,4}{2} = -0,2$$

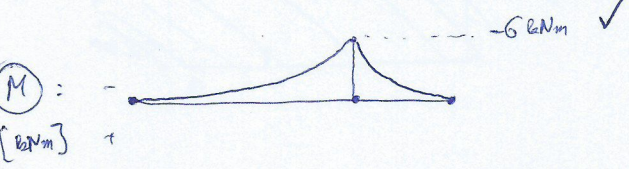
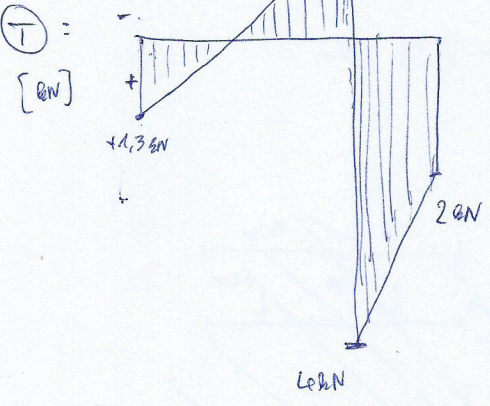
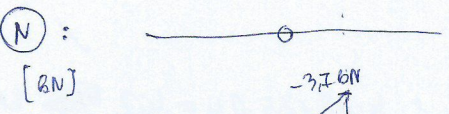
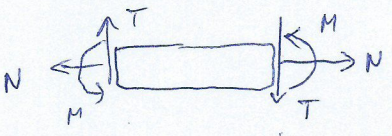
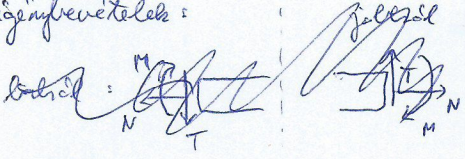
$$-2,5 \cdot 0,4 \left(0,8 + \frac{0,4}{2}\right) - 4 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} = -2,28$$



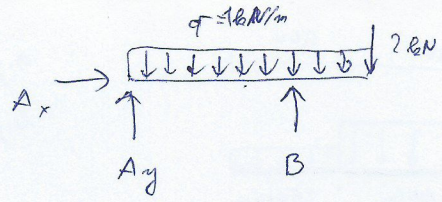
2.



- rögzítésvetületek:



- elhúlkéntés:



- egy. hízséntés:

$(A, (q), B, F) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow A_x, A_y, B ?$

- megoldás:  $\sum F_x: -A_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

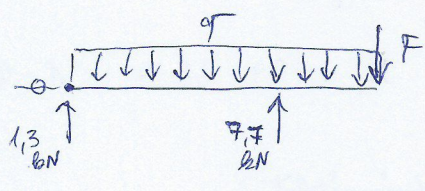
$\sum F_y: -A_y + 1 \text{ kN/m} \cdot 7 \text{ m} - B + 2 \text{ kN} = 0$

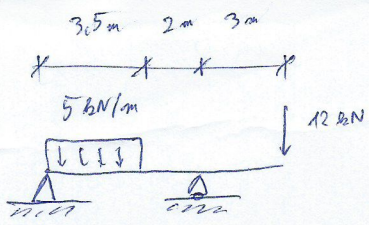
$\sum M_A: 1 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} - B \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 0$

$\hookrightarrow B = \frac{49 + 14}{5} = 7.7 \text{ kN}$

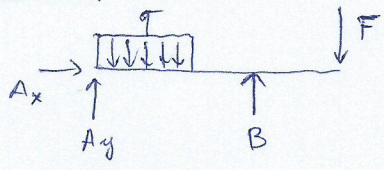
$A_y = 7 - B + 2 = 1.3 \text{ kN}$

- megoldás vázlat:





- elhárítottak:



- egy. bijelentés:  $(A_x, q, B, F) \equiv 0$

- megoldás:  
 $\sum F_x = A_x = 0$

$$\sum F_y = A_y - 5 \cdot 3,5 + B - 12 = 0$$

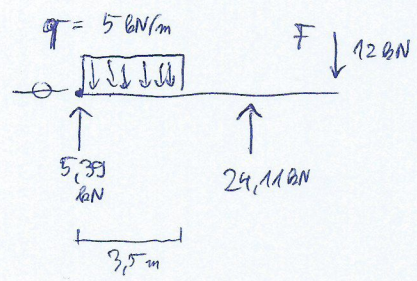
$$\sum M = \frac{5 \cdot 3,5 \cdot 3,5}{2} - 5,5 \cdot B + 12 \cdot 8,5 = 0$$

$$\rightarrow B = \frac{5 \cdot 3,5^2}{2} + 12 \cdot 8,5}{5,5} = 24,11 \text{ kN}$$

$$\rightarrow A_y = 12 + 5 \cdot 3,5 - B = 5,39 \text{ kN}$$

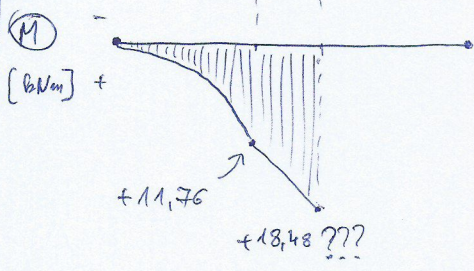
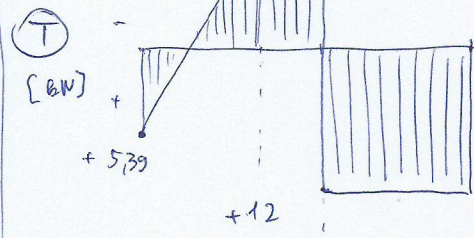
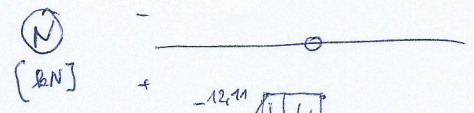
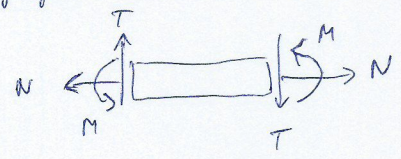
- megoldás

- megoldás vázlat:



- igénybevételek:

jólrodalom rendszere!



balról:

$$-5,39 \cdot x + 5 \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

az első 3,5 m-en  
 utána  $8,75 \cdot x$

jobbról:

$$12x$$

majd 3 m-től  
 $12x - 24,11 \cdot (x-3)$

~~5,5 m-től~~ 5,5 m-ig  
 utána jólrodalom  
 rendszer működik

(M)

