ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása

2008. december 5.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 2^{2n+3} \cdot \frac{1}{10^n}$ b2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-6}{n}\right)^n$

a.) $a_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ $(0 \le) c < 1$: $\sum^{\infty} a_n$ konv.

$c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum^{\infty} a_n$ div.

$(c = 1 \quad : \quad ?)$

3

b.)

b1) $\boxed{6}$ $\sqrt[n]{n^2\, 4^n \cdot 8\, \frac{1}{10^n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot 4 \sqrt[n]{8}\, \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} < 1$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{8} \to 1$

$\Rightarrow$ a sor konv.

b2.) $\boxed{5}$ $\sum^{\infty} b_n$

$b_n = \left(1 + \frac{-6}{n}\right)^n \to e^{-6} \ne 0 \Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ div.

(Nem teljesül a konv. szüks. feltétele)

2. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi sorok konvergencia sugarait!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x+5)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x+5)^{3n}$

a.) $\boxed{7}$ $x_0 = -5$ $a_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4} = \frac{1}{R_a} \Rightarrow R_a = 4$

b.) $\boxed{3}$ $u := (x+5)^3$ helyettesítéssel visszavezetjük a)-ra:

$|u| = |x+5|^3 < 4 \Rightarrow |x+5| < \sqrt[3]{4} = R_b$

an2 zzp 081205/1

3. feladat ($\cancel{15}$ 17 **pont)**

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

$a1)\quad f(x) = e^{-3x}\,, \quad x_0 = 2 \qquad\qquad a2)\quad g(x) = x^3\, e^{-3x}\,, \quad x_0 = 0$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} g(x)\,dx$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

a.) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \qquad R = \infty$

a1) $\boxed{6}$ $f(x) = e^{-3(x-2)-6} = e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3(x-2))^n}{n!} = e^{-6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} (x-2)^n$

K.T: $(-\infty, \infty)$

a2) $\boxed{4}$ $g(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} x^{n+3} =$

K.T.: $(-\infty, \infty)$

$= x^3 - 3x^4 + \frac{3^2}{2!} x^5 - \frac{3^3}{3!} x^6 + \frac{3^4}{4!} x^7 - \dots$

b.) Szabad tagonként integrálni:

$\boxed{7}$ $\int_0^{0,1} g(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{3^2}{2!}\frac{x^6}{6} - \frac{3^3}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{3^4}{4!}\frac{x^8}{8} - \dots\right]_0^{0,1} =$

$= \underbrace{\frac{0,1^4}{4} - \frac{3}{5} 0,1^5 + \frac{3}{4} 0,1^6 - \frac{9}{14} 0,1^7}_{:=a} + \underbrace{\frac{3^4}{4!\,8}}_{:=b} 0,1^8 - \dots \approx a$

$|H| < |b| = \frac{3^4}{4!\,8} 0,1^8$, mert Leibniz sor

4. feladat (12 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \qquad \text{és a} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-5x^2}}$$

függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait!

$g^{(6)}(0) = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

an2z2p08120512.

$f(x)=(1+x)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}x^n$ (2) $R_f=1$ (1)

$g(x)=(1+(-5x^2))^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}(-5x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-5)^n\binom{-1/3}{n}x^{2n}$ (3)

$|-5x^2|=5|x|^2<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{5}}=R_g$ (2)

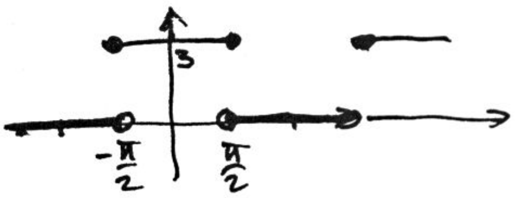
$\frac{g^{(6)}(0)}{6!}=a_6 \Rightarrow g^{6}(0)=6!\,(-5)^3\underbrace{\binom{-1/3}{3}}_{\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!}}$ (4)

5. feladat (~~17~~ 15 **pont**)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{ha } x\in\left[-\pi\,,\,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right) \\ 3\,, & \text{ha } x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=?\,,\quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$



Páros függvény $\Rightarrow b_k=0$ (2)

$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}3\,dx=3$ (3)

$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}3\cos kx\,dx=\frac{6}{\pi}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi/2}=$

$=\frac{6}{\pi}\,\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k}$ (5)

(3) $\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\dots\right.$

(2) $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}$

an222p081205/3.

6. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 5y^2}{3x^2 + y^2}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b) $f'_x(x,y) = ?\,,\quad$ ha $(x,y) \neq (0,0)$

$\boxed{6}$

a.) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-5y^2}{3x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{x^2}{3x^2}}_{=\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5y^2}{3x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\underbrace{\dfrac{-5y^2}{y^2}}_{=-5} = -5 \neq \dfrac{1}{3}$ $\Bigg\} \Rightarrow \nexists$ a hé

Vagy:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5m^2x^2}{3x^2+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{x^2}{x^2}}_{=1}\dfrac{1-5m^2}{3+m^2} = \dfrac{1-5m^2}{3+m^2}$

Függ m-től, tehát $\nexists$ a határérték.

Vagy:

$\lim\limits_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \dfrac{\varrho_n^2\cos^2\varphi_n - 5\varrho_n^2\sin^2\varphi_n}{3\varrho_n^2\cos^2\varphi_n + \varrho_n^2\sin^2\varphi_n} = \lim\limits_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \dfrac{\varrho_n^2}{\varrho_n^2}\,\dfrac{\cos^2\varphi_n - 5\sin^2\varphi_n}{3\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n} = \dfrac{\cos^2\varphi_n - 5\sin^2\varphi_n}{3\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n}$

Függ φ_n-től $\Rightarrow \nexists$ a hé.

$\boxed{4}$

b.) $f'_x(x,y) = \dfrac{2x(3x^2+y^2) - (x^2-5y^2)\cdot 6x}{(3x^2+y^2)^2}$, ha $(x,y) \neq (0,0)$

7. feladat (22 pont)

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{y^2}\cos\pi x \qquad\qquad P_0 = (x_0, y_0) = (-1, 1)$$

a) $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = ?\qquad \mathrm{d}f\,((x_0,y_0),(h,k)) = ?$

b) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

c) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?\,,\quad$ ha $\quad \underline{e} \parallel 6\,\underline{i} - 8\,\underline{j}$

d) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?\qquad$ Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

a.) $f'_x = e^{y^2}(-\sin\pi x\cdot\pi)$ 2 $\qquad f'_x(P_0) = 0$

$f'_y = 2ye^{y^2}\cos\pi x$ 2 $\qquad f'_y(P_0) = 2e(-1)$

$\operatorname{grad} f(P_0) = -2e\,j$ 2

$\mathrm{d}f(P_0,(h,k)) = -2e\,k$ 2

an2: z2p081205/4.

b.) $\boxed{5}$ $f_x'(P_0)(x-x_0) + f_y'(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$

$$-2e(y-1) - (z-(-e)) = 0$$

c.) $\boxed{5}$ $\underline{v} = 6\underline{i} - 8\underline{j}$ $\quad |\underline{v}| = \sqrt{36+64} = 10$

$$\underline{e} = \frac{6}{10}\underline{i} - \frac{8}{10}\underline{j}$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = (-2e\underline{j})\left(\frac{6}{10}\underline{i} - \frac{8}{10}\underline{j}\right) = $$

$$= \frac{16}{10} e \left(= \frac{8}{5} e\right)$$

d.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = 2e$ 2

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = -\underline{j}$$ 2

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

8. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{2+6x^2}$, $\quad x_0 = 0$ $\boxed{6}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $\quad x_0 = 2$ $\boxed{6}$

Eddig jutottam a megoldással.

an2z2p081205/5.