

Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez

Tudnivalók: A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

A munkaidő 45 perc (+15 perc a megoldások feltöltésére). A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését.

1. Határozzuk meg az $Y = (X - 1)(X + 1)$ valószínűségi változó várható értékét, ha

a) X diszkrét valószínűségi változó, amire

$$\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} \frac{i}{12} & \text{ha } i \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{i+3}{12} & \text{ha } i \in \{-2, -1, 0\} \end{cases}$$

és $\text{Ran}(X) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) X folytonos valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2}{18} & \text{ha } -3 < x \leq 0 \\ \frac{x^2+3^2}{18} & \text{ha } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

és $\text{Ran}(X) = [-3; 3]$.

2. De Frász kisasszony kutyaszőrmebundát szeretne készíttetni, ezért segédeit több alkalommal is elküldi kutyákat befogni. Tegyük fel, hogy minden egyes alkalommal 10 kutyát próbálnak befogni. A jó képességű segítők minden egyes kutyát 1% eséllyel kapnak el, a többitől függetlenül. Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy 1000 kutya fogó portyából összesen több, mint 101 ebet kapnak el?

3.* Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$, továbbá

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \text{cov}(Y, X) \\ \mathbb{D}^2(X) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y)^2 & -\text{cov}(Y, X) \\ \text{cov}(X, Y) & \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a $\mathbb{P}(f_X(X) < f_Y(Y))$ valószínűséget.

