2. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egy zsákban 3 kocka van, ezek közül 2 cinkelt. Az egyik cinkelten a hatos valószínűsége 1/3, a másikon 1/4. Kihúzunk egy kockát véletlenszerűen (minden kockát azonos valószínűséggel választunk). Feltéve, hogy a választott kockával ötször dobva pontosan kétszer dobtunk hatost, mennyi az esélye, hogy a kocka szabályos?

   Megoldás:

   (0 pont) A rövidség kedvéért vezessünk be jelöléseket a következő eseményekre:

   $$\begin{aligned}
   K &= \{\text{a választott kockával ötször dobva pontosan kétszer dobtunk hatost}\},\\
   A &= \{\text{a szabályos kockát húztuk ki}\},\\
   B &= \{\text{azt a kockát húztuk ki, amivel } 1/3 \text{ a hatosdobás valószínűsége}\},\\
   C &= \{\text{azt a kockát húztuk ki, amivel } 1/4 \text{ a hatosdobás valószínűsége}\}.
   \end{aligned}$$

   (Ha nincs bevezetve külön jelölés az eseményekre, hanem szövegesen vannak körülírva, nem jár pontlevonás.)

   (1 pont) A kérdéses valószínűség: $\mathbb{P}(A \mid K)$.

   (1 pont) Az A, B, C események teljes eseményrendszert alkotnak,

   (2 pont) ezért alkalmazható rájuk a Bayes-tétel:

   $$\mathbb{P}(A \mid K) = \frac{\mathbb{P}(K \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(K \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(K \mid C)\,\mathbb{P}(C)}.$$

   Ha esetleg a tétel nincs nevesítve, akkor is hivatkozni kell rá, hogy ez a formula az előadás anyagának része. Az előadásra való hivatkozás nélkül a formulára nem jár pont. Ha valaki külön alkalmazza az egyerű Bayes-tételt, majd utána a teljes valószínűség tételét (mindkettőnél a tétel nevére vagy az előadásra hivatkozva), akkor is jár ez a két pont (egy-egy a két tétel alkalmazásáért). Hivatkozás nélkül ebben az esetben sem jár az adott pont. Kizárólag hibátlanul felírt formulá(k)ra adható pont.

(3 pont) A feladat szövege alapján

$$\mathbb{P}(K \mid A) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{6^5},$$
$$\mathbb{P}(K \mid B) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{3^5},$$
$$\mathbb{P}(K \mid C) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{4^5},$$

(1 pont) továbbá $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{3}$.

(1 pont) Tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(A \mid K) = \frac{\frac{1250}{6^5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1250}{6^5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{80}{3^5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{270}{4^5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2^5\cdot 1250}{2^5\cdot 1250 + 4^5\cdot 80 + 3^5\cdot 270}.$$

Ha a megoldó nem írja le általános alakban a formulát, csak a behelyettesített értéket, akkor a formuláért járó 2 pontot is megkapja, amennyiben *hivatkozik a tételre*, és a behelyettesített értékek *midegyikének* jelentése *pontosan* tisztázott, valamint a helyettesítés *hibátlan*.

(1 pont) A műveleteket elvégezve

$$\mathbb{P}(A \mid K) = \frac{40\,000}{40\,000+81\,920+65\,610} = \frac{40\,000}{187\,530} \approx 0{,}2133.$$

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két érték hiányzik. Határozzuk meg a hiányzó értékeket és az X ill. Y változók (perem)eloszlásait, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(XY > 0) = 7/10$.

Y \ X	0	1	2
1			1/10
2	1/5	2/15	2/5

Megoldás:

(0 pont) Legyen $x = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1)$ és $y = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$ a táblázat két hiányzó eleme.

(1 pont) Mivel Y csak pozitív értékeket vehet fel, így $XY > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $X > 0$, azaz ha $X = 1$ vagy $X = 2$,

(2 pont) így

$$\frac{7}{10} = \mathbb{P}(XY > 0) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=2)$$
$$= y + \frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = y + \frac{19}{30},$$

(1 pont) ebből pedig $y = \dfrac{7}{10} - \dfrac{19}{30} = \dfrac{1}{15}$.

(1 pont) A táblázatban szereplő valószínűségek összege 1, tehát

$$1 = x + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{5} = x + \frac{27}{30} = x + \frac{9}{10},$$

(1 pont) azaz $x = \dfrac{1}{10}$.

(2 pont) Az X peremeloszlása:

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.$$

(2 pont) Az Y peremeloszlása:

$$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15},\qquad \mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}.$$

3. Egyenletesen véletlenszerűen választunk egymástól függetlenül két számot, egyiket a $[-2;1]$, másikat a $[-1;2]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy a két szám szorzata pozitív?

Megoldás:

(2 pont) A két szám választása egy pont választásának felel meg az $\Omega=[-2;1]\times[-1;2]$ négyzeten, ez tehát az eseménytér.

(2 pont) Két a két szám szorzata pontosan akkor pozitív, ha mindkettő pozitív vagy mindkettő negatív,

(2 pont) ez pedig pontosan akkor teljesül, ha a választott pont az $R_1=(0;1]\times(0;2]$ vagy az $R_2=[-2;0)\times[-1;0)$ téglalapok valamelyikében van, tehát az $R_1\cup R_2$ esemény valószínűségét kell kiszámolnunk.

(2 pont) A geometriai valszóínűség képlete szereint $\mathbb{P}(R_1\cup R_2)=\dfrac{T(R_1\cup R_2)}{T(\Omega)}$

(2 pont) $=\dfrac{T(R_1)+T(R_2)}{T(\Omega)}=\dfrac{2+2}{9}=\dfrac{4}{9}.$

4. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(t)=\begin{cases}\alpha(t-t^3), & \text{ha } t\in(0;1)\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

ahol $\alpha\in\mathbb{R}$ egy valós szám. Határozzuk meg α értékét, továbbá az X eloszlásfüggvényét és várható értékét.

Megoldás:

(1 pont) Mivel f_X sűrűségfüggvény, így a valós egyenesen vett integrálja 1, azaz $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt$

(1 pont) $=\displaystyle\int_0^1 \alpha(t-t^3)\,dt=\alpha\int_0^1 (t-t^3)\,dt.$

(1 pont) A Newton–Leibniz-formula szerint ez $\alpha\left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^4}{4}\right]_0^1=\alpha\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\alpha}{4}$, ebből pedig $\alpha=4$.

(1 pont) A sűrűségfüggvény definíciója szerint az X eloszlásfüggvénye

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$$

(1 pont) Mivel az f_X függvény a $(0;1)$ intervallumon kívül 0, így a fenti integrál 0 minden $t\le 0$ esetén, illetve 1 minden $t>1$ esetén.

(2 pont) Ha $0<t\le 1$, akkor pedig

$$F_X(t)=\int_0^t 4(s-s^3)ds=4\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^4}{4}\right]_0^t=t^2\left(2-t^2\right).$$

(1 pont) Végül a vérható érték definíciója szerint

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_X(t)\,dt=\int_0^1 4t(t-t^3)\,dt$$

(2 pont)

$$=\int_0^1 4t^2-4t^4\,dt=\left[\frac{4t^3}{3}-\frac{4t^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

5. Az X normális eloszlású valószínűségi változóról tudjuk, hogy a sztenderdizáltja $2X-1$. Határozzuk meg az $Y = 4X+3$ változó eloszlását, és számoljuk ki a $\mathbb{P}(Y > 2)$ valószínűséget.

   Megoldás:

   (1 pont) A $Z = 2X-1$ változó sztenderd normális eloszlású,

   (1 pont) továbbá $X = \frac{Z+1}{2}$,

   (1 pont) és így $Y = 4X+3 = 2(Z+1)+3 = 2Z+5$.

   (1 pont) Az előadáson tanultak szerint egy normális eloszlású változó lineáris transzformáltja normális eloszlású, azaz Y normális eloszlású, így az eloszlás megadásához a paramétereket (a várható értéket és a szórásnégyzetet) kell meghatározni.

   (1 pont) A várható érték linearitása miatt $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2Z+5) = 2\,\mathbb{E}(Z)+5 = 2\cdot 0+5 = 5$,

   (1 pont) illetve a szórás tulajdonságai miatt $\mathbb{D}(Y) = \mathbb{D}(2Z+5) = \mathbb{D}(2Z) = 2\,\mathbb{D}(Z) = 2$ (vagyis $\mathbb{D}^2(Y) = 4$),

   (0 pont) tehát $Y \sim N(5;4)$.

   A paraméterek meghatározása helyett használható az előadáson tanult állítás is, amelyben konkrétan meghatároztuk, hogy adott paraméterű normális eloszlású változót transzformálva pontosan hogyan változik az eloszlás.

   (1 pont) A komplementer eseményre áttérve, az Y folytonosságát is használva $\mathbb{P}(Y > 2) = 1-\mathbb{P}(Y < 2)$

   (2 pont) Az eloszlásfüggvény definícióját ill. a Φ függvényre vonatkozó transzformációs formulát használva
$$1-\mathbb{P}(Y<2) = 1-F_Y(2) = 1-\Phi\left(\frac{2-5}{2}\right) = 1-\Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi(1{,}5),$$

   (1 pont) tehát a keresett valószínűség $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}9332$.

6. Egy normális eloszlású, ismeretlen szórású, 16 elemű minta alapján 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot számoltunk a háttéreloszlás várható értékére, és eredményül a $(-0{,}631; 3{,}631)$ intervallumot kaptuk. Határozzuk meg az ugyanezen mintához tartozó 99%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot is a várható értékre. (Elegendő három tizedesjegyre kerekített értékeket megadni.)

   Megoldás:

   (1 pont) Ha az intervallum sugara r, akkor $2r = 3{,}631-(-0{,}631) = 3{,}631+0{,}631 = 4{,}262$, azaz $r = 2{,}131$.

   (1 pont) Ugyanakkor, mivel a szignifikanciaszint $1-\varepsilon = 0{,}95$, azaz $\varepsilon = 0{,}05$,

   (2 pont) ez a sugár a tanult képlet szerint
$$r = \frac{t_{\varepsilon/2}(15)\cdot s^*}{\sqrt{16}} \approx \frac{2{,}131\cdot s^*}{4},$$
   ahol $t_{\varepsilon/2}(15)$ a 15 szabadságfokú Student-eloszlás kvantilise.

   (1 pont) Ezt átrendezve $s^* = 4$ adódik.

   (2 pont) A konfidenciaintervallum középpontja a mintaátlag, azaz $\overline{x} = \dfrac{3{,}631-0{,}631}{2} = 1{,}5$.

   (1 pont) Ha a szignifikanciaszint $1-\varepsilon = 0{,}99$ (azaz $\varepsilon = 0{,}01$),

   (1 pont) akkor a fenti képlet az intervallum r' sugarára a következőt adja:
$$r' = 2{,}947\cdot\frac{4}{\sqrt{16}} \approx 2{,}947.$$

   (1 pont) Tehát a 99%-os szignifikanciaszintű intervallum a várható értékre
$$(1{,}5-2{,}947; 1{,}5+2{,}947) = (-1{,}447; 4{,}447).$$