ANALÍZIS(2) I.ZÁRTHELYI **2007. márc. 22.**

Mérnök Informatikus szak β variáns Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (14 pont).

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{e^x}{e^x+4}\, y = 3x^2\,(e^x+4)$$

2) Feladat (12 pont). Adja meg az

$$y' = (y^2 - 4y)\ \ln x\ , \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

3) Feladat (12 pont).

a) Rajzolja fel az

$$y' = \sqrt[3]{y} + 2x\ ,$$

differenciálegyenletnek azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!

b) Az $y = y(x)$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(1, -8)$ ponton.

Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 1$ helyen?

c) Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pontbeli harmadik deriváltját ($y'''(1) = ?$) !

4) Feladat (07 pont).

a) Vezesse be az $u = \ln y$ új változót az alábbi kezdetiérték problémába:

$$\frac{y'}{y} + 7\ \ln y = 5\,e^x\,, \qquad y(0) = e^3$$

(Ne oldja meg a kapott egyenletet!)

b) Milyen típusú a kapott differenciálegyenlet (szeparábilis-e, illetve lineáris elsőrendű-e)?

5) Feladat (20 pont).

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

$$y'' + 4y' + 13y = -26x + 5$$

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = 0$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását:

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = -26x + 5$$

(Nem kell megkeresnie!)

ANALÍZIS(2) Mérnök Informatikus szak

I.ZÁRTHELYI β variáns

2007. márc. 22. Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (14 pont).
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{e^x}{e^x+4}\, y = 3\,x^2\,(e^x+4)$$

H: $y' - \frac{e^x}{e^x+4} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{e^x}{e^x+4} y$

$y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú, elég egy megoldást keresnünk.

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x+4} dx$ 3 $\Rightarrow \ln y = \ln(e^x+4) \Rightarrow y = e^{x+4}$ 3

f'/f

7 Tehát $\varphi(x) = e^x+4 \Rightarrow y_H = C(e^x+4)$ 1 $C \in \mathbb{R}$

(Vagy: $y' = \frac{e^x}{e^x+4} y$; $y \equiv 0$ megoldás

$y \neq 0$: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x+4} dx$

$\ln|y| = \ln(e^x+4) + C_1$

$|y| = e^{C_1} e^{\ln(e^x+4)}$

$\left. \begin{array}{l} y = \pm e^{C_1}(e^x+4) \\ \text{ill. } y \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_H = C(e^x+4)$; $C \in \mathbb{R}$)

(I): $y_{ip} = c(x)(e^x+4)$ 1

$y_{ip}' = c'(e^x+4) + c\, e^x$

Behelyettesítve:

$c'(e^x+4) + \cancel{c e^x} - \cancel{\frac{e^x}{e^x+4} c (e^x+4)} = 3x^2(e^x+4)$ 2

$c' = 3x^2$ 1 $\Rightarrow c = x^3$ 1 $\Rightarrow y_{ip} = x^3(e^x+4)$ 1

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C(e^x+4) + x^3(e^x+4)$, $C \in \mathbb{R}$ 1

an2 z10703221/1.

2) Feladat (12 pont). Adja meg az

$$y' = (y^2 - 4y)\ \ln x \ , \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$y' = y(y-4) \cdot \ln x$

$y \equiv 0$ ill. $y \equiv 4$ megoldás (2)

Ha $y \neq 0$ és $y \neq 4$:

$\int \frac{1}{y(y-4)}\, dy = \int \ln x \, dx$ (3)

$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4} \Rightarrow 1 = A(y-4) + By$

$y = 0$: $1 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

$y = 4$: $1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-4} \right) dy = \frac{1}{4} \left(-\ln|y| + \ln|y-4| \right)$ (4)

$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x$ (2)

$u' = 1 \quad v = \ln x$

$u = x \quad v' = \frac{1}{x}$

A d.e. megoldása :

$\frac{1}{4} \left(-\ln|y| + \ln|y-4| \right) = x \ln x - x + C$, (1) $C \in \mathbb{R}$

ill. $y \equiv 0$, ill. $y \equiv 4$ $(x > 0)$

3) Feladat (12 pont).

a) Rajzolja fel az

$$y' \ = \ \sqrt[3]{y} \ + \ 2x \ ,$$

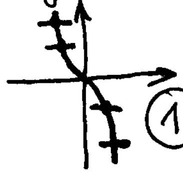
differenciálegyenletnek azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!

b) Az $y = y(x)$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(1, -8)$ ponton.

Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 1$ helyen?

c) Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pontbeli harmadik deriváltját ($y'''(1) = ?$) !

a.) $y' = \sqrt[3]{y} + 2x = 0$ (1) $\Rightarrow y = -8x^3$ (1)



(1)

an2 z1070322/2.

b.) $y(1) = -8$; $y'(1) = \sqrt[3]{-8} + 2\cdot 1 = 0$ (1)

$y'' = \frac{1}{3} y^{-2/3} \underbrace{y'}_{=0} + 2$ (2), $y''(1) = 2$ (1)

$y'(1) = 0$ és $y''(1) > 0$: $x = 1$-ben nincs lok. maximum (lok. minimum van) (2)

c.) $y''' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) y^{-5/3} y' \cdot y' + \frac{1}{3} y^{-2/3} y''$ (2)

$y'''(1) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot 2 = \frac{1}{6}$ (1)

4) Feladat (07 pont).
a) Vezesse be az $u = \ln y$ új változót az alábbi kezdetiérték problémába:

$$\frac{y'}{y} + 7 \ln y = 5\, e^{x}, \qquad y(0) = e^3$$

(Ne oldja meg a kapott egyenletet!)
b) Milyen típusú a kapott differenciálegyenlet (szeparábilis-e, illetve lineáris elsőrendű-e)?

a.) $u = \ln y \Rightarrow u' = \frac{1}{y} y'$ (2)

Behelyettesítve:

$u' + 7u = 5e^x$ (3) $u(0) = \ln y(0) = \ln e^3 = 3$ (1)

b) Lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk. (1)
Nem szeparábilis.

5) Feladat (20 pont).
a) Írja fel az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

$$y'' + 4y' + 13y = -26x + 5$$

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = 0$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenlet egyik megoldását:

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = -26x + 5$$

(Nem kell megkeresnie!)

$\boxed{12} + \boxed{5}$

a.) $y'' + 4y' + 13y = -26x + 5$

(H): $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ (1) $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{36}}{2} = -2 \pm j3$ (1)

$y_H = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (4)

an2 z1070322/3.

$13\cdot$ | $y_{ip} = Ax + B$ 1

$4\cdot$ | $y'_{ip} = A$

| $y''_{ip} = 0$

$x\,(13A) + (13B + 4A) = -26x + 5$

$13A = -26 \Rightarrow A = -2$ és $13B + 4A = 5 \Rightarrow B = 1$

$y_{ip} = -2x + 1$ 3

$y_{iá} = C_1 e^{-2x}\cos 3x + C_2 e^{-2x}\sin 3x - 2x + 1$; 2 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y^{(3)} = 0 \Rightarrow \lambda^5 + 4\lambda^4 + 13\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$ 1

$\lambda_{1,2,3} = 0 \qquad \lambda_{4,5} = -2 \pm j3$ 1

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x}\cos 3x + C_5 e^{-2x}\sin 3x$ 3 $C_i \in \mathbb{R}$

b.) $f(x) = -26x + 5$

$\boxed{3}$ $\Rightarrow y_{ip} = (Ax + B)x^3$ 3 (külső rezonancia)

6) Feladat (10 pont).

$$f(n) = -\frac{2}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel a rekurzió $f(0) = 10,\ f(1) = 2$ megoldását!

a.) $f(n) = q^n$ 1 alakban keressük $(q \neq 0)$

$q^n = -\frac{2}{3}q^{n-1} + \frac{1}{3}q^{n-2} \underset{q\neq 0}{\Longrightarrow} q^2 = -\frac{2}{3}q + \frac{1}{3}$ 2

$\Rightarrow q^2 + \frac{2}{3}q - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{3}\ ,\ q_2 = -1$ 1

$f(n) = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2(-1)^n$ 2 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b.) $f(0) = 10 \ :\ 10 = C_1 + C_2$ 2 $\Rightarrow C_1 = 9$

$f(1) = 2 \ :\ 2 = \frac{1}{3}C_1 - C_2$ $\qquad C_2 = 1$

A keresett megoldás: $f(n) = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n$ 2

an2 z1070322l4.

7) Feladat (09 pont).
a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!
b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{4n}\right)^{n^2+n}$$

a.) $\boxed{2}$ $a_n > 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

$c < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens

$c > 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens

b.) $\boxed{7}$ $0 < \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{4n}\right)^{n+1} \underset{2}{\le} \left(\frac{n+2n}{4n}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \to 0$

$0 \to 0$

$\xrightarrow[\text{rendőrelv}]{} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv. 1

3 1

Vagy: $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{4n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{n}{4n}\right)^n}_{\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0} \underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\to e^2} \underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{\to 1} \to 0$

8) Feladat (07 pont).
Határozza meg az alábbi hatványsor konvergencia sugarát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!}}_{a_n} x^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!\ \cancel{(n+1)!}\ n!}{(n+2)!\ \cancel{(n+1)!}\ (2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)\ (n+1)} =$$

1 1 2

$$= \frac{2\ \left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}} \longrightarrow 4 = \alpha \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

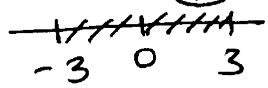
1 1 1

an2 z1070322/5.

9) Feladat (09 pont).
Határozza meg az alábbi hatványsor konvergencia tartományát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n\,(-3)^n}}_{a_n} x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ \text{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 3} \ \text{1} = \frac{1}{3} \ \text{1} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3 \ \text{1}$$



$x = 3$: $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz sor) 2

$x = -3$: $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div. (harm. sor) 2

K. T. : $(-3, 3]$ 1