ANALÍZIS(2) | **II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása** | **2012. máj. 3.**
Mérnök Informatikus szak | | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg a következő hatványsorok konvergencia-sugarát!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\,(n+1)}$.

a.) $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} =$

$\displaystyle = \frac{n}{n}\,\frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} \longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{R_a} \Rightarrow R_a = 4$ 6

b.) $u := x^2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}\, u^n = \sum b_n u^n$

$\displaystyle\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{2^n\,(n+1)}{2^{n+1}\,(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{2}{n})} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{R}$

$|u| < 2$-ben konvergens (végpontok most nem érdekesek)

$\Rightarrow |x^2| = |x|^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} = R_b$ 6

2. feladat (13 pont)

Az

$$f(x) = \sqrt{x}$$

függvény $x_0 = 9$ bázispontú másodrendű Taylor-polinomját alkalmazva adjon becslést a $\sqrt{10}$ értékére! Adjon becslést az elkövetett hibára!

$f(x) = \sqrt{x}$ $f(9) = 3$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(9) = \frac{1}{6}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{x})^3}$ $f''(9) = -\frac{1}{4\cdot 27} = -\frac{1}{108}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{(\sqrt{x})^5}$

$\displaystyle f(x) \approx T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(9)}{k!}(x-9)^k = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{108}\,\frac{1}{2!}\,(x-9)^2$ 6

$\sqrt{10} \approx T_2(10) = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216}$ 1

an2z2p120503/1.

$$f(x) - T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-9)^3$$

$$H = f(10) - T_2(10) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(10-9)^3 = \frac{1}{3!}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{(\sqrt{\xi})^5} \qquad \xi \in (9, 10) \quad 4$$

$$0 < H < \frac{1}{3!}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{(\sqrt{9})^5} = \frac{1}{3!}\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{3^5} \quad 2$$

3. feladat (12 pont)

Adja meg a következő függvények x_0 bázispontú Taylor-sorát, és ezek konvergencia-tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{5-4x}$, $\quad x_0 = 1$; $\qquad$ b) $g(x) = \cos(2x+\pi)$, $\quad x_0 = 0$.

a.) $\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{1}{5-4(x-1)-4} = \dfrac{1}{1-4(x-1)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(4(x-1)\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x-1)^n \quad 4$$

$$|q| = |4(x-1)| = 4|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{4}$$

$$K.T.: \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \quad 2$$

b.) $\boxed{6}$ $g(x) = -\cos 2x = -\left(1 - \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^4}{4!} - \dots\right)\Big|_{u=2x} =$ $\quad 1$

$$= -1 + \frac{2^2x^2}{2!} - \frac{2^4x^4}{4!} + \frac{2^6x^6}{6!} - \dots \quad 4$$

$$K.T.: (-\infty, \infty) \quad 1$$

4. feladat (11 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{(1-4x^2)^3}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia-sugarát!

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

$$f^{(6)}(0) = ?, \qquad f^{(7)}(0) = ?$$

$$f(x) = \left(1 + (-4x^2)\right)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-4)^n x^{2n} =$$

$$4$$

$$= 1 + (-3)(-4)x^2 + \frac{(-3)(-4)}{1\cdot 2}4^2x^4 + \underbrace{\frac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}}_{10\cdot 4^3}(-4^3)x^6 + \dots \quad 4$$

an2z2p120503/2.

$f^{(6)}(0) = 6!\, a_6 = 6!\; 10 \cdot 4^3$ (2)

$f^{(7)}(0) = 7!\, \underbrace{a_7}_{x^7 \text{ együtthatója} = 0} = 0$ (1)

5. feladat (15 pont) Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!
Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!

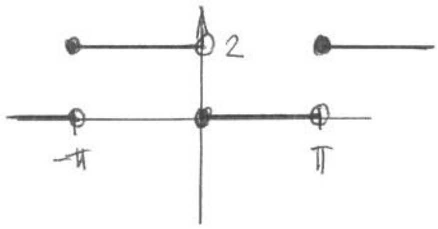
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \\ 0, & \text{ha } x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Legyen a sor összegfüggvénye ϕ!

$$\phi(0) = ?, \qquad \phi(1) = ?$$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 2\,dx =$

$= \frac{1}{\pi}\,(2 - (-\pi)) = 2\,; \quad \frac{a_0}{2} = 1$ (2)



$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\, \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{0} = 0$ (3)

(Nem meglepő, mivel $f(x) - 1$ „majdnem páratlan" fv., ...)

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 2 \cdot \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\, \frac{-\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{0} =$

$= -\frac{2}{\pi k}\,\big(1 - \underbrace{\cos(k(-\pi))}_{(-1)^k}\big) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ -\frac{4}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$ (4)

$\phi(x) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \ldots\right)$ (3)

$\phi(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ (2)

$\phi(1) = 0$ $(= f(1)$, mert f itt folytonos$)$

6. feladat (17 pont) Legyen

$$f(x,y) = \frac{(\sin x)\ (\cos y)}{x\ e^y} \qquad \text{és} \qquad P_0 = (\pi, 0)!$$

a) $f'_x(x,y) = ?$ $\quad f'_y(x,y) = ?$

b) Hol létezik gradiens? (Indoklás!) $\quad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

c) Adja meg $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel (1,2)$!

d) $\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x} \frac{\cos y}{e^y}$$

a.) Ha $x \neq 0$:

$\boxed{6}$

$$f'_x = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} \frac{\cos y}{e^y}$$

$$f'_y = \frac{\sin x}{x} \frac{-\sin y \cdot e^y - \cos y \cdot e^y}{e^{2y}}$$

b.) Ha $x \neq 0$, f'_x és f'_y létezik és folytonos, ezért grad f $\exists$. 2

$\boxed{4}$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = -\frac{1}{\pi}\underline{i} + 0\underline{j} \quad 2$$

c.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ 2

$\boxed{5}$

$$\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}\ ; \ |\underline{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\ ; \ \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{j} \quad 1$$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(-\frac{1}{\pi}\underline{i}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{j}\right) = -\frac{1}{\pi\sqrt{5}} \quad 2$$

d.) $\min \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = -|\operatorname{grad} f(P_0)| = -\frac{1}{\pi}$ 2

$\boxed{2}$

an2z2p120503/4.

7. feladat (20 pont) Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 - x^4}{x^4 + y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e határértéke f-nek az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?$, ha $(x,y) \neq (0,0)$.

c) $f'_x(0,0) = ?$, $\quad f'_y(0,0) = ?$

d) Totálisan differenciálható-e f az origóban?

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{x\, m^3 x^3 - x^4}{x^4 + m^4 x^4}}_{\underbrace{\frac{x^4}{x^4}}_{=1} \frac{m^3-1}{1+m^4}} = \dfrac{m^3-1}{1+m^4}$

függ m-től $\Rightarrow \nexists$ a határérték.

b.) $\boxed{3}$ Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x = \frac{(y^3 - 4x^3)(x^4+y^4) - (xy^3 - x^4)\cdot 4x^3}{(x^4+y^4)^2}$$

c.) $\boxed{10}$ $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$ (2)

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{-\frac{h^4}{h^4} - (-1)}{h}}_{= \frac{0}{h} \equiv 0} = 0 \quad (3)$$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$ (2) $= \lim\limits_{k\to 0} \underbrace{\dfrac{0-(-1)}{k}}_{=\frac{1}{k}} = \nexists$ $(\pm\infty)$ (3)

d.) $\boxed{2}$ $f'_y(0,0) \nexists \Rightarrow f$ nem deriválható az origóban.

8. feladat (12 pont)

Határozza meg az

$$\int_0^1 \sin(x^3)\, dx$$

integrál közelítő értékét az integrálandó függvényt a tizedrendű Taylor-polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

an2z2p120503/5.

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \quad ; \ u \in \mathbb{R} \qquad 2$$

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots \quad ; \ x \in \mathbb{R} \qquad 2$$

$$\int_0^1 \sin x^3 \, dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots \right) dx =$$

$$\xrightarrow{T_{10}}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3!} \frac{x^{10}}{10} + \frac{1}{5!} \frac{x^{16}}{16} - \dots \Big|_0^1 = \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{10}}_{:=a} + \underbrace{\frac{1}{5!} \frac{1}{16}}_{:=b} - \dots$$

$$\int_0^1 \sin x^3 \, dx \approx a \quad 4 \quad ; \ \text{Leibniz sor, ezért} \quad 1 \quad |H| \le |b| = \frac{1}{5!} \frac{1}{16} \quad 3$$

9. feladat (8 pont)

Írja fel az

$$f(x, y) = \sin(xy) + (x^3 - 1)(y + 1)$$

függvény grafikonját az $(1, 0)$ pontban érintő sík egyenletét!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= y \cos(xy) + 3x^2 (y+1) \\ f'_y &= x \cos(xy) + (x^3 - 1) \end{aligned}\right\} \quad 4$$

Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) - (z - f(P_0)) = 0 \qquad 2$$

$$f'_x(1,0) = 3 \ ; \quad f'_y(1,0) = 1 \ ; \quad f(1,0) = 0$$

$$3(x - 1) + 1\,(y - 0) - (z - 0) = 0 \qquad 2$$

an2z2p1205031 6.