ANALIZIS(2) II.ZÁRTHELYI α variáns 2007, ápr. 19.

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (12 pont).

Írja fel az

$$f(x) = e^{3x+2}$$

függvény origó körüli valamint az $x_0 = 2$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

2) Feladat (10 pont).

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{3+x}, \qquad g(x) = \frac{1}{(3+x)^2}$$

függvények origó körüli Taylor sorait, azok konvergencia sugarait!

3) Feladat (14 pont). Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{1+2x^{10}}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergencia sugarát!

b) $f^{(30)}(0) = ?$

c) Az $f(x)$ értékét az $x = 0,1$ pontban a 20-ad rendű Taylor polinom segitségével számoljuk ki. Becsülje meg az így elkövetett hibát!

4) Feladat (14 pont).

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+2)x^k$$

konvergencia sugarát és összegfüggvényét!

5) Feladat (12 pont).

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^8+y^8}}{x^4+y^4}$$

a)

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = ? \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = ?$$

b) Vizsgálja meg a függvény origóbeli határértékét az $y = mx$ egyenesek mentén!

c) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?
Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

6) Feladat (18 pont).

Legyen

$$f(x,y) = \ln(3x^2y^4 + 1) \qquad P = P(1,-1)$$

a) Indokolja meg, hogy létezik a P-hez tartozó érintősík és írja fel az egyenletét!

b) Számolja ki az f függvénynek a $P(1,-1)$ pontbeli, $\underline{v} = (3,-2)$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Mennyi az f függvény $P(1,-1)$ pontbeli a legnagyobb iránymenti deriváltja?

7) Feladat (12 pont).

a) Írja le az f kétváltozós függvény (a,b) pontbeli parciális deriváltjainak a definícióit!

b) A definíció alapján döntse el, hogy léteznek-e az f függvény $P(0,0)$ pontbeli parciális deriváltjai, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^8+5y^{12}}}{x^4+y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8) Feladat (08 pont).

Legyen g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény! Írjuk a g változója helyére az $e^{2x^2+5y^2}$ kifejezést !
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $u(x,y) = g(e^{2x^2+5y^2})$!

$$u'_x = ? \qquad u'_y = ?$$

$$u''_{xx} = ? \qquad u''_{yy} = ? \qquad u''_{xy} = ? \qquad u''_{yx} = ?$$

ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI β variáns

2007. ápr. 19.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, x^{k-1}$$

függvénysor összegfüggvényét és a sor konvergenciasugarát!

2. feladat (12 pont)

Írja fel az

$$f(x) = e^{2x+3}$$

x_0 bázispontú Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

a) $x_0 = 0$ *b)* $x_0 = 3$

3. feladat (10 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{2+x}, \qquad g(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$$

függvények origó körüli Taylor sorait, azok konvergenciasugarait!

4. feladat (14 pont)

Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x^6}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergenciasugarát!

b) $f^{(18)}(0) = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

c) Az $f(x)$ értékét az $x = 0,1$ pontban a 12-drendű Taylor polinomja segítségével számoljuk ki.
Becsülje meg az így elkövetett hibát!

5. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^{12}+y^{12}}}{x^6+y^6}$$

a) Határozza meg a függvény origóbeli iterált határértékeit (ismételt határértékeit)!
$\left(\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = ?\,, \quad \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = ? \right)$

b) Vizsgálja meg a függvény origóbeli határértékét az $y = mx$ egyenesek mentén!

c) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?
Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

6. feladat (12 pont)

a) Írja le az f kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli parciális deriváltjainak a definícióit!

b) A definíció alapján döntse el, hogy léteznek-e az f függvény $P_0(0,0)$ pontbeli parciális deriváltjai, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^{12} + 7y^8}}{x^4 + y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. feladat (18 pont)

Legyen

$$f(x,y) = \ln(3x^4y^2 + 1)\,, \qquad P_0(-1,1)$$

a) Indokolja meg, hogy létezik a P_0-hoz tartozó érintősík és írja fel az egyenletét!

b) Számolja ki az f függvénynek a $P_0(-1,1)$ pontbeli, $\underline{v} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Határozza meg az f függvény $P_0(-1,1)$ pontbeli maximális iránymenti deriváltjának értékét!

8. feladat (8 pont)

A $g \in C^2_{\mathbb{R}}$ egyváltozós függvény változója helyébe írjuk az $e^{3x^2+4y^2}$ kifejezést!
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(x,y) = g(e^{3x^2+4y^2})$!

$$f'_x = ? \qquad f'_y = ?$$

$$f''_{xx} = ? \qquad f''_{yy} = ? \qquad \cancel{f''_{xy}} = ? \qquad \cancel{f''_{yx}} = ?$$