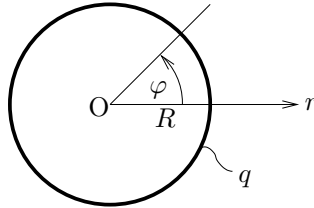


**I. példa.**

Az ábra szerint a hengerkoordináta-rendszer  $z = 0$  síkjában körgyűrű alakú vonaltöltés van, amelynek középpontja az origó, sugara  $R = 25$  cm, és töltéssűrűsége állandó  $q = -6$  nC/m értékű. A közeg levegő. A  $\phi$  skalárpotenciált a végtelenben 0-nak választjuk.



- a) Határozza meg a potenciált és a térerősség nagyságát az origóban! (3 pont)

$$\phi = \int_0^{2\pi} \frac{qRd\varphi}{4\pi\epsilon_0 R} = 2\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0} = -339 \text{ V} \quad (2 \text{ p}) \quad \text{Szimmetria miatt } E = 0 \quad (1 \text{ p})$$

- b) Adja meg a térerősség vektorát az elrendezés tengelyében, az  $r = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $z = 0,4$  m koordinátájú pontban! (4 pont)

Szimmetria miatt csak  $z$  irányú komponens van, (1 p)  
 $l = \sqrt{R^2 + z^2}$  és  $\cos \alpha = z/l$  jelöléssel  
 $E_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{qRd\varphi}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cos \alpha = \frac{qR \cos \alpha}{2\epsilon_0 l^2} = \frac{qR}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = -323 \text{ V/m} \quad (3 \text{ p})$   
 (bővebben l. Bilicz példatár 2.6. példa)

- c) Becsülje meg a potenciált és a térerősség nagyságát az  $r = 10$  m,  $\varphi = \pi/6$ ,  $z = 8$  m koordinátájú pontban! (3 pont)

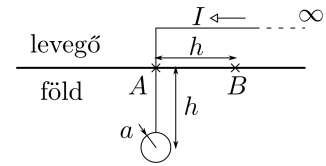
$Q = 2R\pi q = -9,42$  nC pontszerű töltéssel közelítve: (1 p)  
 $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = -6,62 \text{ V} \quad (1 \text{ p}) \quad E = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \right| = 0,517 \text{ V/m} \quad (1 \text{ p})$

- d) (nem kötelező IMSc feladat) A  $z$  tengely mely pontjában maximális az elektromos térerősség, és mekkora ott az értéke? (5 IMSc pont)

A b) feladatrészt megoldásából kiindulva,  
 $E'_z(z) = 0$ , ha  $z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} = \pm 17,7$  cm (3 p)  $\rightarrow E_{\max} = \left| \frac{q}{3\sqrt{3}\epsilon_0 R} \right| = 522 \text{ V/m} \quad (2 \text{ p})$

**II. példa.**

Egy  $a = 10$  cm sugarú gömb alakú elektróda középpontja  $h = 2,5$  m mélyen a földfelszín alatt helyezkedik el. A levegő-föld határfelület síknak tekinthető; a föld fajlagos vezetőképessége  $\sigma = 30$  mS/m. Az elektródába  $I = 150$  A egyenáramot vezetünk a végtelenből; a végtelen távoli pont potenciálja  $\phi(\infty) = 0$ .



- a) Határozza meg a potenciált az A pontban, azaz a határsíknak a gömbhöz legközelebb eső pontjában! (3 pont)

Tükrözés helyes alkalmazása (1 p)  $\rightarrow \phi_A = \frac{2I}{4\pi\sigma h} = 318 \text{ V} \quad (2 \text{ p})$

- b) Határozza meg az elektróda potenciálját! (2 pont)

$\phi_{\text{gömb}} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{2h} \right) = 4058 \text{ V} \quad (2 \text{ p})$

- c) Határozza meg a földelési ellenállást! (2 pont)

$R = \frac{\phi_{\text{gömb}}}{I} = 27,1 \Omega \quad (2 \text{ p})$

- d) Mekkora a feszültség az A és B pontok között? (3 pont)

$U_{AB} = \frac{2I}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{2}h} \right) = 93,2 \text{ V} \quad (3 \text{ p})$

- e) (nem kötelező IMSc feladat) Az A ponttól mekkora távolságra van a föld felszínén az a hely, ahol az ún. lépésfeszültség maximális? Mekkora ennek értéke, ha egy lépés hossza  $l = 70$  cm? (5 IMSc pont)

A Bilicz példatár 3.6 példája alapján a keresett távolság  $h/\sqrt{2} = 177$  cm, ahol a lépésfeszültség  $U_l = \frac{lI}{3\sqrt{3}\pi\sigma h^2} = 34,3 \text{ V} \quad (5 \text{ p})$

## Kis példák

1. Dielektrikum adott pontjában az elektromos térerősség  $\mathbf{E}$ , az eltolásvektor  $\mathbf{D}$ . Fejezze ki a dielektromos polarizáció vektorát! (2 pont)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2 \text{ p})$$

2. Húzza alá azt az összefüggést, amely *nem* teljesül stacionárius áramlási térben, ha a közeg inhomogén vezetőképességű! (2 pont)

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad \left| \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \left| \quad \underline{\text{div } \mathbf{E} = 0} \quad \left| \quad \oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (2 \text{ p}) \right. \right.$$

3. Egy síkkondenzátor korong alakú lemezeinek sugara  $R$ , távolságuk  $d$ , a szigetelőanyag dielektromos állandója  $\varepsilon_r$ . A lemezek között homogén  $E$  térerősség van. Fejezze ki ezekkel a kondenzátor energiáját! (2 pont)

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \cdot d r^2 \pi \quad (2 \text{ p})$$

4. Elektrosztatikus térben a skalárpotenciál kifejezése egy koherens egységrendszerben  $\phi(x, y, z) = \phi(z) = 2 \sin(\pi z)$ . Fejezze ki az elektromos térerősség vektorát mint a hely függvényét. (2 pont)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (1 \text{ p})$$
$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\hat{\mathbf{e}}_z 2\pi \cos(\pi z) \quad (1 \text{ p})$$

5. Egy  $R$  sugarú gömbön belül a töltéssűrűség kezdetben konstans  $\rho_0$  értékű. A töltéssűrűség  $\Delta t$  idő alatt egyenletesen zérusra csökken. Határozza meg eközben a gömb felszínén a normális irányú térfogati áramsűrűség nagyságát, feltéve hogy ez a felszín minden pontjában azonos! (2 pont)

$$J = \frac{\rho_0 R}{3\Delta t} \quad (2 \text{ p})$$