INFO AN1. VD4 MEGOLDÁS | −1− | α | 2017.01.18.

1, i, $\boxed{10}$

$$\int \frac{x^2+x-5}{x^2+x-6}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int dx + \int\left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\right)dx =$$ ② ③

$A(x-2)+B(x+3)=1$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A+3B=1 \end{array}\right\}$ $A=-\frac{1}{5}$, $B=+\frac{1}{5}$ ③

$$= x - \frac{1}{5}\ln|x+3| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + C$$ ②

ii, $\boxed{10}$

$$\int e^{-2\sqrt{x}}\,dx = \int \underbrace{e^{-2u}}_{f'}\cdot \underbrace{2u}_{g}\,du = -\frac{1}{2}e^{-2u}\cdot 2u - \int\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2u}\cdot 2\,du =$$ ③ ③

$u=\sqrt{x}$

$x=u^2$; $dx = 2u\,du$

$$= -u e^{-2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} + C =$$ ②

$$= -\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{-2\sqrt{x}} + C$$ ②

— o —

2, $\boxed{15}$ Mivel $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16e^{4x}+e^{-8x}}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ esetén,

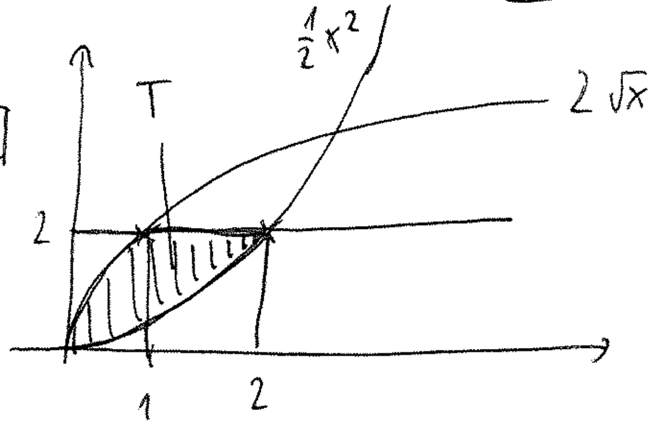
ezért $\displaystyle\int_{-4}^{6} f(x)\,dx > 0$. ③

$$\int_{-4}^{6} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{6} f(x)\,dx \le \int_{-4}^{0}\frac{1}{\sqrt[4]{0+e^{-8x}}}\,dx + \int_{0}^{6}\frac{dx}{\sqrt[4]{16e^{4x}+0}} =$$ ② ④

$$= \int_{-4}^{0} e^{2x}\,dx + \int_{0}^{6}\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-4}^{0} + \frac{-1}{2}\left[e^{-x}\right]_{0}^{6} =$$ ② ②

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-8}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-6}-1\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-8} - \frac{1}{2}e^{-6} < 1$$ ②

3/ 15



$$T=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^2 2\,dx-\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx= \quad 8$$

$$=\left[2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + 2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \quad 2 \quad 1 \quad 2$$

$$=\frac{4}{3}+2-\frac{4}{3}=\underline{\underline{2}} \quad 2$$

Az integrál helyes felírása: 8 pont
Ebből a helyes rajz (ha van): 4 pont.

— o —

4/ 15

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad 3$$

f folytonos x-ben $\not\Longrightarrow$ f diff.-ható x-ben 3
(Pl. $x\mapsto |x|$ folytonos, de nem diff.-ható 0-ban.)

T.: f diff.-ható x-ben $\Longrightarrow$ f folytonos x-ben 3

B.:
$$f(x+h)=f(x)+h\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \Big/ \lim_{h\to 0}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)+\underbrace{\left(\lim_{h\to 0} h\right)}_{0}\cdot\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}_{f'(x)}=f(x)+0 \quad 6$$

— o —

6/ 10

D.: t az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontja, ha t tetszőleges környezetébe esik a sorozatnak végtelen sok eleme. 6

T.: t az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat torlódási pontja
$\Longleftrightarrow \exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, melyre $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=t$. 6

($t\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ a definícióban és a tételben is.)

5, $\boxed{25}$ $\quad f(x)=\operatorname{arctg}(x)+\frac{x^3}{15}-x$

$\boxed{13}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{5}x^2-1 \overset{③}{=} \frac{5+x^2(1+x^2)-5-5x^2}{5(1+x^2)}=\frac{x^4-4x^2}{5(1+x^2)}=$$

$$=\underbrace{\frac{x^2}{5(1+x^2)}}_{\geq 0}(x+2)(x-2)=0 \iff x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$$ ④ (zérushelyek)

x	$x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$
f'	+	0	–	0	–	0	+
f	↗	lok. max	↘		↘	lok. min	↗

⑥ (monotonitás, lok. szél. hely)

vízszintes infl. pont.

$\boxed{12}$

$$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{5}x \overset{③}{=} 2x\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)=0 \iff$$

$$\iff x_1=0 \text{ vagy } \frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{5};\ 1+x^2=\sqrt{5};\ x_{2,3}=\pm\sqrt{\sqrt{5}-1}=\pm\alpha$$

$\alpha:=\sqrt{\sqrt{5}-1}$ ④ zérushelyek

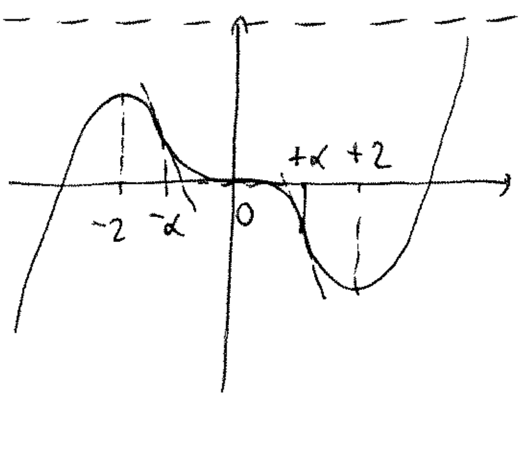
Látható, hogy $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)<0 \iff x\in(-\alpha,+\alpha)$

x	$x<-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha<x<0$	0	$0<x<\alpha$	α	$\alpha<x$
f''	–	0	+	0	–	0	+
f	∩		∪		∩		∪

⑤ (konvexitás, infl. pont.)

inflexiós pontok

(A függvény grafikonját nem kell ábrázolni!)



IMSC

$\boxed{16}$ $y=-x$ helyettesítéssel kapjuk:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{e^{x}+1}\,dx=\int_{+\pi}^{-\pi}\frac{\cos y}{e^{-y}+1}\,(-dy)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos y}{e^{-y}+1}\,dy \qquad 8p.$$

Tehát

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos x}{e^{x}+1}+\frac{\cos x}{e^{-x}+1}\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\,(e^{-x}+1+e^{x}+1)}{(e^{x}+1)(e^{-x}+1)}\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\cdot(2+\cancel{e^{-x}+e^{x}})}{(1+\cancel{e^{x}+e^{-x}}+1)}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}=0 \qquad 8p.$$

Tehát $I=0$.

A fenti számolásból az is látható, hogy tetszőleges $a>0$ esetén

$$I(a)=\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{e^{x}+1}\,dx=\left[\sin x\right]_{-a}^{a}=2\sin a$$

—3—1 $\boxed{\beta}$

1, i, $\boxed{10}$

$$\int \frac{x^2-x-7}{x^2-x-6}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{(x-3)(x+2)}\right)dx \;②= x+\int\frac{A}{x-3}\,dx+\int\frac{B}{x+2}\,dx \;③=$$

$$= x-\frac{1}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{5}\ln|x+2|+C \;②$$

③

ii, $\boxed{10}$

$$\int e^{\sqrt{2x}}\,dx = \int e^u\cdot u\,du \;③= e^u\cdot u-\int e^u\,du \;③= e^u(u-1)+C \;②$$

$u=\sqrt{2x}$; $x=\frac{1}{2}u^2$; $dx = u\,du$

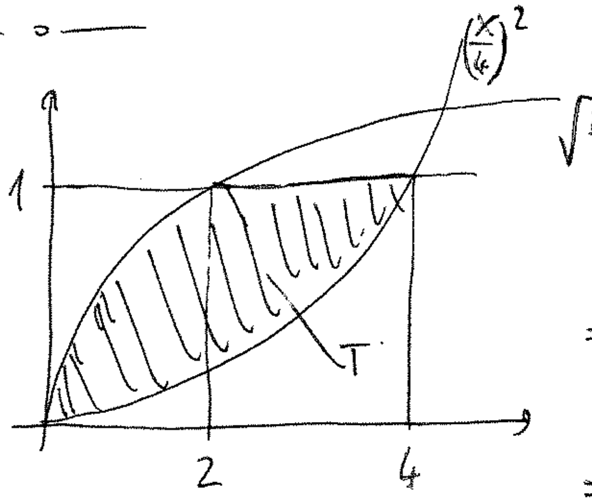
$$= e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)+C \;②$$

2, $\boxed{15}$ $I>0$ ③;

$$I=\int_{-5}^{0}+\int_{0}^{5} \;② \le \int_{-5}^{0}\frac{1}{\sqrt[4]{e^{-8x}+0}}\,dx+\int_{0}^{5}\frac{1}{\sqrt[4]{0+16e^{4x}}}\,dx \;④= \int_{-5}^{0}e^{+2x}\,dx+\int_{0}^{5}\frac{e^{-x}}{2}\,dx \;②=$$

$$=\frac{+1}{2}\left[e^{+2x}\right]_{-5}^{0}-\frac{1}{2}\left[e^{-x}\right]_{0}^{5} \;②= \frac{+1}{2}\left(1-e^{-10}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{-5}-1\right)<1 \;②$$

3, $\boxed{15}$



$$T=\int_{0}^{2}\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx+\int_{2}^{4}1\,dx-\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2dx \;⑧=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{2} \;② +2 \;① -\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{4} \;②=$$

$$=\cancel{\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}}+2-\cancel{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4^3}=\underline{\underline{2}} \;②$$

(Az α változat felére zsugorítva y irányban, és kétszeres nyújtás x irányban)

4, és 6, : Lásd α változat

5, $f_\beta(x)=(-15)\,f_\alpha(x)$, A β változatban az f az α változatban szereplő (−15)-szöröse, tehát a deriváltak (−15)-tel szorzódnak, a zérushelyek maradnak, a monotonitás, konvexitás megfordul.

IMSC – lásd α.