1. PÓTLÓ/JAVÍTÓ ZÁRTHELYI DOLGOZAT

MATEMATIKA A2 — 2022. áprils 4.
VILLAMOSMÉRNÖK HALLGATÓKNAK — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név: **Gyakvez.:**

Neptun kód: **Gyak. kurzuskód:**

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$	1_I	2_I	$\sum_I$

1. **(20 pont)**
Tudjuk, hogy a V vektortérben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Mit mondhatunk az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}$ vektorrendszer függetlenségéről?

2. **(20 pont)**
Tekintsük a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorokat:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^3$ hány dimenziós alterét feszítik ki ezen vektorok? Adjon meg egy bázist ebben az altérben és adja meg a fenti vektorok koordinátáit a megadott bázisban!

3. **(20 pont)**
Adja meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásait a λ valós paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

4. **(20 pont)**
Tekintsük az alábbi mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Számolja ki az inverzét, amennyiben létezik! Adja meg $\mathbf{A}^{100}$ determinánsát!

5. **(20 pont)**
Írja fel az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, mely az $\mathbb{R}^3$ tér minden helyvektorát merőlegesen levetíti az $2x + y + z = 0$ egyenletű síkra. Adja meg a $\mathbf{v} = 6\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{k}$ vektor levetített képét! Mi lesz a leképezés képtere, illetve magtere?

IMSc példák

1. **(iMSC, 15 pont)**
Számolja ki az alábbi determináns értékét, ahol p, q, r, s valós számok!

$$\begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix}$$

2. **(iMSC, 15 pont)**
Legyen V n-dimenziós vektortér, $U_1 \subset V$ V egy d_1 dimenziós altere. A $T : V \to V$ lineáris operátor képtere legyen U_2, melyről tudjuk, hogy d_2 dimenziós. A T operátor az U_1 alteret V egy d dimenziós alterébe képezi le. Bizonyítsa be, hogy

$$d_1 + d_2 - n \leq d \leq \min\{d_1, d_2\}.$$