ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT I. rész** 2004. május 20.
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (11 pont)
Igazolja, hogy a lineáris elsőrendű homogén differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak!

2. feladat (13 pont)
Határozza meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2\, 2^k} \quad (x+3)^k$$

3. feladat (10 pont)

a) Milyen függvényeknek beszélhetünk a Taylor soráról?
Mit nevezünk x_0 körüli Taylor sornak?

b) Írja fel az

$$f(x) = \operatorname{tg} x\,, \quad x_0 = 0$$

körüli $T_1(x)$ elsőrendű Taylor polinomját és a hozzá tartozó Lagrange maradéktagot, valamint a $T_2(x)$ másodrendű Taylor polinomját!

4. feladat (12 pont)
Van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x,y,z) = \frac{z\, e^{2x-y+3z}}{y} + 2x - 2y$$

függvénynek a $P_0(2,1,-1)$ pontban?

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $f'_x(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -\underline{i}$

6. feladat (13 pont)*
Cserélje fel az integrálás sorrendjét, majd számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_0^{16} \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{2} \sqrt[5]{1+x^3}\; dx\, dy$$

7. feladat (~~7~~ 5 pont)*

Hogyan kapható meg $f'(z)$ értéke a valós és képzetes rész segítségével? ($z \in \mathbf{C}$)
Írja fel a tanult 4 képletet!

8. feladat (20 pont)*

$$f(z) = e^{jz}, \qquad\qquad g(z) = \frac{e^{jz}}{(z-j)^4}$$

a) Határozza meg az f és g függvények $z_0 = j$ körüli Laurent sorait és azok konvergencia tartományait!

b) $\operatorname*{res}_{z=j} g(z) = ?$, $\qquad \oint_{|z|=\frac{3}{2}} g(z)\,dz = ?$, $\qquad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} g(z)\,dz = ?$

Pótfeladat (csak az elégséges (és esetleg a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |z|^2$ függvény?

10. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' + 2y' - 3y = x^2$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!

ANALÍZIS(2) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2004. május 20.
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (11 pont)

Igazolja, hogy a lineáris elsőrendű homogén differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak!

$y' + g(x)y = h(x) = 0$ 2

$y_1' + g(x)y_1 = 0$ 2

$y_2' + g(x)y_2 = 0$

$y_1' + y_2' + g(x)(y_1 + y_2) = 0$

$(y_1+y_2)' + g(x)(y_1+y_2) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2$ m.o. 3

$cy_1' + cg(x)y_1 = 0$

$(cy_1)' + g(x)(cy_1) = 0 \Rightarrow cy_1$ m.o. 2

$\Downarrow$

megoldások lin. 2

2. feladat (13 pont)

Határozza meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 2^k} (x+3)^k$$

$|a_k| = \left|\frac{(-1)^k}{2^k \cdot k^2}\right| = \frac{1}{2^k \cdot k^2}$ 1

$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ 2

$\frac{1}{R} = \alpha = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k\ k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{1}{2}$ 1 1

$\sqrt[k]{k} \to 1$ 1

$R = 2$ 1 $x \in (-5, -1)$-re konv. 1

$x = -5 \quad \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k (-2)^k}{k^2 \cdot 2^k} = \sum \frac{1}{k^2}$ konv. 3

$x = -1 \quad \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k\ 2^k}{k^2 \cdot 2^k} = \sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ konv. 2

KT. $[-5, -1]$.

3. feladat (10 pont)

a) Milyen függvényeknek beszélhetünk a Taylor soráról?
Mit nevezünk x_0 körüli Taylor sornak?

b) Írja fel az

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0$$

körüli $T_1(x)$ elsőrendű Taylor polinomját és a hozzá tartozó Lagrange maradéktagot, valamint a $T_2(x)$ másodrendű Taylor polinomját!

a) Akárhányszor diff.-ható x_0-ban

$$T(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

(3)

b) $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = +2(\cos x)^{-3} \sin x$, $f''(0) = 0$

$T_2(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 = x$

(5)

$T_1(x) = x$ $\quad R_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (+2) \frac{\sin \xi}{\cos^3 \xi} x^2$ (2)

ahol $\xi \in (0, x)$

4. feladat (12 pont)

Van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x, y, z) = \frac{z\, e^{2x-y+3z}}{y} + 2x - 2y$$

függvénynek a $P_0(2, 1, -1)$ pontban?

$f'_x = \frac{z}{y} \cdot 2 \cdot e^{2x-y+3z} + 2$ (2)

$f'_y = \frac{-z\, e^{2x-y+3z} \cdot y - z\, e^{2x-y+3z}}{y^2} - 2$ (2)

$f'_z = \frac{1}{y}\left(e^{2x-y+3z} + 3z\, e^{2x-y+3z}\right)$ (2)

$f'_x(P) = -2 + 2 = 0$

$f'_y(P) = \frac{1+1}{1} - 2 = 0$

$f'_z(P) = 1 - 3 = -2$

nem teljesül a szüks. felt. $\Rightarrow$ nincs szélsőérték

(6)

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) $f'_x(0,0)=?$ (A definícióval dolgozzon!)

b) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)}=?$, ha $\underline{e}\parallel -\underline{i}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h^2}{h\sqrt{2h^2}} \; ③ = \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h^2}{h\,|h|\,\sqrt{2}} \; ① = \lim_{h\to 0}\sqrt{2}\,\underbrace{\frac{\sin 2h^2}{h^2}}_{\to 2}\;\underbrace{\frac{h}{|h|}}_{\to\pm 1} \not\exists \quad ② \quad ②$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(te_1,te_2)-f(0,0)}{t} \; ② = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{t} \; ① =$$

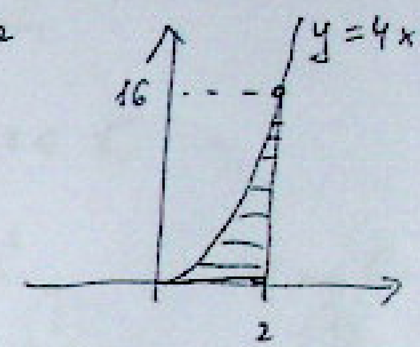
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 2t^2}{t\sqrt{t^2}\sqrt{2}} \; ② = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\,\frac{\sin 2t^2}{\underbrace{2t\,|t|}_{\to 1}} = \dots = \sqrt{2} \quad ③$$

6. feladat (13 pont)*

Cserélje fel az integrálás sorrendjét, majd számolja ki az alábbi integrált!

$$\int_0^{16}\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{2}\sqrt[5]{1+x^3}\,dx\,dy$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{y}}{2}\le x\le 2\\ 0\le y\le 16\end{array}\right\} \qquad y=4x^2$$



$$\left\{\begin{array}{l}0\le y\le 4x^2\\ 0\le x\le 2\end{array}\right\} \quad ⑤$$

$$I=\int_0^2\int_0^{4x^2}\sqrt[5]{1+x^3}\,dy\,dx \; ② = \int_0^2 \big[y\big]_0^{4x^2}\sqrt[5]{1+x^3}\,dx \; ②$$

$$\int_0^2 4x^2\sqrt[5]{1+x^3}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^2 3x^2(1+x^3)^{\frac{1}{5}}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{(1+x^3)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_0^2 \; ③ = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}\sqrt[5]{9^6} \; ① = 10\sqrt[5]{9}$$

7. feladat (~~4~~ 5 pont)*

Hogyan kapható meg $f'(z)$ értéke a valós és képzetes rész segítségével? ($z \in \mathbb{C}$)
Írja fel a tanult 4 képletet!

$$\left.\begin{aligned} f'(z) &= u'_x + j v'_x \quad 1 \\ &= v'_y + j v'_x \quad 1 \\ &= v'_y - j u'_y \quad 1 \\ &= u'_x - j u'_y \quad 1 \end{aligned}\right\} + 1$$

8. feladat (20 pont)*

$$f(z) = e^{jz}, \qquad g(z) = \frac{e^{jz}}{(z-j)^4}$$

a) Határozza meg az f és g függvények $z_0 = j$ körüli Laurent sorait és azok konvergencia tartományait!

b) $\operatorname*{res}_{z=j} g(z) = ?$, $\quad \oint_{|z|=\frac{3}{2}} g(z)\,dz = ?$, $\quad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} g(z)\,dz = ?$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad 2, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{jz} = e^{j(z-j)-1} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} j^k \frac{(z-j)^k}{k!} \quad 2 \quad 2 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad 1$$

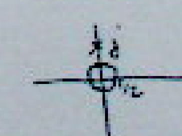
$$\frac{e^{jz}}{(z-j)^4} = \frac{e^{-1}}{(z-j)^4} + \frac{1}{e} \cdot j \frac{1}{(z-j)^3} + \frac{1}{e}(-1)\frac{1}{2!(z-j)^2} + \frac{1}{e}(-j)\frac{1}{3!(z-j)} + \dots \quad 3 \qquad z \neq j \quad 1$$

$$\left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{e \cdot k!} (z-j)^{k-4} \right)$$

$$\operatorname*{Res}_{j} g = \frac{-j}{6e} \quad 3$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} g(z)\,dz = 2\pi j \left(-\frac{j}{6e}\right) = \frac{\pi}{3e} \quad 3$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} g(z)\,dz = 0 \quad 3$$



Pótfeladat (csak az elégséges (és esetleg a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |z|^2$ függvény?

$f(z) = x^2 + y^2 + j0 \Rightarrow$ 1 $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$ 1 — mindenütt deriválhatók, mert a parciálisok léteznek és folytonosak 2

$u'_x = 2x \qquad v'_y = 0$

$u'_y = 2y \qquad v'_x = 0$

Cauchy-Riemann egyenletek: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$

$\Rightarrow 2x = 0$ és $2y = 0$ 3 $\Rightarrow$ $(0,0)$-ban differenciálható, 2

de sehol nem reguláris 1

10. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' + 2y' - 3y = x^2$$

$y_{id} = y_H + y_{ip}$ 1

A: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$ 2

$\Rightarrow y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 2

I: $-3 \cdot \mid y_{ip} = Ax^2 + Bx + C$ 2

$2 \cdot \mid y'_{ip} = 2Ax + B$

$1 \cdot \mid y''_{ip} = 2A$

$x^2(-3A) + x(-3B + 4A) + (-3C + 2B + 2A) = x^2$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$-3B + 4A = 0 \Rightarrow B = \frac{4}{3}A = -\frac{4}{9}$

$-3C + 2B + 2A = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3}(2B + 2A) = -\frac{14}{27}$

$y_{ip} = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$ 2

$y_{id} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$ 1