ANALÍZIS (1) | I. ZÁRTHELYI | 2011. okt. 13.
Mérnök Informatikus szak | β változat | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (12 pont) Keresse meg a következő sorozatok határértékét (ha létezik)!

$$a_n = \frac{n \cdot 5^{2n+1} + 6^{n-1}}{3^{3n+1} + 1}, \quad b_n = n - \sqrt{n^2 + 3n}.$$

(6)

$$a_n = \frac{n \cdot 5 \cdot 25^n + 6^{-1} \cdot 6^n}{3 \cdot 27^n + 1} = \frac{5\, n\left(\frac{25}{27}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{27}\right)^n}{3 + \left(\frac{1}{27}\right)^n} \to \frac{0+0}{3+0} = 0$$

Felhasználtuk, hogy

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, ha $|a|<1$, $k \in \mathbb{N}^+$

(6)

$$b_n = \left(n - \sqrt{n^2+3n}\right)\frac{n+\sqrt{n^2+3n}}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{n^2-(n^2+3n)}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{-3n}{n+\sqrt{n^2+3n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} \longrightarrow \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

2. feladat (12 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{n^2+2} = 3 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

a.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$:

(D) $\forall\, M<0$-hoz $\exists\, N(M) \in \mathbb{N}$: $a_n < M$, ha $n > N(M)$ (2)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$:

(D) $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
$|a_n - 1| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ (2)

an1z1β111013/1.

b.) $\boxed{8}$ $|a_n - A| = \left|\frac{3n^2-7}{n^2+2} - 3\right| = \left|\frac{3n^2-7-3(n^2+2)}{n^2+2}\right| =$

$$= \left|\frac{-13}{n^2+2}\right| = \frac{13}{n^2+2} < \frac{13}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt{\frac{13}{\varepsilon}}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{13}{\varepsilon}}\right]$$

3. feladat (16 pont) Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatot!

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 2$$

$$(a_n) \approx (2, 3.61, 4.41, \dots)$$

Ha (a_n) konvergens, akkor $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ kielégíti a rekurzív összefüggést, tehát

$A = \sqrt{4A+5} \Rightarrow A^2 - 4A - 5 = 0$

Ezért $A = 5$ vagy $A = -1$ konvergencia esetén. 3
(Mivel $a_n > 0$, jelenleg csak $A = 5$ jöhet szóba.)

5
Sejtés: (a_n) monoton nő
Bizonyítás: teljes indukcióval
1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül
2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1} < a_n$
3.) Igaz-e, hogy $a_n = \sqrt{4a_{n-1}+5} < \sqrt{4a_n+5} = a_{n+1}$?
2.) miatt teljesül, hogy
$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 4a_{n-1} < 4a_n \Rightarrow 0 < 4a_{n-1}+5 < 4a_n+5$
$\Rightarrow \sqrt{4a_{n-1}+5} = a_n < a_{n+1} = \sqrt{4a_n+5}$

5
Belátjuk, hogy $a_n < 5$.
Teljes indukcióval:
1.) $a_i < 5$ $i = 1, 2, 3$-ra igaz
2.) Tegyük fel, hogy $a_n < 5$
3.) $a_{n+1} = \sqrt{4a_n+5} < 5$ igaz-e?
2.) miatt $a_n < 5 \Rightarrow 4a_n < 20 \Rightarrow 0 < 4a_n + 5 < 25$
$\Rightarrow \sqrt{4a_n+5} = a_{n+1} < 5$

Tehát a sorozat monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens. 2
Tehát $a_n > 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ 1

an1z1b111013/2.

4. feladat (12 pont) Keresse meg a következő sorozat összes torlódási pontját, limesz szuperiorját, limesz inferiorját, és ha létezik limeszét is!

$$c_n = \frac{n^3+2}{(n+\pi)^3} \cdot \cos(n\frac{\pi}{2}).$$

$$a_n := \frac{n^3+2}{(n+\pi)^3} = \underbrace{\frac{n^3}{n^3}}_{=1} \frac{1+\frac{2}{n^3}}{(1+\frac{\pi}{n})^3} \longrightarrow \frac{1+0}{(1+0)^3} = 1 \quad 3$$

Ha $n = 2k+1$: $c_n = a_n \cdot 0 = 0 \longrightarrow 0$ 2

Ha $n = 4k+2$: $c_n = a_n \cdot (-1) \longrightarrow -1$ 2

Ha $n = 4k$: $c_n = a_n \cdot 1 \longrightarrow 1$ 2

$S = \{0, -1, 1\}$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$; $\underline{\lim}\, a_n = -1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$

1 1 1

5. feladat (10 pont)

Van-e határértéke az

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n^8}\right)^2}$$

sorozatnak?

Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

$$1 \leftarrow \frac{1}{\underbrace{(\sqrt[n]{n})^{16}}_{\to 1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^{16}}} \underset{n\geq 4}{\leq} a_n = \sqrt[n]{\frac{(n-3)^2}{n^{16}}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^{16}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{14}}} = \frac{1}{\underbrace{(\sqrt[n]{n})^{14}}_{\to 1}} \to 1$$

$$\xRightarrow{\text{rendőrelv}} \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad 7$$

$\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $a_n \not\to 0$. 3

an1z1/31111013/3.

6. feladat (12 pont)

a) Mondja ki a sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}+6^{n-1}}{3^{3n+1}} = ?$

a) Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből
$\boxed{3}$ képzett sorozat monoton fogyóan tart 0-hoz,
akkor a sor konvergens.

b) A sor két konvergens geometriai sor összege,
$\boxed{9}$ így konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 25^n + \frac{1}{6}\cdot 6^n}{3\cdot 27^n} = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{27}\right)^n + \frac{1}{18}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{27}\right)^n = \quad 3$$

$$q_1 = \frac{25}{27};\ |q_1|<1 \quad 1 \qquad q_2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9};\ |q_2|<1 \quad 1$$

$$= \frac{5}{3}\,\frac{\frac{25}{27}}{1-\frac{25}{27}} + \frac{1}{18}\,\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}$$

2 2

7. feladat (12 pont) Mutassa meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{2n^2+3}$$

sor konvergens! Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Váltakozó előjelű sor. $c_n := \frac{n-1}{2n^2+3}$

2 $\left\{ c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} \longrightarrow 0\cdot\frac{1-0}{2+0} = 0 \right.$

$\left\{ c_{n+1} \overset{?}{<} c_n \qquad \frac{n}{2(n+1)^2+3} \overset{?}{<} \frac{n-1}{2n^2+3} \right.$

$n(2n^2+3) \overset{?}{<} (n-1)(2n^2+4n+5)$

$\ldots \quad 0 \overset{?}{<} 2n^2-2n-5 \ (= 2n(n-1)-5) \quad n \geq 3$-ra teljesül.

2 Tehát a sor Leibniz sor, mert $c_n \searrow 0$. Így konvergens.

$S \approx S_{99} \quad |H| = |s - s_{99}| \leq c_{100} = \frac{100-1}{2\cdot 100^2+3}$

an1z1β111013/4.

8. feladat (14 pont)

Döntse el az alábbi sorokról, hogy divergensek, konvergensek vagy abszolút konvergensek!

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2-2}{2n^2+3}\right)^{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n^3+1}$.

a.) $\sum_{1}^{\infty} a_n$

$\boxed{8}$ $|a_n| = \left(\frac{2n^2-2}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left(\frac{1+\frac{-2}{2n^2}}{1+\frac{3}{2n^2}}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{-2/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3/2}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e^{-1}}{e^{3/2}} = e^{-5/2}$

$|a_n| \not\to 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

A sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

b.) $\sum_{1}^{\infty} b_n$

$\boxed{6}$ $|b_n| = \frac{n+2}{2n^3+1} \leq \frac{n+2n}{2n^3+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^2}$

$\frac{3}{2}\sum^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens $(\alpha = 2 > 1) \Rightarrow \sum_{1}^{\infty}|b_n|$ konvergens.

Tehát a sor abszolút konvergens.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (8 pont) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8+4^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{2+\sqrt[n]{n}}$

a.) $\sum_{1}^{\infty} a_n$:

$\boxed{4}$ $0 < a_n < \frac{2}{4^n}$; $2\sum^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(q=\frac{1}{4}, |q|<1\right)$

$\xRightarrow{\text{maj. kr.}} \sum^{\infty} a_n$ konv.

b.) $\sum^{\infty} b_n$:

$\boxed{4}$ $|b_n| = \frac{8}{2+\sqrt[n]{n}} \to \frac{8}{2+1} = \frac{8}{3} \neq 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$,

így $\sum^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

10. feladat (12 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{3n}$ b) $b_n = \sqrt[n]{\frac{3n+1}{n+5}}$

a.) $a_n = \left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right)^3 = \left(\frac{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^3 \longrightarrow \left(\frac{e^{-1}}{e}\right)^3 = e^{-6}$

$\boxed{5}$

b.)

$\boxed{7}$ $\frac{1}{\sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n+3n}} \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{3n+1}{n+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n+n}{n}} = \sqrt[n]{4} \to 1$

$\sqrt[n]{4} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\Downarrow$ 1

$\xRightarrow[\text{rendőrelv}]{} b_n \to 1$

an1z1β111013/6.