ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** **2012. jún. 4.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n = ?\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{6n} = ?$$

$$0 < a_n := \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n \le \left(\frac{2n+n}{7n}\right)^n = \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad 5$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

$$b_n := \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{6n} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{e^1}{e^4}\right)^2 = \frac{1}{e^6} \qquad 5$$

2. feladat (8+4=12 pont)

a) A q paraméter függvényében vizsgálja meg a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ sor viselkedését!

Állítását a konvergencia esetére bizonyítsa be!

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{3^{2k-1}} = ?$ (Adja meg a sor összegét!)

a) $\boxed{8}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ \text{div.}, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad 3$$

$|q|<1$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1+q+\dots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} \longrightarrow \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

$$3 \qquad\qquad 2$$

b.) $\boxed{4}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2(-2)^k}{3^{-1}\,9^k} = -6\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}\right)^k = -6\,\frac{-\frac{2}{9}}{1-\left(-\frac{2}{9}\right)}$$

an1o-120604/1.

3. feladat (14 pont)

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{4}{x^7}, & \text{ha } x<0 \\ 7-\operatorname{ch}^2(5x^3), & \text{ha } x\ge 0 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = ?$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = ?$

Folytonos-e a függvény $x=0$-ban?

Differenciálható-e a függvény $x=0$-ban?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a.) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(7-ch^2(5x^3)\right)=7-ch^2 0=7-1=6$ (2)

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{\underbrace{x^7}_{\to -0}}\right)_{\to -\infty}=-\dfrac{\pi}{2}$ (3)

$f(0+0)\ne f(0-0) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ nem folytonos $x=0$-ban (1)

$\Rightarrow f$ nem differenciálható $x=0$-ban (1)

b.)

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{4}{x^7}\right)^2}\cdot 4(-7)x^{-8}, & \text{ha } x<0 \quad (3) \\ -2(ch\,5x^3)(sh\,5x^3)\cdot 15x^2, & \text{ha } x>0 \quad (3) \end{cases}$$

4. feladat (12 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=?$ (Nem használhat L'Hospital szabályt!)

b) Bizonyítsa be, hogy a $\cos x$ deriváltja $(-\sin x)$!

A felhasznált nevezetes limeszt nem kell bizonyítania!

a.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}-\underbrace{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 0}=0$

$\boxed{4}$

an1v120604/2.

b.)
8

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$ 2

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$ 2

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = -\sin x$$ 4

5. feladat (11 pont)

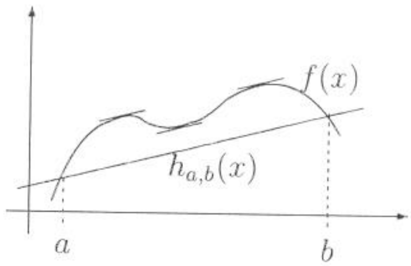
a) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!

b) Mit állíthatunk arról a függvényről, melynek deriváltja azonosan nulla? Mondja ki pontosan és bizonyítsa be az ezzel kapcsolatban tanult tételt!

a.)
3

Ⓣ ***Lagrange-féle középértéktétel:***
Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



b.)
8

Ⓣ *Ha f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor*

$$f(x) \equiv c \qquad x \in [a,b]\text{-re}$$ 2

Ⓑ A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall\,[x_1, x_2] \subset [a,b]$-re $\exists\ \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\,, \qquad \xi \in (a,b)$$

De mivel $f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)\ \ \forall\, x_1 \neq x_2$-re $\implies f(x) \equiv$ konst. ■ 6

an1v-120604/3.

6. feladat (8 pont)*

$$x(t) = t^3 + 3t + 2 + \sin t\,, \qquad y(t) = (t-1)^2 + \cos 2t$$

a) $\dot{x}(t) = ?\,,\quad \dot{y}(t) = ?$

b) Belátható, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!
$f'(x_0) = ?\,,\quad x_0 = x(t_0)$
Van-e lokális szélsőértéke f-nek x_0-ban?

a) $\dot{x}(t) = 3t^2 + 3 + \cos t$ 2

$\boxed{4}$ $\dot{y}(t) = 2(t-1) - 2\sin 2t$ 2

b) $x_0 = x(0) = 2$

$\boxed{4}$ $f'(2) = \dfrac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ 3

$f'(2) \neq 0 \Rightarrow$ nincs lok. sz.é. $x_0 = 2$-ben 1

7. feladat (22 pont)*

a) $\displaystyle\int 3x^2 \ln x \, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}} \, dx = ?$

Szükség esetén alkalmazza a $\sqrt[3]{x-2} = t$ helyettesítést!

a.) $\displaystyle\int 3x^2 \ln x \, dx = x^3 \ln x - \int \underbrace{x^3 \frac{1}{x}}_{=x^2} dx =$ 2

$\boxed{6}$ $u' = 3x^2 \quad v = \ln x$
$u = x^3 \quad v' = \frac{1}{x}$ 2

$= x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3} + C$ 2

b.) $\displaystyle\int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\ln^2 x}_{f^2} \, dx = \frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^e = \frac{1}{3}(\ln^3 e - \ln^3 1) =$ 3

$\boxed{5}$ $= \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3}$ 2

an1v-120604/4.

c.) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx = \int (x-2)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(x-2)^{2/3}}{2/3} + C$

$\boxed{3}$

d.) $\sqrt[3]{x-2} = t \Rightarrow x = t^3+2 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$ (2)

$x=1: \quad \alpha = \sqrt[3]{-1} = -1 \quad ; \quad x=10: \quad \beta = \sqrt[3]{8} = 2$ (2)

$I_d = \int_{-1}^{2} \frac{t^3+2}{t} 3t^2\,dt = \int_{-1}^{2} 3(t^4+2t)\,dt =$ (1)

$= 3\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right)\Big|_{-1}^{2} = 3\left(\frac{32}{5}+4-\left(-\frac{1}{5}+1\right)\right)$ (3)

8. feladat (12 pont)*

a) $\int \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = ?$

b) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = ?$

a.) $\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow 1 = A(x+3) + B(x-2)$ (2)

$\boxed{8}$

$x=2: \quad 1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

$x=-3: \quad 1 = -5B \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\ln|x-2| - \ln|x+3|\right) + C$ (3) (3)

b.) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_3^{\omega} \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,dx =$ (1) a.)-ból

$\boxed{4}$

$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{5}\left(\ln(x-2) - \ln(x+3)\right)\Big|_3^{\omega} =$

$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{5}\left(\ln(\omega-2) - \ln(\omega+3) - (\ln 1 - \ln 6)\right) =$ (1)

$= \frac{1}{5}\left(\lim_{\omega\to\infty} \ln \underbrace{\frac{\omega-2}{\omega+3}}_{\frac{1-\frac{2}{\omega}}{1+\frac{3}{\omega}} \to 1} + \ln 6\right) = \frac{1}{5}(\ln 1 + \ln 6) = \frac{1}{5}\ln 6$ (2)

A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (8 pont)

$$f(x) = \pi + 2\arcsin(3x-1)$$

Határozza meg f értelmezési tartományát, értékkészletét! $f'(x) = ?$

$-1 \le 3x-1 \le 1 \Rightarrow 0 \le 3x \le 2 \Rightarrow 0 \le x \le \frac{2}{3}$

$D_f = [0, \frac{2}{3}]$ (3)

$\arcsin(3x-1) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 2\arcsin(3x-1) \in [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow R_f = [0, 2\pi]$ (3)

$f'(x) = 2\,\frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} \cdot 3$ (2) $\quad x \in (0, \frac{2}{3})$

10. feladat (12 pont)

$a)\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x} - \sqrt{4x^2-5}\right) = ?$ $\qquad b)\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^3)}{\operatorname{arctg}(5x^3)} = ?$

a) $\boxed{7}$

$f(x) = \left(\sqrt{4x^2+3x} - \sqrt{4x^2-5}\right)\frac{\sqrt{4x^2+3x}+\sqrt{4x^2-5}}{\sqrt{4x^2+3x}+\sqrt{4x^2-5}} =$

$= \frac{4x^2+3x-(4x^2-5)}{\sqrt{4x^2+3x}+\sqrt{4x^2-5}} = \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+3x}+\sqrt{4x^2-5}} =$

$= \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}\ \frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{3+0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}} = \frac{3}{4}$

$= \frac{x}{|x|} = 1$

b.) $\boxed{5}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x^3}{\operatorname{arctg} 5x^3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\overset{\to 1}{(\cos 2x^3)}\ 6x^2}{\underbrace{\frac{1}{1+(5x^3)^2}}_{\downarrow\ 1}\ 15x^2} = \frac{2}{5}$

$\frac{0}{0}$

$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

an1o120604/6.