ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT β változat

2009. jan. 15.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

a) Definiálja a következő fogalmat!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$$

b) Fogalmazza meg a valós egyváltozós függvényekre tanult Bolzano tételt!

c) Írja le a valós egyváltozós függvény x_0 pontbeli deriválhatóságára tanult szükséges és elégséges tételt!

a) $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$: $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ (3)
$(\varepsilon \in \mathbb{R},\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$

b) (T) **Bolzano tétel:**

Ha f folytonos $[a,b]$-ben és $f(a) < c < f(b)$, akkor létezik $\xi \in (a,b)$: $f(\xi) = c$

(3)

Vagy: (T) Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket. (Így is jó)

c.) (T) Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:

f akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $K_{x_0,\delta} \subset D_f$, $\lvert h\rvert < \delta$-ra: $$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h,$$ ahol A csak x_0-tól függhet, h-tól nem, és $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

(4)

2. feladat (14 pont)

$$a_n = \frac{n-2}{n+4}\cdot\frac{1}{2^n}, \qquad b_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+3}$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$, $\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a.) $\boxed{6}$

$$a_n = \frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow \frac{1-0}{1+0}\cdot 0 = 0$$ (3)

$$b_n = \frac{2\cdot 2^n}{2^n+3} = \frac{2}{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{1+0} = 2$$ (3)

b.) $\boxed{8}$

$0 < a_n < \frac{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\sum^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. geom. sor $(0 < q = \frac{1}{2} < 1)$ $\underset{\text{maj.kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum^{\infty} a_n$ konv. (5)

an1v 090115/1.

$b_n \to 2 \neq 0 \Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ div., mert nem teljesül a konv. szükséges feltétele. (3)

3. feladat (9+4=13 pont)

a) Mondja ki és bizonyítsa be a reciprok függvény deriválási szabályát!

b) $\left(\frac{1}{\text{ch}\,(\text{arctg}\,(4+x^2))}\right)' = ?$

a.) $\boxed{9}$ (T) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ (2)

(B)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\underset{\downarrow \atop g(x)}{g(x+h)}\ \underset{\downarrow \atop g(x)}{g(x)}}\ \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow \atop g'(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

(5)

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$: g folytonossága miatt

($g(x) \neq 0$ és g folytonos x-ben (mivel deriválható) $\Longrightarrow$ $\exists K_x : g(x) \neq 0$ (lásd a Bolzano tétel előtti segédtételt). Tehát elegendően kis h-ra $g(x+h) \neq 0$.) (2)

b.) $\boxed{4}$ $\left(\frac{1}{ch(arctg(4+x^2))}\right)' = -\frac{sh(arctg(4+x^2))\frac{1}{1+(4+x^2)^2}\cdot 2x}{ch^2(arctg(4+x^2))}$

4. feladat (6+3+6=15 pont)

a) Mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(2x)$ nem létezik!

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4x^2+5}\cdot\sin(2x) = ?$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x-1}-2e^x+3e^{-2x}}{8+2e^{5x}+e^{2x}} = ?$$

a) $\boxed{6}$ $f(x) := \sin 2x$

$f(x)=0$: $2x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{2}$

$x_n^{(1)} := n\frac{\pi}{2} \to \infty$; $f(x_n^{(1)}) = 0 \to 0$

$f(x)=1$: $2x = \frac{\pi}{2}+2n\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}+n\pi$

$x_n^{(2)} := \frac{\pi}{4}+n\pi \to \infty$; $f(x_n^{(2)}) = 1 \to 1 \neq 0$

$\underset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \nexists$

an1v 09011512.

b.) $\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{4x^2+5}}_{0} \cdot \underbrace{\sin 2x}_{\text{korlátos}} = 0$

c.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \frac{e^{-1}-2e^{-4x}+3e^{-7x}}{8e^{-5x}+2+e^{-3x}} = \frac{e^{-1}-0+0}{0+2+0} = \frac{1}{2e}$

5. feladat (8 pont)

$$f(x) = \begin{cases} 2\,, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0\,, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

A határozott integrál definíciójával bizonyítsa be, hogy $\int_2^4 f(x)\, dx$ nem létezik.

$\forall$ F felosztásra:

$s_F = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \Rightarrow h = \sup\{s_F\} = 0$

$S_F = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 2 \cdot \Delta x_k = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2(b-a) = 2(4-2) = 4$

$\Rightarrow H = \inf\{S_F\} = 4 \neq h = 0 \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx \nexists$

6. feladat (8 pont)*

A differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^4 + 3y^5 + 2e^{3x-3} - (x-1)^3 = 0$$

Van-e ennek a függvénynek lokális szélsőértéke az $x_0 = 1$ pontban?

$1 + 3(-1) + 2 - 0 = 0$ ✓

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$4 \cdot y^3(x) \cdot y'(x) + 15y^4(x) \cdot y'(x) + 2 \cdot 3e^{3x-3} - 3(x-1)^2 = 0$ 4

x = 1-et behelyettesítve:

$4(-1)y'(1) + 15(-1)^4 \cdot y'(1) + 6 - 0 = 0$

$\Rightarrow y'(1) = \frac{-6}{11}$ 2

$y'(1) \neq 0 \Rightarrow$ nincs lok. szé az $x_0 = 1$ pontban, mert nem teljesül a lok. szé. létezésének szükséges feltétele. 2

an1v-090115/3.

7. feladat (3+6=9 pont)*

a) $\int \cos^2 x \; dx = ?$ b) $\int (3x+2)\cdot\cos 2x \; dx = ?$

a.) $\boxed{3}$ $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C$

b.) $\boxed{6}$ $\int (3x+2)\cos 2x \, dx = (3x+2)\frac{\sin 2x}{2} - \frac{3}{2}\int \sin 2x \, dx =$ 2

$u = 3x+2 \quad v' = \cos 2x$ 2

$u' = 3 \quad v = \frac{\sin 2x}{2}$

$= \frac{3x+2}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\frac{\cos 2x}{2} + C$ 2

8. feladat (10 pont)*

$$\int_2^9 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-1}} \, dx = ?$$

Vezesse be az $t = \sqrt[3]{x-1}$ új változót az integrálba, majd számolja ki!

$t = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = t^3+1 \Rightarrow dx = 3t^2 \, dt$ 2

$x=2: \; t=1$

$x=9: \; t=2$ 2

$\int_1^2 \frac{(t^3+1)^2}{t} 3t^2 \, dt = 3\int_1^2 (t^7+2t^4+t) \, dt =$ 2

$= 3\left(\frac{t^8}{8} + 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 3\left(\frac{2^8}{8} + 2\frac{2^5}{5} + \frac{1}{2}2^2\right) - 3\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)$ 4

9. feladat (8+5=13 pont)*

a) $\int \frac{1}{x^2+6x+5} \, dx = ?$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+6x+5} \, dx = ?$

a.) $\boxed{8}$ $\frac{1}{x^2+6x+5} = \frac{1}{(x+1)(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5}$ 2

$1 = A(x+5) + B(x+1)$

$x=-1: \quad 1 = 4A \; ; \; A = \frac{1}{4}$ 3

$x=-5: \quad 1 = -4B \; ; \; B = -\frac{1}{4}$

an1v09011514.

$$J = \int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+5}\right)dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+5| + C$$

3

b.) $\boxed{5}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx =$$

1

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x+5)\right)\Big|_1^\omega =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\ln(\omega+1) - \frac{1}{4}\ln(\omega+5)} - \left(\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 6\right)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{\omega+1}{\omega+5} = \frac{1}{4}\ln\underbrace{\frac{1+\frac{1}{\omega}}{1+\frac{5}{\omega}}}_{\to 1} \to 0$$

$$= \frac{1}{4}(\ln 6 - \ln 2)\left(= \frac{1}{4}\ln 3\right)$$

4

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

10. feladat (7 pont)

$$f(x) = e^{x^4 - 4x}$$

$f'(x) = ?$

Adja meg a függvény monotonitási intervallumait!

$$f'(x) = e^{x^4-4x}\,(4x^3-4)$$

2

$$f'(x) = \underbrace{4e^{x^4-4x}}_{>0}(x^3-1)$$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

5

11. feladat (13 pont)

$$f(x) = x^2 \ \ln 2x$$

a) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = ?$

b) $\int f(x)\, dx = ?$

a.) $\boxed{6}$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \ \underbrace{\ln 2x}_{\downarrow -\infty} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln 2x}{\frac{1}{x^2}} \overset{L'H}{=} \quad \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0+0} -\frac{1}{2} x^2 = 0$$

b.) $\boxed{7}$

$$\int x^2 \ln 2x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln 2x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$u' = x^2 \qquad v = \ln 2x$

$u = \frac{x^3}{3} \qquad v' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$

$$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

an1v-09011576.