ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2011. márc. 24.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

a) Adja meg a következő definíciókat:

$a1)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 7 \qquad\qquad a2)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+3}{3n+5} = \infty$$

a.) $\boxed{6}$ (D)a1) $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$:
$|a_n-7|<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon)$ (3)

(D)a2) $\forall\ P>0$-hoz $\exists\ N(P)$: $a_n>P$, ha $n>N(P)$ (3)

b.) $\boxed{6}$ $a_n = \dfrac{4n^2-2n+3}{3n+5} \geq \dfrac{4n^2-2n^2+0}{3n+5n} = \dfrac{n}{4} > P$

$\Rightarrow n>4P$, tehát $N(P)\geq [4P]$ (6)

2. feladat (19 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$a_n = \sqrt{n^2+2n-5} + (-1)^n\sqrt{n^2+7n} \qquad\qquad b_n = \dfrac{(-3)^n + 2^{3n}}{7+8^{n+1}}$

Ha n ps:
$a_n = \sqrt{n^2+2n-5} + \sqrt{n^2+7n} = \infty$ ($\infty+\infty$ alakú) (3)

Ha n ptlt:

$\boxed{9}$

$a_n = \left(\sqrt{n^2+2n-5} - \sqrt{n^2+7n}\right)\dfrac{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} = \dfrac{n^2+2n-5-(n^2+7n)}{\sqrt{n^2+2n-5}+\sqrt{n^2+7n}} =$ (2)

$= \dfrac{-5n-5}{\sqrt{n^2+2n-5}+\sqrt{n^2+7n}} = \underbrace{\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1} \dfrac{-5-\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{7}{n}}} \longrightarrow$ (2)

$\to \dfrac{-5-0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\dfrac{5}{2}$ (3) $\Rightarrow \overline{\lim}\, a_n = \infty,\ \underline{\lim}\, a_n = -\dfrac{5}{2}$ (2)

an1 z1p 110324/1.

$$\left.\begin{aligned} &b_n = \frac{(-3)^n + 8^n}{7 + 8\cdot 8^n} = \frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^n + 1}{7\left(\frac{1}{8}\right)^n + 8} \to \frac{0+1}{0+8} = \frac{1}{8} \quad 5 \\ &\Rightarrow \overline{\lim}\, b_n = \underline{\lim}\, b_n = \frac{1}{8} \quad 2 \end{aligned}\right\} \boxed{7}$$

3. feladat (15 pont)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 9}{8}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 10$$

$$(a_n) = (10\,,\ 11.38\,,\ 15.05\,,\cdots)$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?
b) Igazolja, hogy $a_n > 9\,, \quad n \in \mathbb{N}^+$
c) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
d) Konvergens-e a sorozat!

a.) Ha (a_n) konv: $A = \frac{A^2-9}{8} \Rightarrow A^2 - 8A - 9 = (A-9)(A+1) = 0$

$\boxed{3}$ $\Rightarrow A = -1$ vagy $A = 9$ 3

b.) $a_n > 9$ bizonyítása teljes indukcióval:

$\boxed{5}$ 1.) $a_i > 9 \quad i = 1, 2, 3$

2.) Tfh. $a_n > 9$

3.) $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 9}{8} \overset{?}{>} 9$

2.) miatt $a_n > 9 \Rightarrow a_n^2 > 81 \Rightarrow a_n^2 - 9 > 72$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2-9}{8} > \frac{72}{8} = 9$

Tehát az állítás igaz. 5

c.) Sejtés (a_n) monoton nő (sőt szig. mon. nő)

$\boxed{5}$ Bz: teljes indukcióval:

1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül

2.) Tfh. $a_{n-1} < a_n$

3.) Igaz-e $a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 9}{8} \overset{?}{<} \frac{a_n^2 - 9}{8} = a_{n+1}$

2.) miatt: $\underbrace{9 <}_{\text{b) miatt}} a_{n-1} < a_n \Rightarrow a_{n-1}^2 < a_n^2$

$\Rightarrow a_{n-1}^2 - 9 < a_n^2 - 9 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 9}{8} < \frac{a_n^2 - 9}{8} = a_{n+1}$

d.) A sorozat divergens, mert a határérték -1 vagy 9,

$\boxed{2}$ másrészt $a_1 = 10$ és $a_n \nearrow$. 2 an1 z1p 110324/2.

4. feladat (20 pont)

Vizsgálja a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

a) $a_n = \sqrt[n]{3^{2n-1} \cdot \left(6 + \frac{1}{n}\right)}$

b) $b_n = \left(1 - \frac{5}{6n^2}\right)^{2n^2}$

c) $c_n = \left(\frac{2n^2+7}{2n^2+5}\right)^n$

a.) $\boxed{7}$ $a_n = \sqrt[n]{9^n \frac{1}{3}\left(6+\frac{1}{n}\right)} = 9 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{3}}}_{\downarrow \atop 1} \sqrt[n]{6+\frac{1}{n}} \to 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9,$ (1) (2) (átalakításért)

mert

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{6} < \sqrt[n]{6+\frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{6+1} = \underbrace{\sqrt[n]{7}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{6+\frac{1}{n}} \to 1 \quad (4)$$

b.) $\boxed{4}$ $b_n = \left(1 + \frac{-5/3}{2n^2}\right)^{2n^2} \to e^{-5/3}$

c.) $\boxed{9}$ $c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+7}{2n^2+5}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{\gamma_n}$ (1)

$$\gamma_n = \frac{\left(1+\frac{7/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{5/2}{n^2}\right)^{n}} \to \frac{e^{7/2}}{e^{5/2}} = e \quad (4)$$

$e - 0{,}1 < \gamma_n < e + 0{,}1$, ha $n > N_1$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{e-0{,}1}}_{\downarrow \atop 1} < \sqrt[n]{\gamma_n} = c_n < \underbrace{\sqrt[n]{e+0{,}1}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\Rightarrow c_n \to 1 \quad (4)$$

rendőrelv

an1z1p 110324/3.

5. feladat (19 pont)

a) Fogalmazza meg a numerikus sorokra vonatkozó majoráns kritériumot!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?
Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 5n^2}{7n^4 + 3n^2 - 5n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+4}}{(2n-1)\,3^{2n}}$

a.) $\sum^{\infty} a_n$; $a_n > 0$ 1

$\boxed{3}$ Ha $a_n \le c_n$ $\forall$ n-re és $\sum^{\infty} c_n$ konv. $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. 2

b.) b1.) $\sum^{\infty} a_n$

$\boxed{5}$ $a_n \ge \dfrac{2n^3 + 0}{7n^4 + 3n^4 - 0} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{5}\sum^{\infty}\dfrac{1}{n}$ div.

$\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ div.

b2) $\sum^{\infty} b_n$

$\boxed{6}$

$b_n = \dfrac{16 \cdot 8^n}{(2n-1)\,9^n} \le \dfrac{16\, 8^n}{9^n} = 16\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$;

$16 \sum^{\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ konv. geom. sor ($q = \dfrac{8}{9} < 1$)

$\underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n$ konv.

$s \approx s_{100}$

$\boxed{5}$

$0 < H = s - s_{100} = \displaystyle\sum_{n=101}^{\infty} \frac{16 \cdot 8^n}{(2n-1)\,9^n} < 16\,\frac{1}{201}\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n =$

$= \dfrac{16}{201}\,\dfrac{\left(\frac{8}{9}\right)^{101}}{1 - \frac{8}{9}}$

an1 z1p 110324/4.

6. feladat (15 pont)

a) Mit értünk azon, hogy egy numerikus sor feltételesen konvergens?

b) Abszolút konvergens-e, illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2 \cdot n \cdot 3^n + 2^n}$$

a.) Ha $\sum^{\infty} a_n$ konvergens, de $\sum^{\infty} |a_n|$ divergens, akkor a sor feltételesen konv.

$\boxed{2}$

b.) $\sum (-1)^n c_n$

$\boxed{13}$

$$c_n = \frac{3 \cdot 3^n}{2 \cdot n\, 3^n + 2^n} \geq \frac{3 \cdot 3^n}{2n \cdot 3^n + 3^n} = \frac{3}{2n+1} \geq \frac{3}{2}\frac{1}{n}$$

$\frac{3}{2} \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div $\underset{\text{min. kr.}}{\Rightarrow} \sum^{\infty} c_n$ div, tehát a sor nem abszolút konvergens.

5

Leibniz sor-e?

$$c_n = \frac{3 \cdot 3^n}{2 \cdot n \cdot 3^n + 2^n} = \underbrace{\frac{3^n}{n \cdot 3^n}}_{= \frac{1}{n} \to 0} \frac{3}{2 + \underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}} \to 0$$

2

$c_n \overset{?}{\geq} c_{n+1}$ (monoton csökkenő-e?)

$$\frac{3 \cdot 3^n}{2 \cdot n\, 3^n + 2^n} \overset{?}{\geq} \frac{3 \cdot 3^{n+1}}{2(n+1)\, 3^{n+1} + 2^{n+1}} \qquad \Big| : 3 \cdot 3^n$$

$$\frac{1}{2n\, 3^n + 2^n} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2n \cdot 3^n \cdot 3 + 6 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n}$$

$$6n \cdot 3^n + 6 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n \overset{?}{\geq} 6n\, 3^n + 3 \cdot 2^n$$

$$6 \cdot 3^n \overset{?}{\geq} 2^n$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{?}{\geq} \frac{1}{6}$$

: ez $\forall$ n-re igaz. 4

Tehát $c_n \searrow 0$, vagyis Leibniz sorról van szó. Így a sor konv. Tehát feltételesen konv. a sor.

1 1

an1 z1p 110324/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (13 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{9+9^{n+1}}{3^{2n}+5^n} = ?$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+6} - \sqrt{4n^2+8}\right) = ?$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+5}{n^2-2}\right)^{n^2} = ?$

a.) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{9+9\cdot 9^n}{9^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{9\left(\frac{1}{9}\right)^n+9}{1+\left(\frac{5}{9}\right)^n} = \dfrac{0+9}{1+0} = 9$

$\boxed{4}$

b.) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+6} - \sqrt{4n^2+8}\right) \dfrac{\sqrt{4n^2+6}+\sqrt{4n^2+8}}{\sqrt{4n^2+6}+\sqrt{4n^2+8}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+6-(4n^2+8)}{\sqrt{4n^2+6}+\sqrt{4n^2+8}} =$

$\boxed{5}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{-2}{\underbrace{\sqrt{4n^2+6}+\sqrt{4n^2+8}}_{\to\infty}} = 0$

c.) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}} = \dfrac{e^5}{e^{-2}} = e^7$

$\boxed{4}$

8. feladat (7 pont)

Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+1}+(-4)^n}{6^n} = ?$$

A sor két konvergens geometriai sor összege:

$$5\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{-4}{6}\right)^n}_{=\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = 5\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

1   3   3

$q_1=\frac{5}{6},\ |q_1|<1$ $q_2=-\frac{2}{3},\ |q_2|<1$

an1z1p 110324/6.