FIZIKA 1 előadás

2010.09.08.

$$v = \frac{dx(t)}{dt} \qquad v = \int a\,dt$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \qquad x = \int v\,dt$$

ált. eset

speciális eset

$a = áll$

$v = at + c_1$; $t = 0$ $v = v_0$ $\rightarrow$ $\boxed{v = v_0 + at}$

$$x = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c_2$$

$x(0) = x_0$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

harm. rezgő mozg. kinematikája

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{d\,x(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d''x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

$\boxed{\frac{d''x}{dt}\,?}$

$A\omega$: sebesség amplitúdó

$A\omega^2$: gyorsulás amplitúdó

vektorok és műveletek velük

<u>vektor</u> : nagyság + irány

<u>elm. vektor</u>: $\Delta \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$

$\underline{r}_1\ (1, -2)$

$\underline{r}_2\ (-5, 3)$

$\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = (-4; 1)$

$\underline{r}_2 - \underline{r}_1 = (-6; 5)$

<u>skalár</u>

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$

$\underline{a}(a_x; a_y)$

$\underline{b}(b_x; b_y)$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y$

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

$$|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\alpha$$

Determináns

$$\underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$\overset{?}{\underset{HF}{=}}$$

$$\dot{\jmath} = j$$

Sík és térbeli mozgás sebessége és gyorsulása

Descartes KR:

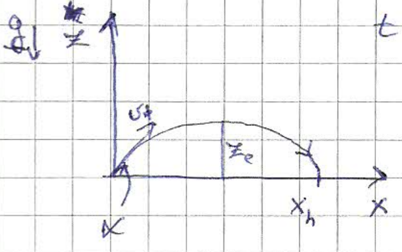
$$\underline{r}(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\underline{i} + \frac{dy(t)}{dt}\underline{j} + \frac{dz(t)}{dt}\underline{k}$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}\underline{i} + \frac{dv_y}{dt}\underline{j} + \frac{dv_z}{dt}\underline{k} =$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\underline{k}$$

Ferde hajítás



$t = 0$

$x = 0, \ t = 0$

$v = v_0$

$$t=0 \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = v_0 \sin\alpha \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha\, t \\ z &= v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

$$v_z = v_0 \sin\alpha - gt$$

$a_x = 0$

$a_z = -g$

- Emelkedés ideje, magassága

$$v_0 \sin\alpha - g t_e = 0 \rightarrow t_e = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$z_e = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \underline{\underline{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}}$$

Emelkedési magasság

$$x_h = v_0 \cos\alpha \cdot 2 \underbrace{\frac{v_0 \sin\alpha}{g}}_{t_e} = \frac{v_0^2\, 2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} =$$

$$x_h = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

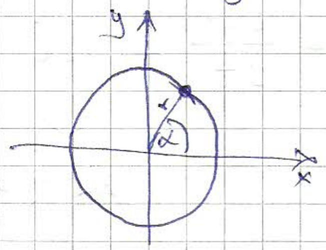
$\alpha = 45°$ max hajítási táv.
a hajítás távolsága

$$\boxed{t_{hajítás} = 2t_e}$$

Körmozgás

Síkmozgás

Egyenletes körmozgás: $\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega = áll$



$x = r \cdot \cos\alpha = r\cos(\omega t)$

$y = r \cdot \sin\alpha = r \sin(\omega t)$

$r = T$

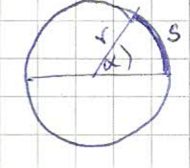
$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin(\omega t)$

$v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos(\omega t)$

$a_x = -r\omega^2 \cos(\omega t)$ (középpont felé mutatnak)

$a_y = -r\omega^2 \sin(\omega t)$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 \sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2 \omega t} = r\omega^2 = r\frac{v^2}{r^2} = \underline{\underline{\frac{v^2}{r}}}$$



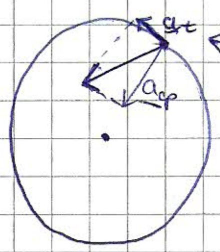
$r; \omega \rightarrow v = r\omega \leftarrow v = \frac{ds}{dt} = r\omega$

$\alpha = \omega t \rightarrow s = r\omega t \rightarrow$

$r\alpha$

$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{r} \text{ (a középpont felé mutat)}}$

Általános (tetszőleges) körmozgás



← tangenciális gyorsulás

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \neq \text{áll !!!}$$

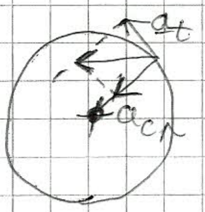
$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad v \text{ kerületi sebesség}$$

$$|\underline{a}_e| = \sqrt{|\underline{a}_t|^2 + |\underline{a}_{cp}|^2}$$

$\boxed{\text{Előadás}}$ 2010.09.13.

E404 ⇒ V2628A

<u>tetszőleges körmozgás</u>



$$\underline{a} = a_t\, \underline{t} + a_{cp}\, \underline{n}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

áll. körmozgás egyenletes $\rightarrow \omega = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \text{áll}$

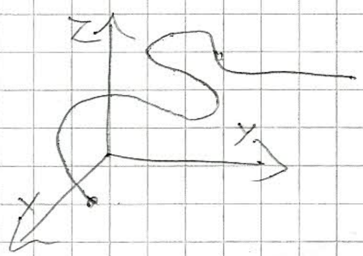
$$\downarrow$$

$$\Delta\alpha = \omega t$$

$$\Delta s = r\Delta\alpha = r\omega t$$

$$\underline{a}_t = \underline{0} \quad [??]$$

általános 3D mozgás (tömegpont)



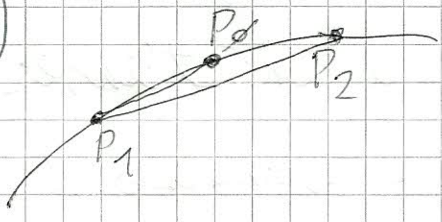
$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$

$\underline{v}(t) = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$

$\underline{a}(t) = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

Minden pill.-ban a tömegpont mozgása helyettesíthető pill.-nyi körmozgással, amely egy jellemző síkban van az ún. simulósíkban.

$\left(a_t = \frac{dv}{dt}\right)$



centrálmozgás

a vonatkoztatási rendszer egy adott pontjából indul ki

Dinamika (kinetika)

Newton axiómák

Azokat az alap törvényeket amelyekre a mechanika tételeit építjük.
Lényegében a Newton féle axiómát tartalmazzák.
Helyességük mérések alapján dönthető el.
Minden axiómarendszernek megvan a maga hatásköre.

1. axióma: a tehetetlenség törvénye

Van olyan vonatkoztatási rendszer amelyben egy teljesen magára hagyott test pontszerű nyugalomban vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásban van.
Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük, és a mechanika további törvényeit ehhez vonatkoztatjuk.

Eddigi tapasztalataink szerint az állócsillagokhoz rögzített rendszer inercia rendszernek tekinthető.

2. axióma: a dinamika alapegyenlete

Az erő és a tömeg

A testeknek egy más testekre gyakorolt olyan hatását amely a test sebességének megváltozásában, a test gyorsulásában nyilvánul meg, erőnek nevezzük.

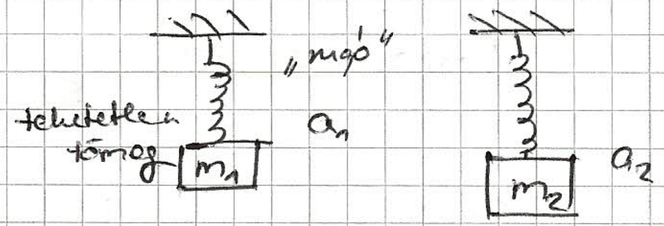
Az erő és a gyorsulás közti összefüggésben szerepet kell játszania egy további mozgási, a mozgó testre jellemző, a test tehetetlenségét kifejező fizikai mennyiségnek. Ez tehetetlen tömeg.

Egy pontszerű test $\underline{a}$ gyorsulása egyenesen arányos a testre ható erők eredőjével ($\underline{F}$) és fordítva arányos a test m tömegével.

$$\boxed{\underline{F} = m\underline{a}}$$

- Tömegek

Dinamikai tömegmérés



$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

„te”

„T_1, T_2 periódusidő”

Ősikilogramm: Párizs mellett őrzik
90% platina — henger
10% irídium

$1\,kg \equiv 1{,}000028\,dm^3$; $t = 4°C$; p = normál; H_2O

Statikai erőmérés "mérleg" g $\underline{g}$

A test súlya: $\underline{G} = m\underline{g}$

Ugyanazon testek súlya tömegükkel arányos
De ugyanannak a testnek a súlya a helyzettől változik.

$$G_1 = m_1 g = m_2 g = G_2 \rightarrow \text{(ugyanazon helyen)} \rightarrow m_1 = m_2$$

Tapasztalat (mérés): ha $m_{s1} = m_{s2}$ (s: súlyos tömeg) →

$$\rightarrow m_{1t} = m_{2t} \quad \text{(t: tehetetlen tömeg)}$$

$$\frac{m_{s1}}{m_{1t}} = \frac{m_{s2}}{m_{2t}} = \text{áll.} = 1 \text{ (a választás)}$$

Galilei:

$$G = m_s g_F \quad (g_F \text{ függ a helytől})$$

$$m_t a = F \underset{G}{=} m_s g_F \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{m_s}{m_t} = \frac{a}{g_F} = \frac{g}{g_F}$$

$$\text{így } \frac{g}{g_F} = 1 = \text{állandó} \rightarrow \boxed{m_t = m_s}$$

Eötvös Lóránd

$5 \cdot 10^{-9}$ relatív hiba

3. axióma: Hatás-ellenhatás
akció-reakció elve

Ha az egyes tömegpont a kettes tömegpontra erőt gyakorol akkor a kettes tömegpont is hat az egyes tömegpontra ugyanakkora és ellentétes irányú erővel.

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

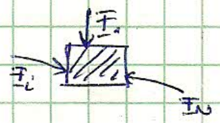
Fizika EA.

2010.09.20.

Newton IV. axiómája (a szuperpozíció elve):

$\{\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_N\}$

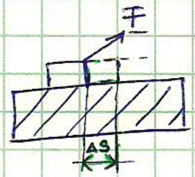
Ha ugyanarra az anyagi pontra egyidejűleg több erő hat, ezek együttes hatása teljesen egyenértékű a vektori ~~összegével~~ hatásával (eredőjének), vagyis az erő egyetlen $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_N$ erővel helyettesíthető. $m\underline{a} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_N = \underline{F}$



A mechanikai munka

$\underline{F}, \Delta \underline{s}$

Az $\underline{F}$ erő ΔW elemi munkája az erő elmozdulás irányába eső összetevőjének és az elmozdulás nagyságának szorzatával egyenlő.



$$\Delta W = (F \cdot \cos\Theta)\Delta s$$

$$\sum \Delta W \cong \int dW$$

$$\Delta W = (F \cdot \cos\Theta) \cdot \Delta s$$

Skaláris szorzat: $\underline{A} \cdot \underline{B} = AB\cos\Theta$

$$\Delta W = \underline{F} \cdot \Delta \underline{s}$$

$$\boxed{dW = \underline{F} \cdot d\underline{s}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$d\underline{s}(dx, dy, dz)$

$\underline{F}(F_x, F_y, F_z)$

Pl:

$\underline{F} = m\underline{g} =$ áll.

$g \downarrow m$

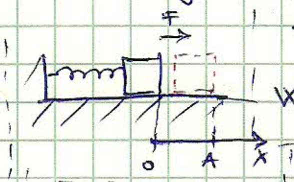
$\Delta W = F\Delta y = F \cdot h = mgh$ ↓ lefelé mozgás

$\Delta y = h$

↑ felfelé ($\Theta = 180°$; $\cos 180° = -1$)

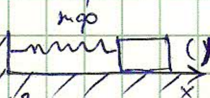
$\Delta W = -mgh$

Változó erő munkája

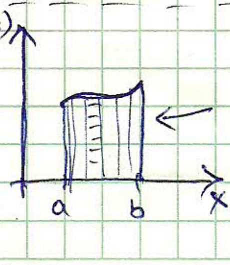


$F = +kx$ (k: rugó állandó)

$W = \int_0^A kx\,dx = \frac{1}{2}kA^2$



($\mu = 0$, nincs súrlódás)



$dW = F\,dx$

W a görbe alatti terület

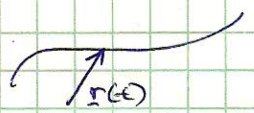
$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

$F_{rugóerő} = -kx$

$\boxed{F_{rugóerő} = -kx}$

Paraméteres görbe megadása $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\int_g \underline{F}(r)\, d\underline{r}$$



$r, r = T$

Kinetikus energia és a munkatétel

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \longrightarrow m\ddot{\underline{r}}\dot{\underline{r}} = \underline{F}\dot{\underline{r}} \longrightarrow$$

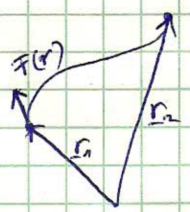
$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \underline{F}\frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{\underline{r}}\cdot\ddot{\underline{r}}\right)$$

Integrálás

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\underline{F}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt$$



$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2}\underline{F}\,d\underline{r}}$$

mechanikai munkavégzés

Munkatétel:

Az anyagi pont kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható eredő erők munkájával.

A helyzeti (potenciális) energia:

Tárolt energia: potenciális v. helyzeti energia

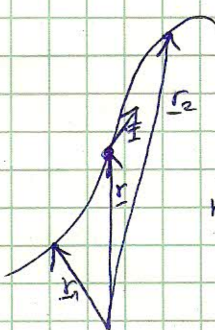
Gravitációs potenciális energia

$$\boxed{U_g = mgh}$$

Általában

$$U(\underline{r}) - U(\underline{r}_0) = -\int_{r_0}^{r}\underline{F}(r)\,d\underline{r}$$

pot. energia, nullszint



Kvázisztatikus mozgatás

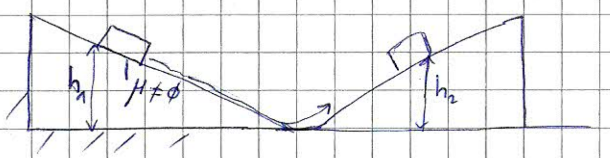
Ekvipotenciális felület

$$U(\underline{r}) = áll$$

Rugó helyzeti energiája: $U_r = -\int -kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2$; $F_r = -kx$

2010. 09. 22.

Energia disszipáció = energia elnyelődés



$h_1 > h_2$

$mgh_1 = mgh_2 + E_{disszipáció}$

A súrlódási erő és súrlódási hő:

A súrlódási hő a csúszó súrlódási erő hatására jön létre a mechanikában.
Fordított folyamat problematikus, ezért csúszási súrlódási erőt disszipatívnak nevezzük.

Belső (termikus) energia:

Az atomok és a molekulák rendezetlen mozgásával kapcsolatos mozgási- és helyzeti energia összege.

Hő:

Kizárólag hőmérséklet változás következtében, az egyik rendszerről a másik rendszerre átvitt termikus energia.

$$\Delta E = \underset{\uparrow \atop \text{súrlódási erő}}{S}\,\Delta x$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}_{\Delta K} = \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} F\,dr}_{W_F}$$

A teljesítmény

$$\Delta W = F\Delta r \quad \text{(elemi munkavégzés)}$$

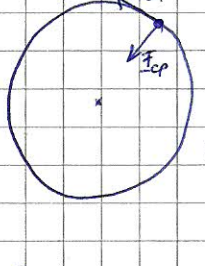
$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = F\frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (\Delta t \to 0)$$

$$\downarrow$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{dr}{dt} = Fv$$

$$\boxed{P = F \cdot v}$$

$1W = 1\frac{J}{s}$



$F_{cp} \cdot v = 0$

$F_{cp} \perp v$

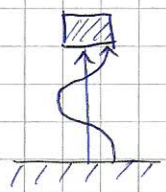
$(1 kWh = 1000 W \cdot 3600 s = 3\,600\,000 J)$

$P_{átl} = \dfrac{\text{munka}}{\text{időtartam}}$ (W)

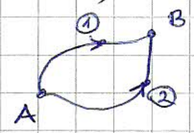
Hatásfok $\eta_{(\text{„éta"})} = \dfrac{\text{hasznos munka}}{\text{felhasznált energia}}$

Konzervatív erők és az energia megmaradás

1) Egy (~~Az~~) erőt konzervatívnak nevezzük, két pont közötti mozgás során az általa végzett munka csakis (~~csak~~) két pont helyzetétől függ, és független a pálya alakjától.



(gravitációs erő)



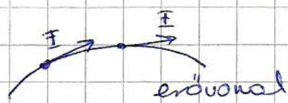
$$\int_{A}^{B} \underline{F}\, d\underline{s} = \Delta U$$

útfüggetlen

2) Egy erő konzervatív, ha tetszőleges zárt görbe(~~n~~) mentén végzett munka (~~során végzett mu~~) zérus.

$$\oint_{g} \underline{F}\, d\underline{s} = \emptyset$$

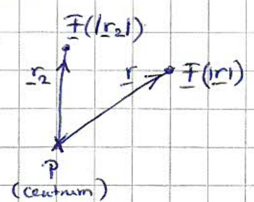
3) Örvénymentesség



Konzervatív erőknél nincsenek örvények.

1, 2, 3, definíció ekvivalensek.

Centrális erő a konzervatív erők egy nagy csoportja



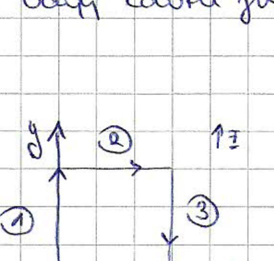
- gravitációs erő
- Coulomb erő (elektromos töltések közötti kölcsönhatás)
- 1D lineáris rugóerő (dimenzió)

Nem konzervatív erők

- csúszó súrlódási erő
- sebességtől vagy időtől függő erők.

---

pl.: $\underline{F} = \underline{k} \cdot x \cdot e_y$



$W_1 = W_2 = W_4 = \emptyset$

$\underline{F} = \emptyset$, $\underline{F} \sim \Delta x$

$\boxed{W_3 \neq 0}$

$\boxed{W = \int \underline{F}\, d\underline{s}}$

$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \neq 0 \rightarrow$ NEM KONZERVATÍV

Konzervatív erők és a potenciális energia

$$U(\underline{r}) - U(\underline{r}_0) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$ potenciális energia

(Fontos: potenciális energia csak konzervatív erő esetén értelmezhető)

$\boxed{1D}$

$$F(x)\Delta x = -\Delta U \longrightarrow F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \xrightarrow{(\Delta x \to \emptyset)}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad U_b - U_a = -\int_a^b F(x)\,dx}$$

$\boxed{2D, 3D}$

$$\boxed{F(r) = -\operatorname{grad} U(r) \qquad U_b - U_a = -\int_A^B \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}}$$

(Megjegyzés: $\operatorname{grad} U(r) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{k}\right)$ Descartes-KR.)

A mechanikai energia megmaradása

Konzervatív rendszerben a teljes mechanikai energia megmarad.

$$E = U + K$$ ← kinetikus energia

E: Teljes mechanikai energia; U: potenciális energia

Biz: Ha csak konzervatív erők hatnak

$$-\int_a^b \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = U_b(\underline{r}) - U_a(\underline{r})$$ potenciális energia megváltozás

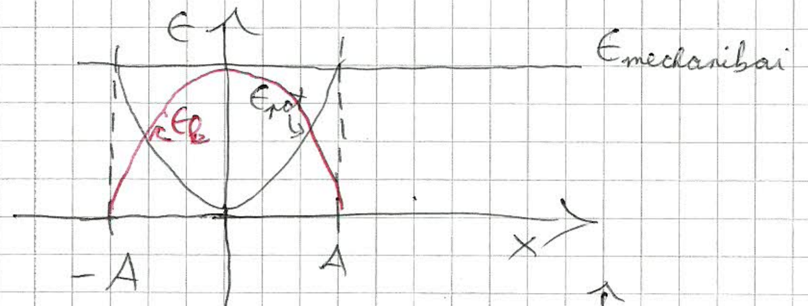
Munkatétel:

$$K_b - K_a = \int_a^b \underline{F}\, d\underline{r}$$ a kinetikus energia megváltozása

$$U_a - U_b = K_b - K_a \longrightarrow \boxed{U_a + K_a = U_b + K_b} = \text{áll.}$$

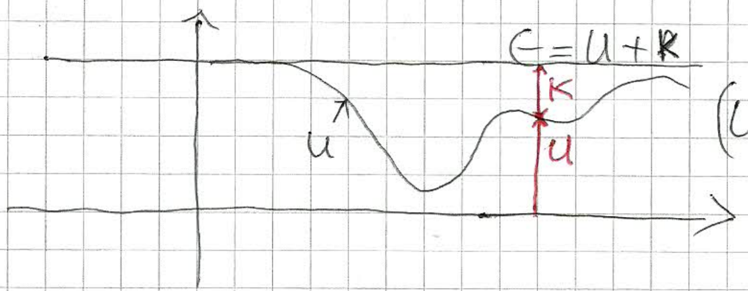
Előadás 2010.09.27.

energiadiagramok

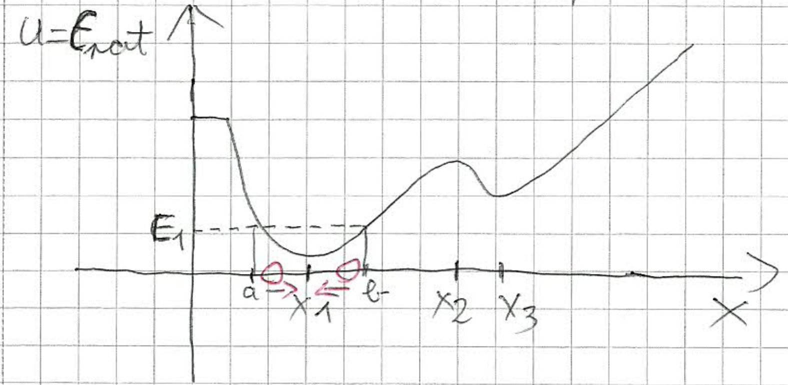


Pl: harm. rezg. mozg.

E_k = kinetikus
E_{pot} = potenciális



$(U = E_{pot})$



$$\underline{F} = -\operatorname{grad} U$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

x_1-ben (környékén) a tömegpont stabil helyzetű

Ha E_1 a tömegpont mechanikai energiája, akkor a részecske az $[a,b]$-ba van zárva.

x_2 pont labilis, instabil állapot

x_3 pont stabil pont (helyzet)

(Mj.: $-\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{k}\right) = \underline{F}$)

Centrális erő

Az anyagi pontra ható erőt centrálisnak nevezzük, ha az erő vektorának egyenese mindig egy meghatározott ponton, a centrumon megy keresztül.
Az erő nagysága tetszőleges lehet.

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \qquad / \underline{r}\times$$

$$\underline{r}\times\underline{F}$$

$$m\,\underline{r}\times\cdot\ddot{\underline{r}}$$

$r\times \neq r\cdot x$
$r\times = r$ kereszt
(??)

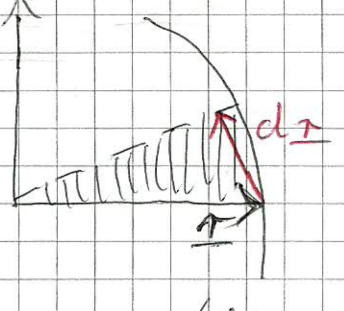
mivel $r \parallel F \rightarrow \underline{r}\times\underline{F} = \emptyset$

$$\frac{d}{dt}(\underline{r}\times\dot{\underline{r}}) = (\overset{=\emptyset}{\dot{\underline{r}}\times\dot{\underline{r}}}) + \underline{r}\times\ddot{\underline{r}} = \emptyset \Longrightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\underline{r}\times\dot{\underline{r}} = \text{áll}}}$$

($\underline{r}$ és $\dot{\underline{r}}$ által meghatározott sík normálisa)

$\underline{r}\times d\underline{r}$



$$\frac{1}{2}(\underline{r}\times\dot{\underline{r}})$$

Bármilyen centrális erő hatása esetén az anyagi pont felületi sebessége állandó, azaz a pálya síkgörbe és a rádiuszvektor egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.
(bolygómozgásnál ez Kepler II. törvénye)

Szűkebb értelemben vett centrális erő:

csak $|\underline{r}|$-től függ → konzervatív erő

$$\underline{F} = f(|\underline{r}|) \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} \rightarrow \text{van potenciál fv.} \rightarrow$$

$$\rightarrow V = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr$$

$$-\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r)$$

$$r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

Impulzus

$$\underline{I} = m \cdot \underline{v}$$

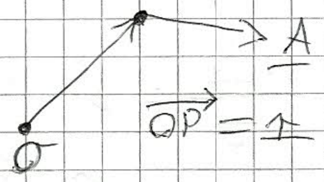
$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

$$\frac{d(m\dot{\underline{r}})}{dt} = \underline{F}$$

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} = \underline{F}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{I}}{dt} = \underline{F}}$$ Newton II. axiómája

---

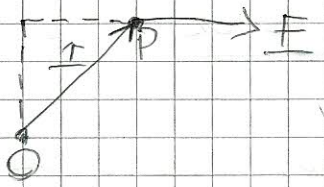


$\underline{A}$ vektornak az O pontra vett nyomatéka

$$\underline{r} \times \underline{A}$$

Az erő momentuma, nyomatéka

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$ forgatónyomaték



Impulzus momentuma, perdület

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{I} = \underline{r} \times m\,\dot{\underline{r}}$$

$$m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad / \,\underline{r} \times$$

$$m\,\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times m\dot{\underline{r}}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{r} \times \underline{F}}$$

Az impulzus momentum idő szerinti deriváltja a rá ható erők forgatónyomatékával egyenlő. Ez az anyagi pont impulzusmomentum tétele.

centrális erőknél

$$\underline{r} \times \underline{F} = 0 \rightarrow \frac{d\underline{N}}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\underline{N} = \text{áll}}$$

A tömegpontra ható eredő forgatónyomaték nulla az impulzusmomentum állandó.
Ez az imp. mom. megmaradásának (perdület megmaradásának) tétele.

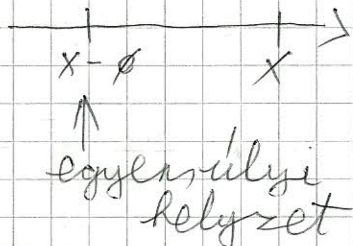
Szabadrezgések

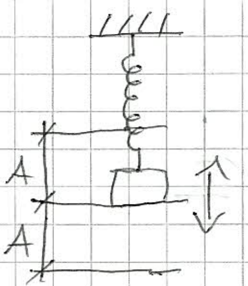
Harmonikus rezgések (1 Dimenzió)

$$m\ddot{x} = -Dx$$

tömeg (m)

rugóállandó (D)





Egy tömegpont harm. rezg. mozgást végez, ha a rá ható erők eredője arányos az egyensúlyi helyzettől való kitéréssel és ellentétes irányú annak mozgásával.

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Dx = 0$$

$\omega_0^2 := \frac{D}{m}$

$\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

$x = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{i\omega_0 t}$

általános matematikai mo.

$\Downarrow$

valós fv. kell fizikailag

pl: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$

A = amplitúdó

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ = saját körfrekvencia

$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0 t + \alpha$ = fázis

$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -v_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$

$V_m = A\omega_0$

sebesség amplitúdó

$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x$

$a_m = A\omega_0^2$ gyorsulás amplitúdó

kezdeti feltétel: $(x_0; v_0)$ vagy $(x_0; a_0)$ vagy $(v_0; a_0)$

peremfeltétel:

$t_1 \quad x(t_1) = x_1;$

$t_2 \quad x(t_2) = x_2;$

konzervatív rugóerő

$$-Dx = F$$

$$E_{pot} = -\int F\,dx = -\int_{0}^{x} -Dx = \frac{Dx^2}{2} = \frac{DA^2}{2}\cdot\cos^2(\omega_0 t+\alpha)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t+\alpha)$$

$$\text{áll} = E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t+\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \underbrace{(\sin^2() + \cos^2())}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=\frac{D}{m}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} D A^2}} = \text{áll}$$

Fizika e.a. (Hétfő este) juhééé...

2010.10.04.

Csillapodó rezgések

sebességgel arányos csillapítás!

$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$ mozgásegyenlet

Harmonikus erőn kívül mindig fellép a sebességgel ellentétes súrlódási erő. Tapasztalat szerint a súrlódási erő nagysága kis sebességnél a sebességgel, nagyobb sebességeknél a sebesség négyzetével vehető arányosnak.

$x(t)$

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$$

$$\beta := \frac{k}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} \longrightarrow \ddot{x} + 3\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 3\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

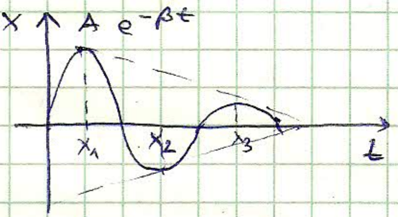
A β nagyságától függően 3 különböző eset van

(1) $\beta < \omega_0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$, ahol $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ $\quad (i = \sqrt{-1})$

Ekkor általánosan: $x = e^{-\beta t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$

$\Downarrow$ fizi

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$



Ezt csillapított rezgésnek nevezzük, de nem periodikus folyamat.

Két egymás utáni maximális kitérés (~~értékei~~ viszonya):

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \dots = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \text{áll}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$K = \frac{x_n}{x_{n+2}} = \frac{x(t_n)}{x(t_n+T)} = \frac{Ae^{-\beta t_n}\cos(\omega t_n + \alpha)}{Ae^{-\beta(t_n+T)}\cos(\omega(t_n+T)+\alpha)}$$

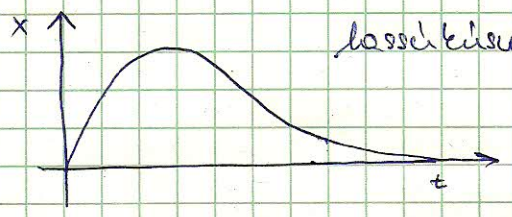
$K = e^{\beta T}$ csillapítási hányados

nagy lambda

$\Lambda = \ln K = \beta T$ logaritmikus dekrementum

(2.) $\beta > \omega_0$, súrlódás nagy; aperiodikus mozgás

$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$; λ_1, λ_2 valósak és negatívak



(3.) $\beta = \omega_0$; aperiodikus határeset

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$ kétszeres gyök

Ekkor diff. egyenletek elméletéből:

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + c_2 t)$$

$(e^{-\beta t} ; t e^{-\beta t})$

$\boxed{pl.}$: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0 \rightarrow c_1 = 0$

$$\dot{x} = \left(e^{-\beta t}(-\beta)t + e^{-\beta t}\right) c_2 \rightarrow c_2 = v_0$$

$$\boxed{x(t) = v_0 t e^{-\beta t}}$$

Kényszerrezgések, rezonancia

Tegyük fel, hogy az anyagi pontra az x irányban harmonikus erő, sebességgel arányos súrlódási erő és egy periodikus gerjesztő erő hat.

$F = F_0 \cdot \cos\omega t$ gerjesztő erő

A mozgásegyenlet $m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \cos\omega t$

$$\omega_0^2 := \frac{D}{m} ; \ \beta = \frac{k}{2m} ; \ f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \rightarrow (f_0 \exp(i\omega t)$$

A komplex amplitúdó módszerét használjuk az időben stacionárius ~~(stacionárius)~~ állapot megadására.

Próba függvény: $x = A \exp[i(\omega t + \alpha)] = \hat{A} \exp i\omega t$

Az $\hat{A}$ és α nem a kezdő feltételektől függ, hanem az állandósult állapotra jellemző.

A próba függvény behelyettesítésével

$$-\omega^2 \hat{A}\ \exp i\omega t + i 2 \cdot \beta \cdot \omega \hat{A}\ \exp i\omega t + \omega_\phi^2 \hat{A}\ \exp i\omega t =$$
$$= f_\phi \exp(i\omega t)$$

$$-\omega^2 \hat{A} + i\, 2\beta\, \omega \hat{A} + \omega_\phi^2 \hat{A} = f_\phi$$

$$\hat{A} = \frac{f_\phi}{\omega_\phi^2 - \omega^2 + i 2\beta\omega} = f_\phi \frac{\omega_\phi^2 - \omega^2 - i 2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$|\hat{A}|^2 = \hat{A}\ \hat{A}^* = f_\phi^2 \frac{(\omega_\phi^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{\left((\omega_\phi^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right)^2} = \frac{f_\phi^2}{(\omega_\phi^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}$$

$$A = \frac{f_\phi}{\sqrt{(\omega_\phi^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}$$

$\omega \to \phi$, akkor $\dfrac{f_\phi}{\omega_\phi^2} = \dfrac{F_\phi}{m\omega_\phi^2} = \dfrac{F_\phi}{D}$

$$\omega_\phi^2 = \frac{D}{m}$$

$$\omega \to \infty \quad \to A = \phi$$

Ha $\omega_\phi >> \beta \quad \to \quad \omega_{max} \approx \omega_\phi$

(~~[illegible]~~)

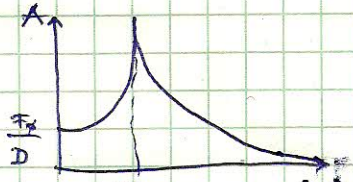
ω_{max} kb ω_ϕ ez a rezonancia jelensége, amikor a gerjesztő frekvencia megegyezik a rezgő képes rendszer frekvenciájával

$$tg\, \vartheta = \frac{Im\, \hat{A}}{Re\, \hat{A}} = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \to \quad \vartheta \in [\phi; -\pi]$$

Ha ω kicsi $\to \vartheta \approx \phi$

Ha $\omega >> \omega_\phi \quad \to \quad \vartheta = -\pi$

$\omega - \omega_0 \quad \to \quad \vartheta = \frac{-\pi}{2}$



$$\frac{dA}{d\omega} = \phi \to \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Ha $\omega_0 >> \beta^2 \to \omega_{max} \approx \omega_\phi$

2010.10.06.

• A pontrendszerek mechanikája

A pontrendszerek és a rá ható erők:

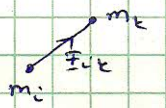
A pontrendszer mozgásegyenletei

$$m_i \ddot{r}_i = \tilde{F}_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n$$

Ha ismerjük az $\tilde{F}_i$ különböző erőket, (~~akkor~~) minden tömegpont esetén, akkor meghatározható az egyes tömegpontok helyvektora, sebessége, gyorsulása. Ez egyfajta ~~á~~ atomisztikus felépítés.

$\tilde{F}_i$ felbontható külső és belső erőkre

$$\tilde{F}_i = \underbrace{F_i}_{\text{külső erő}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} F_{ik}}_{\text{belső erők}}$$



A külső erőket általában adottnak tételezzük fel, a belső erőket sok esetben nem ismerjük. Ezekre általában azt tesszük fel, hogy <u>centrális erők</u>.

Így a pontmechanika alapegyenletei a következők

a) A Newton-féle mozgásegyenletek

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} F_{ik}$$

b) Az akció reakció elve alapján a belső erőkre

$$F_{ik} = -F_{ki}$$

c) A belső erők centrális erők, vagyis F_{ik} az m_i és m_k tömegű pontokat összekötő egyenes irányába esik. Ez alapfeltevés.

Az a, b, c, pontok alapján levezethető a pontrendszerek mechanikájának három általános tétele
- a tömegközéppont tétel
- impulzus momentum tétel
- energia tétele.

Szabadrendszer: A tömeg pontjait mozgásukban semmi nem korlátozza
pl.: égitestek.
(~~[illegible]~~)

Nem szabad vagy kötött rendszer: A pontok koordinátái és ezek változásai között mellék feltételek vagy kényszer feltételek vannak. Kötött pontrendszernél fellépő erőket két csoportba osztjuk – kényszer v. reakció erők (pl.: vályúban mozog a test)
– szabad erők (pl.: gravitációs / fizikai eredetűek /)

Az impulzus- v. tömegközéppont tétel

A pontrendszer n számú egyenletének összeadásával

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \underline{F}_{ik}}_{=\emptyset}$$

A b) pont alapján (akció-reakció elve)

$$\underline{F}_{ik} + \underline{F}_{ki} = \emptyset \qquad i \neq k$$

Minden pontpár mindkét irányú kölcsönhatása pontosan egyszer van figyelembe véve, mert $\emptyset$-val egyenlő

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum \underline{F}_i = \underline{F}$$

külső erők eredője

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \underline{v}_i = \frac{d}{dt} \sum \underline{I}_i = \frac{d\underline{I}}{dt}$$

$\underline{I}_i$: i-edik tömegpont impulzusa

$\underline{I}$: a pontrendszer teljes impulzusa

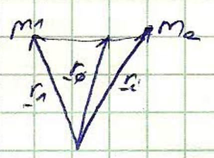
$$\boxed{\frac{d\underline{I}}{dt} = \underline{F}}$$

Impulzus tétel

Az anyagi pontrendszer teljes impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők eredőjével.

A pontrendszer tömegközéppontja

$$\underline{r}_\emptyset = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{m}$$



$$\underline{r}_\emptyset = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

kétszer deriváljuk idő szerint

$$\frac{\sum m_i \underline{r}_i}{m} = \underline{r}_\emptyset \qquad / \frac{d^2}{dt^2} \,;\, \cdot m$$

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = m \ddot{\underline{r}}_\emptyset \rightarrow$$

$\rightarrow$ $\boxed{m \ddot{\underline{r}}_\emptyset = \underline{F}}$ Tömegközéppont tétel: Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog mintha az egész rendszer tömege a tömegközéppontban lenne ~~(össze)~~ egyesítve és az összes külső erők eredője erre a pontra hat.

$$\left(\text{Súlypont}: \quad \frac{\sum_i G_i \underline{r}_i}{\sum_i G_i} = r_{\text{súlypont}} \right)$$

Homogén gravitációs erőtér:

$$G_i = m_i g \longrightarrow \underline{r}_s \equiv \underline{r}_\phi$$

Ha inhomogén a grav. erőtér:

$$G_i = m_i g_i \longrightarrow \underline{r}_s \neq \underline{r}_\phi$$

Speciális eset: Ha rendszerre külső erők nem hatnak (zárt rendszer) vagy ha a külső erők eredője zérus akkor a rendszer teljes impulzusa állandó, azaz tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van. Ez a teljes impulzus megmaradásának törvénye.

Az impulzusmomentum tétele
(perdület, impulzus nyomaték)

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{i\neq k} \underline{F}_{ik} \qquad / \ \underline{r}_i \times \leftarrow \text{keresztszorzás}$$

és adjuk össze $i = 1 \ldots n$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} \quad = \emptyset$$

A bal oldal így írható

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i, \text{ mert } = \underbrace{\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i}_{\emptyset} + \sum_i m_i \underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i$$

$$\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \emptyset$$

$$\sum_i m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum \underline{r}_i \times m_i \dot{\underline{r}}_i$$

$\underline{r}_i \times m \dot{\underline{r}}_i = \underline{r}_i \times m \underline{v}_i = \underline{r}_i \times \underline{I}_i$, az i-edik tömegpont
impulzus nyomatéka
perdület
impulzusmomentum

$$\underline{N}_i := \underline{r}_i \times \underline{I}_i$$

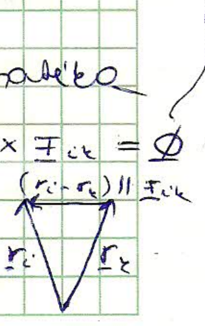
$$\underline{N} = \sum \underline{N}_i = \sum m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i$$

$\underline{M} = \sum \underline{M}_i = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i$, a külső erők forgatónyomatéka

---

$$\underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} + \underline{r}_k \times \underline{F}_{ki} = \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} - \underline{r}_k \times \underline{F}_{ik} = (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \times \underline{F}_{ik} = \emptyset$$

$$\underline{F}_{ik} = -\underline{F}_{ki}$$
(b) pont alapján)



$\underline{F}_{ik} \parallel (\underline{r}_i - \underline{r}_k)$
c) pont alapján centrális erő

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}}$$ Impulzusmomentum tétele

A pontrendszer teljes impulzusmomentumának az idő szerinti deriváltja egyenlő az összes külső erő forgatónyomatékának eredőjével ha a belső erők centrális erők. (Mérések alapján a belső erők valóban centrális erők)

Speciális: Ha a rendszerre külső erők nem hatnak vagy ha külső erők forgatónyomatékának eredője zérus akkor a rendszer teljes impulzusmomentuma állandó. Ez a teljes impulzusmomentum megmaradásának tétele.

$\boxed{\text{2010. 10. 11. Hétfő}}$

Az energia tétel

$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \tilde{\underline{F}}_i$ mozgás egyenlet

$\dot{\underline{r}}_i$-vel megszorozzuk, és az így kapott egyenleteket összeadjuk

$\sum m_i \dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum \tilde{\underline{F}}_i \dot{\underline{r}}_i$; $\tilde{\underline{F}}_i$ az m_i tömegű pontra ható (összes) tehát külső és belső erők eredője

(*) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\underline{r}}_i^2\right) = \frac{\sum \tilde{\underline{F}}_i \cdot d\underline{r}_i}{dt}$

(megj.: $\underline{r}_i(t)$

Legyen $d'A := \sum \tilde{\underline{F}}_i \, d\underline{r}_i$, a rendszerre ható erők elemi munkája

Legyen $T := \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2$, a rendszer teljes mozgási energiája

(*) $\frac{dT}{dt} = \frac{d'A}{dt}$

(*) kifejezést integráljuk $t_1 - t_2$-ig

$\boxed{T_2 - T_1 = A}$ („A" a külső erők munkavégzése)

A rendszer kinetikai energiájának megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erők (külső és belső, szabad és kényszer erők) munkájával.

(Fontos: itt (energia tétel) a belső erők is szerepelnek!)

Konzervatív rendszerek

Ha valamennyi F_i szabad erő és komponensei kifejezhetők a csak helytől függő egyértékű ún. potenciál függvény segítségével.

m_i $\quad F_i(F_{xi}; F_{yi}; F_{zi})$ $\quad r_i(x_i, y_i, z_i)$

$$F_{xi} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$
$$F_{yi} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \qquad V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 \ldots x_n, y_n, z_n)$$
$$F_{zi} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

/ A kényszerítésekről nincsen szó! /

$$\underset{\text{szabad}}{d'A_{sz}} = \underbrace{\sum F_i\, dr_i}_{\text{a szabad erők elemi munkája}} = \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}dz_i\right) =$$
$$= -dV$$

teljes differenciál

(Megj.: $dr_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$)

$$\sum{}^{1}A_{sz} = \int_{1}^{2} \sum F_i\, dr_i = -\int_{1}^{2} dV = -(V_2 - V_1)$$

konzervatív rendszer

(2) végállapot

(1) kezdeti állapot

$$\underset{\text{energia tétel}}{T_2 - T_1} = {}^{1}A_{sz} = \underset{\text{konzervatív rendszer esetén}}{-(V_2 - V_1)} \longrightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_2 = \text{áll}$$

$\forall$ (1), (2) esetén

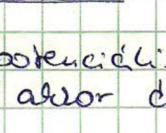
A mechanikai energi~~(tétel)~~ megmaradásának tétele:

Konzervatív szabad rendszer kinetikus és potenciális energiájának összege állandó (kötött rendszernél a tétel akkor áll fenn, ha kényszererők munkája ϕ.)

Ütközések

Két vagy több egymáshoz képest mozgó test érintkezésbe lép egymással.

- Anyagi pontok, ill. forgást nem végző golyók.
- jellemző:
  - τ ütközési idő rövid
  - F ütközési erő nagy



$$m\dot{v} = F \longrightarrow mv - mv_0 = \underbrace{\int_0^{\tau} F\, dt}_{\text{erőimpulzus, erőlökés}} = \underset{\text{impulzus}}{\Delta p}$$

impulzus változás

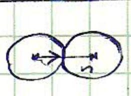
Megfogalmazás: adva vannak az m_i tömegpontok erőlökései, és sebességei ütközés előtt

(2) → ütközés után mi van sebességekkel

Két tömegpont ütközése (golyók)

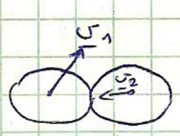
Centrális ütközés: Az érintkezési pontban a két felület közös normálisa az $\underline{n}$ ütközési normális egybe esik.

$\underline{n}$



Egyenes ütközés: A $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ hatásvonala egybe esik

Ferde ütközés: v_1 nem párhuzamos v_2



Két szabad anyagi pontra: $m_1, m_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ (ütközés előtt),

$\underline{v}_1', \underline{v}_2'$

Mivel az ütközési erők belső erők, ezért a tömegközéppont vagy impulzus tétel alapján $m_1 \underline{v}_1' + m_2 \underline{v}_2' = m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2$ (impulzus megmaradás T.) A teljes impulzus momentum tétele is fenn áll, de nem ad új egyenletet.

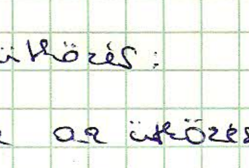
a) Tökéletesen rugalmas ütközés, amely után a rendszer mozgási energiája megmarad

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

b) Tökéletesen rugalmatlan ütközés:

A két test sebesség komponense az ütközési normális irányába az ütközés után ugyan az.

$$\underline{v}_{1n}' = \underline{v}_{2n}'$$



c) Valóságos ütközés

Méréseknél:

$$\varepsilon = \frac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{2n} - v_{1n}}$$

Ez közelítőleg független a sebességtől

ütközési paraméter

$\varepsilon = 1$ tökéletes rugalmas

$\varepsilon = 0$ tökéletesen rugalmatlan

Acélgolyó $\varepsilon = 0,6$

Elefántcsontgolyó $\varepsilon = 0,9$

Egyenes ütközés

(1) $m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$

(2) $v_1' - v_2' = \varepsilon (v_2 - v_1)$

$$v_1' = \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1+\varepsilon) m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{(1+\varepsilon) m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Néhány példa

- $m_2 = \infty$ és $v_2 = \emptyset \rightarrow v_1' = -\varepsilon v_1$
- $\varepsilon = 1$, $m_1 = m_2$, $v_1' = v_2$; $v_2' = v_1$
- $\varepsilon = \emptyset$ $\quad v_1' = v_2' = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

MEGJ.

A mozgási energia csökkenése

$$\Delta T = \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

2010. 10. 18.

Rakéták és mesterséges égitestek mozgása

Rakéta: üzemanyag elég → gázok áramlanak ki →

→ reakció erő ébred

(K)-ban, inerciarendszer

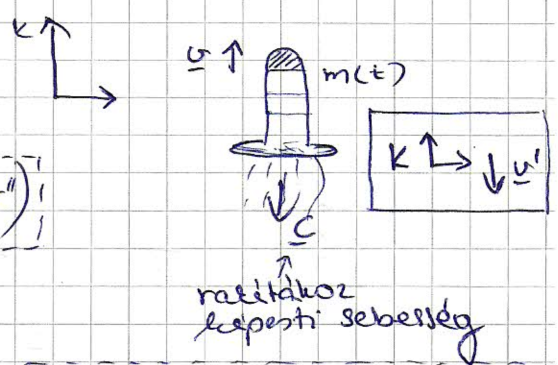
$m = m(t)$

$\underline{v} = \underline{v}(t)$ rakéta sebessége

$\mu = -\dfrac{dm}{dt}$

Áramoljon ki, $\mu dt = -dm$ gáz a rakétához viszonyítva $\underline{c}$ sebességgel; a K-hoz képest:

$\underline{v} + \underline{c} = \underline{v}'$ a gáz sebessége a K inerciarendszerhez



Tehát a rakétára és a kiáramló gázra:

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} - \frac{dm}{dt}\underline{v}' = \underline{F} \quad (\text{„tömegpontrendszer"})$$

$$\cancel{\frac{dm}{dt}\underline{v}} + m\frac{d\underline{v}}{dt} - \cancel{\frac{dm}{dt}\underline{v}} - \frac{dm}{dt}\underline{c} = \underline{F}$$

$$m\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F} + \frac{dm}{dt}\underline{c}$$

$\underline{F}$: külső erő : nehézségi erő + légellenállás

$\mu = -\dfrac{dm}{dt}$ időegység alatt kiáramló gáz

Speciális eset :

Egyenes vonalú mozgás

$t = 0,\ v = 0,\ m_0,\ c = \text{áll.}$

$F = 0,\ F_z = F,\ v_z = v,\ v_z' = v'$

$c_z = -c$

z

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt}c$$

Ha $F = \emptyset$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}c \rightarrow dv = -c\frac{dm}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow v(t) = -c\int_{m_0}^{m(t)}\frac{dm}{m} = c\ln\frac{m_0}{m(t)}$$

$$\boxed{v_{max} = c\ln\frac{m_0}{m_{végső}}}$$ (Ciolkovszkij 1898)

pl.: $c = 2{,}5\,\frac{km}{s}$; $\frac{m_0}{m_{végső}} \cong 5 \rightarrow v_{max} \approx 4\,\frac{km}{s}$

> 1. kozmikus seb.
> 7,8 km/s
> 2. kozmikus seb
> 11,2 km/s

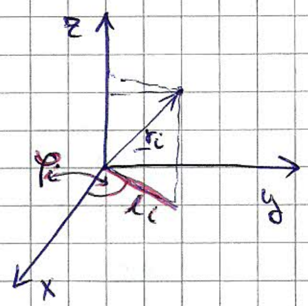
Ajánlott bevezetői:
- Fizessy Géza: Fizika I/I gyak
- Füstöss László: Hőtan
- Papp Zsolt: Mechanika

Merevtestek dinamikája

$(x_i, y_i, z_i) \rightarrow (l_i, \varphi_i, z_i)$

l „el", φ „fí", z „zé"

Descartes KR — Henger KR



$\varphi = \varphi(t)$

$x = l\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$

$y = l\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$

$$(\underline{r}\times\underline{\dot{r}})_z = x\dot{y} - y\dot{x} = \cancel{l\dot{l}\cos\varphi\sin\varphi} + l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} - (\cancel{l\dot{l}\cos\varphi\sin\varphi} - l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}) =$$

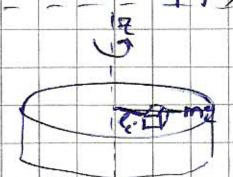
$$= l^2\dot{\varphi}$$

A „z" tengely körüli forgásnál (síkmozgás)

$$N = N_z = \sum m_i l_i^2\dot{\varphi}_i = \Theta\omega, \text{ ahol } \underline{\underline{\Theta := \sum m_i l_i^2}}$$

perdület

tehetetlenségi nyomaték



$\varphi_i = \varphi \;\; \forall$-re

$\Downarrow$

$\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi} =: \omega$

Általában merev testre

(1.) $m\ddot{\underline{r}}_s = \sum_i \underline{F}_i$ (Tömegközéppont tétel)

(2.) $\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$ (Impulzus tétel)

Szabadsági fokok = 3 transzlációs (a tömegközéppontra) + 3 forgási = = 6

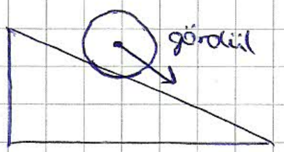
(2') $$\frac{d}{dt}\sum_i(\underline{r}_i + m\dot{\underline{r}}_i) = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

Forgás rögzített tengely körül

$\Theta := \sum_i m_i l_i^2$ $\qquad \varphi,\ \omega,\ \dot{\omega} = \beta \leftarrow$ szöggyorsulás

$$\boxed{(1)\quad \Theta\dot{\omega} = M_z}$$

Síkmozgás:



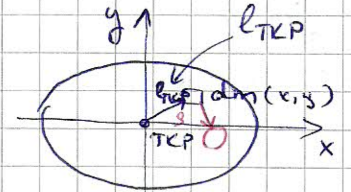
szabadsági fokok száma

$f = 1 + 2 = 3$ (1: forgás, 2: transzláció)

$m\ddot{\underline{r}}_s = \underline{F}$ (x és y komponensek)
$\Theta\dot{\omega} = M_z$

• Steiner-tétel

$\Theta_{TKP} = \int l_{TKP}^2\, dm$



$$\Theta = \int (x-s)^2 + y^2\, dm = \int x^2 + y^2\, dm + s^2\int dm - 2s\int x\, dm$$

$\int x\, dm = 0$ mert $\underline{r}_{TKP}(0,0)$, $= x_{TKP}$

$l^2 = (x-s)^2 + y^2$

$l_{TKP}^2 = x^2 + y^2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Theta = \Theta_{TKP} + ms^2}$$ Steiner-tétel

2010. 10. 20.

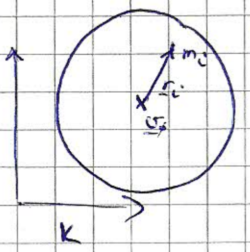
Merev test kinetikai energiája

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_\phi^2 \underbrace{\sum m_i}_{m} + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega \times r_i)^2 + v_0 \sum m_i (\omega \times r_i)$$

vagy origó, vagy ϕ ...

($\phi \equiv$ TKP)

0



$$v_i = v_\phi + \omega \times r_i$$

szögsebesség vektor

$$T_{Transzlációs} = \frac{1}{2} m v_\phi^2$$ transzlációs energia

$$T_{rotáció} = \frac{1}{2}\sum m_i (\omega \times r_i)^2$$ forgási vagy rotációs mozgási energia

$$T_{kölcsönhatási} = v_\phi \sum m_i (\omega \times r_i) =$$ kölcsönhatási mozgási energia

$$= v_\phi \left(\omega \times \sum m_i r_i\right) = m v_\phi (\omega \times r_{TKP})$$

$$r_{TKP} = \frac{\sum m_i r_i}{m}$$

Ha az „0" vonatkoztatási pont a test tömegközéppontja akkor $r_{TKP} = 0$ miatt $T_{kölcs} = \phi$.

Ha test egy pontja rögzített $\rightarrow v_\phi = 0 \rightarrow T_{transz} = T_{kölcs} = \phi$.

A forgási energia

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega \times r_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2\right]$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - 2\Theta_{zx}\omega_z\omega_x$$, ahol

$\Theta_{xx} = \sum_i m_i (y_i + z_i)^2$, $\Theta_{xy} = \sum m_i x_i y_i$

tehetetlenségi nyomaték — deviációs nyomaték

Tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm \; ; \quad \Theta_{yy} = \int (z^2 + x^2)\, dm \; ; \quad \Theta_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Deviációs nyomatékok:

$$\Theta_{xy} = \int xy\, dm \; ; \quad \Theta_{yz} = \int yz\, dm \; ; \quad \Theta_{zx} = \int zx\, dm$$

Tehetetlenségi tenzor (szimmetrikus)

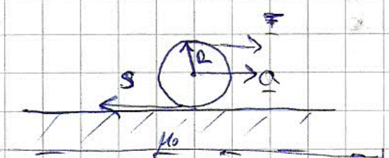
$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_{yy} & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \underline{\omega}' \underline{\underline{\Theta}} \underline{\omega} \; !$$

$$\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}} \underline{\omega} \quad \left(\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M} \right)$$

(„0" rögzített TKP-ra vonatkoztatva)

Füzessy / 217



(1) $ma = F - S$ (TKP tétel)

(2) $\dfrac{d(\Theta\omega)}{dt} = FR + SR$ (Perdület tétel)

Tiszta gördülés: $v = r\omega \rightarrow a = R \cdot \varepsilon$, ahol ε szöggyorsulás

epszilon

(3) $a = R\varepsilon$ (kinetikai feltétel)

M.o. (2') $\Theta\varepsilon = FR + SR$ $\left(\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon \right)$

$\Downarrow$

(1), (2), (3)

$\Downarrow$

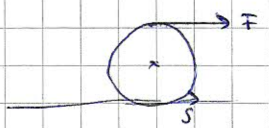
$$\varepsilon = \frac{2FR}{\Theta_{TKP} + mR^2}, \quad a = R\varepsilon = \frac{2FR^2}{\Theta_{TKP} + mR^2}$$

$$S = F \frac{\Theta_{TKP} - mR^2}{\Theta_{TKP} + mR^2}$$

Homogén henger esete:

$$\Theta_{TKP} = \frac{1}{2} mR^2, \quad \varepsilon = \frac{4}{3} \frac{F}{mR}, \quad a = \frac{4}{3} F/m$$

$$S = -\frac{F}{3}$$



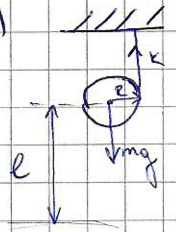
A tiszta gördülés feltétele

$$S = \frac{1}{3} F \leq mg\mu_0$$

$$\Downarrow$$

$$F \leq 3mg\mu_0$$

$\boxed{221}$



m, R

(1) $ma = mg - K$ (TKP tétel)

(2) $\Theta\varepsilon = RK$

$$\Delta x = R\Delta\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = v = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

(3) $\boxed{a = R\varepsilon}$ (kinematikus feltétel)

→ a) $\varepsilon = \dfrac{mgR}{mR^2 + \Theta_{TKP}}$; $a = R\varepsilon = \dfrac{mgR^2}{mR^2 + \Theta_{TKP}}$

$$K = \frac{\Theta_{TKP}}{mR^2 + \Theta_{TKP}} \cdot mg$$

Henger esetén: $\Theta_{TKP} = \frac{1}{2} mR^2$; $\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$; $a = \frac{2}{3} g$

$$\underline{K = \frac{1}{3} mg}$$

b) $v = ?$ l-lel lejjebb kerül

Mechanikai energia megmaradása

$$mgl = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\Theta_{TKP}\omega^2 \; ; \; v = R\omega \rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

Henger

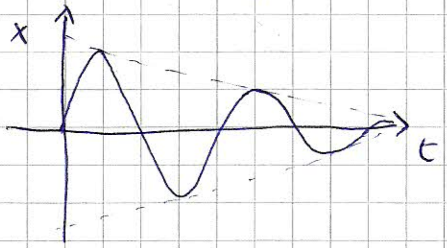
$$\Theta_{TKP} = \frac{1}{2} mR^2 \rightarrow mgl = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} mR^2 \frac{v^2}{R^2}$$

$$gl = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^2 = \frac{3}{4} v^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\frac{4gl}{3}} = v$$

Csillapodó rezgés, periodikus eset:



$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$\beta = \frac{k}{2m}$$

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{D}{m} - \beta^2$$

pl: $t = 3T$ alatt az amplitúdó $1/6$-ra csökken

$$(2) \quad e^{-3T} = \frac{1}{6}$$