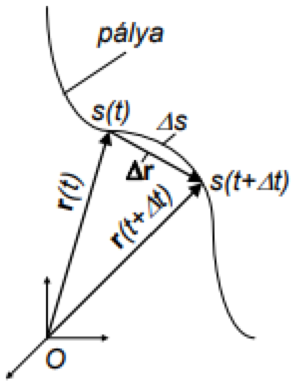
1. tétel

Tömegpont mozgásának kinematikai leírása

Haz ezt az ábrát tudod értelmezni, meg is vagy:



A kinematika alapmennyiségei

Elmozdulás (**r**): hol van épp a test.

Sebesség (**v**): milyen gyorsan és merre változik a test elmozdulása.

Gyorsulás (**a**): milyen gyorsan és merre változik a test sebessége.

A kinematikai mennyiségek általános összefüggései

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{v}(t) \xrightarrow{\textit{integrálás}} \mathbf{r}(t)$$

Ennek ellentéte pedig a deriválás.

2. tétel

Tömegpont mozgásának dinamikai leírása

Egyszerűen azt vizsgáljuk, hogy a test miért mozog úgy, ahogy, és ezt a különböző erőkre vezetjük vissza.

Erő

Vegyünk egy hatást, ami mozgat egy tömeget. Tegyünk a kettő közé egy rugót. Amennyire megnyúlik a rugó, az a hatás “mértéke”, ezt olyan módon vezessük vissza a hatásra, hogy a rugó kikerüljön a képletből, ekkor kaptuk meg a hatás erejét. Az erő jele **F**, mint force, és vektormennyiség.

Tömeg

A tömeg írja le, hogy egy test mennyire áll ellen a rá ható erőknek. Minél nagyobb a tömeg, annál nagyobb erőt kell kifejteni, hogy ugyanúgy gyorsuljon. A tömeg jele m, mint mass.

Newton II. törvénye

Alapból csak annyit tudtunk, hogy ha erőt fejtünk ki egy testre, akkor azzal az erővel arányosan gyorsul, de minden testnél más volt, hogy mennyi erőt kellett kifejteni ugyanahhoz a gyorsuláshoz. Ezért bevezettünk egy arányszámot, az erő és a gyorsulás hányadosát elneveztük tehetetlen tömegnek. Ez átrendezve $F = m * a$, azaz Newton II. törvénye.

Newton IV. törvénye

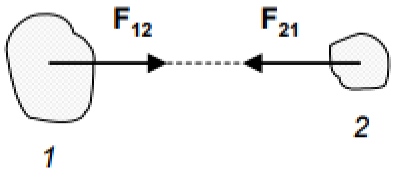
Ha több erő hat egy testre, azok egyszerűen összeadódnak. Ezt hívjuk eredő erőnek, és mivel a test tömege ugyanaz, nem egy beható erőtől függ, ezért a gyorsulásokat a II. törvényből szintén összeadjuk, és egy vektorként (vagy képletként, ha úgy van megadva) össze lehet adni.

A mozgásegyenlet

A mozgásegyenlet Newton II. törvényének neve, $F = m * a$-t jelent. Azért egyenlet, mert a gyorsulást bárhogy felírhatjuk, így az egész képlet időben érvényes: lehet rezgőmozgás is, ami szinuszon alapszik, vagy bármilyen komplex képlet is, egy a lényeg: mindent leír a mozgásról. Ha integráljuk, sebesség lesz, ha pedig a sebességet integráljuk, még az elmozdulást is megkapjuk.

3. tétel

Newton III. törvénye



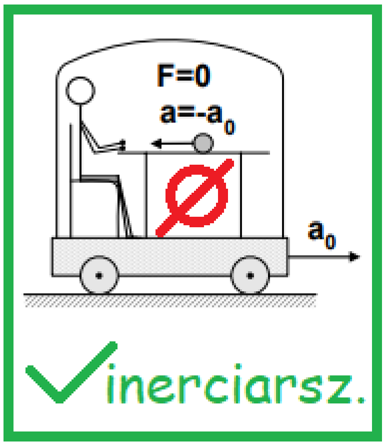
Minden erőre létezik azonos irányú, de ugyanolyan mértékű ellenerő. Tehát ha test 1 hat test 2-re F_{12}-vel, akkor $F_{12} = -F_{21}$.

Mozgásmennyiség (impulzus)

Egy test impulzusa a tömegének és sebességének szorzata, vagyis hogy milyen súllyal szerepel egy kölcsönhatásban: $p = m * v$. Newton III. törvényéből levezethető, hogy két test közti kölcsönhatásban a két test impulzusának összege állandó: $m_1 * v_1 + m_2 * v_2$ =áll.

Az inerciarendszer fogalma

Viszonyítási rendszer. Olyan középpont, amihez képest a történéseket le lehet úgy írni, hogy Newton törvényei érvényben vannak. Elvileg a Föld se lehetne az, mert forog és kering, de elhanyagoljuk a hibákat az itteni mérésekben, és inerciarendszernek vesszük, olyan kicsik ezek a hibák.



Newton I. törvénye

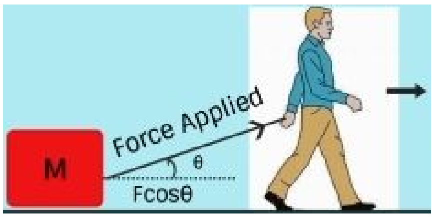
Azt írja le, hogy az inerciarendszerek léteznek. Ha egy testet egy inerciarendszerben nem ér erő, vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (sebessége, iránya, gyorsulása nem változik). Ezt hívjuk a tehetetlenség törvényének.

Tehetetlenségi erők

Olyan erő, ami egy rendszerben minden testre hat, még a nyugalomban lévőkre is. Ez megszegné Newton I. törvényét, ezért ha ilyet tapasztalunk, akkor a rendszer rosszul lett megválasztva. Például ha egy mozgó autót veszünk rendszernek, kanyarodáskor minden tárgy repül benne balra-jobbra, vagyis tehetetlen testek mozgása változott meg. Ha nem tudnánk, hogy az autó egy inerciarendszerben mozog, és ezért hatnak az erők, csak magát az autót ismernénk belülről, azt hihetnénk, hogy Newton I. törvénye megdőlt, pedig nem, csak a rendszer rossz.

4. tétel

A munka fogalma



A mozgásegyenlet megoldása az, hogy mikor és hol vagyunk, tehát eljutunk belőle **r**-ig. Ehhez természetesen $F = m * a$-ból tudnunk kell mindent: a gyorsulás függvényét, a tömeget, és kifejteni az erőt. Most megtanuljuk kifejteni az erőt, de előbb a munkát kell bevezetni. Munkát (W, mint work) akkor végzünk, ha az erő bármilyen mozgást okoz a testben. Előjeles mennyiség, mert a munka okozhat olyat, hogy a test megy előre, és lassítja, tehát ellene dolgozik. Ha a mozgás merőleges, azért nem végzünk munkát, mert képzeld el, hogy egy mozgó autót oldalról meglöksz, amitől az nyilván nem fog elkanyarodni, tehát nem csináltál semmi hatásosat.

A munka az, amikor erő befektetésével mozgásra bírunk egy tömegpontot. Egyenes vonalon ez $W =$**F*****r** vagy $W = F * s * cos(\alpha)$, ahol α az, hogy mekkora szögben hat az erő. Az első képlet bármilyen úton működik, a munka az, ha összegezzük (integráljuk) a teljes megtett útra, hogy melyik pontokon milyen erő milyen mozgást váltott ki.

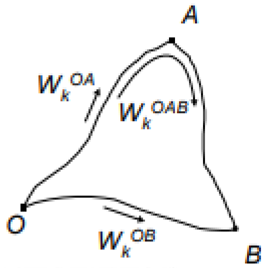
Munkatétel, mozgási energia

A mozgási energia, vagyis $E_m = \frac{1}{2} * m * v^2$ írja le a megváltozott munkavégző képességet, ugyanis munkával gyorsítottuk a testet, tehát $W_e = \Delta E_m$, a tömegpontra ható eredő erő munkája a mozgási energia megváltozásával egyenlő.

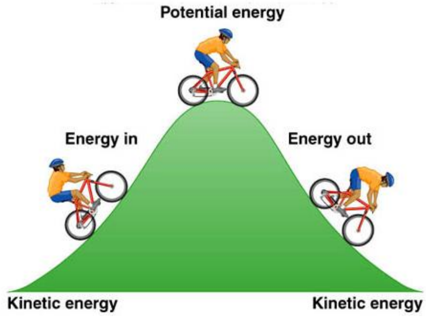
Röviden ismételve: ha gyorsítunk egy testet, adunk neki energiát, ezt láttuk, hogy attól függ, mekkora sebességre is gyorsítottuk fel. Ha lelassítjuk, a folyamat során ez az energia visszanyerhető. Korábban beláttuk, hogy annyi munkát végeztünk rajt, amennyivel a mozgási energiáját megváltoztattuk.

5. tétel

A konzervatív erőtér fogalma

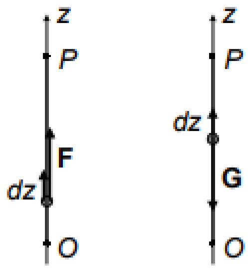


Ahol csak az elmozdulás kezdeti- és végpontja számít a munkavégzésben, ott az energia nem vész el, csak átalakul, ezt hívjuk konzervatív erőtérnek. Például ha kimozdítunk valamit a gravitáció vonzásából, mondjuk felemeljük a talajról a Földön (adunk neki potenciális energiát), azt a gravitáció általi konzervatív erőtér visszahúzza (mozgási energiává alakul a potenciális energiája).



Helyzeti energia

$E_h = m * g * h$, vagyis a tömeg, a gravitációs erő, és egy vonatkoztatási ponttól (pl. talajtól) számított magasság mondja meg, hogy mennyi energia alakulhat mozgássá, avagy mennyi a helyzeti/potenciális energia.



A bal oldali ábrán egy tömeget állandó sebességgel emeltünk, tehát a sebesség nem változott, így erő se ment bele a rendszerbe. Tudjuk Newton törvényeiből, hogy az a mozgás megváltoztatásához, gyorsuláshoz kellene csak. Ettől még a gravitációt le kell győzni, ami munka: a gravitáció $m * g$ erőt fejt ki 1 méteren, amit a h (height) magassággal is szorzunk, mert mint tanultuk, a munka távolság függvénye. Mivel lefelé húzná a testet, ezért a gravitáció munkája negatív előjelet kap, amivel pedig mi ellensúlyozzuk, és ami miatt lehetséges az emelés, tehát a gravitációval ellentétesen áll, az pozitív.

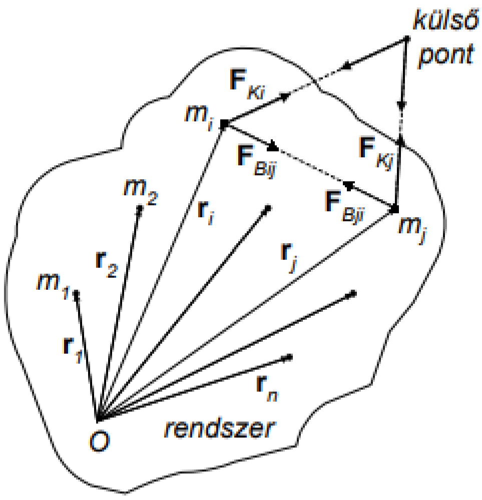
Az energiamegmaradás tétele tömegpontra

Egy tömegpont energiája a helyzeti és a mozgási közt vándorolhat csak át, összegük mindig állandó: $E = E_h + E_m$. Az állandóságot úgy jelöljük, hogy valami nem változik, tehát $\Delta E = 0$.

6. tétel

A merev test fogalma

A merev test olyan kiterjedt test, amely nem deformálható, tehát két tetszőleges pontja közötti távolság nem változik.



A merev test, mint pontrendszer

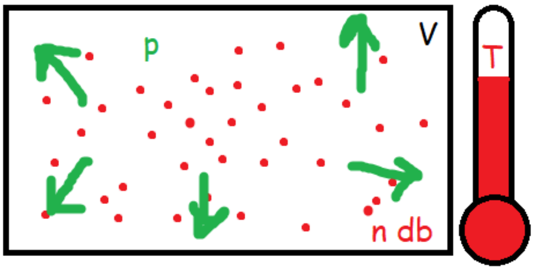
Nyomatéka a tehetetlenségi nyomaték változása: $M_Z = \frac{d(\theta\omega)}{dt}$. Ezen kívül a pontrendszerről lehet érdemes beszélni, hogy tömegpontként kezelhető, és a tömegpont mozgásegyenleteivel dolgozunk.

7. tétel

A hőmérséklet fogalma (átírni)

A hőmérséklet egysége az olvadó jég és forró víz esetében a nyomás és térfogat szorzatának változásának százada. A Celsius-skála a két végletet 0 és 100 foknak hívja, a Kelvin-skála pedig az abszolút nulla hőmérséklettől indul, 273.15 fokkal a 0 Celsius alól.

Az ideális gáz állapotegyenlete



$p * V = n * R * T$

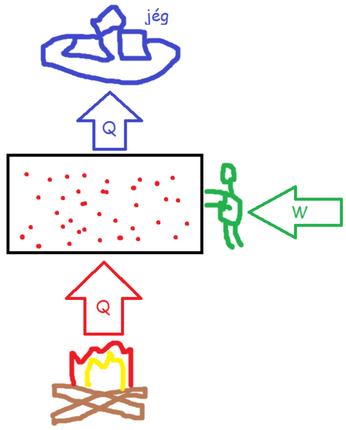
- p: pressure, nyomás
- V: volume, térfogat
- n: number, atomok száma
- R: egyetemes gázállandó
- T: temperature, hőmérséklet

Ez az ideális gáz állapotai közti összefüggést határozza meg. Ideális gáz az, ami csak ettől függ, és rengeteg más tényezőt elhanyagolunk.

8. tétel

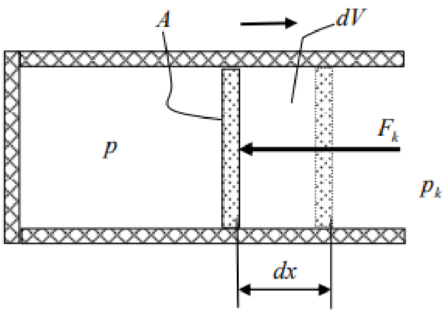
Belső energia és hő

A hő jele Q, a hőközlés mennyiségét jelenti, mértékegysége Joule. Egy adiabatikus rendszer, tehát ami a környezetével nem tud hőt cserélni, rendelkezik energiával. Minél nagyobb a hőmérséklete, annál több energiával. Ez a belső tulajdonságainak függvénye, azoké, amiket az állapotegyenletben felsoroltunk (kivéve nyilván R-t, az egy átváltó konstans). Fogjuk fel egyfajta potenciális energiaként: minél nagyobb, annál több munkát tud végezni, például egy meleg légtömeg felemel egy hőlégballont, egy hideg már nem.



A makroszkopikus munkavégzés fajtái

Térfogati munka: mechanikus kölcsönhatás gázra: azonos nyomás mellett a térfogat csökkentéséhez munkát kell befektetni a külvilág felől. Elektrosztatikus kölcsönhatásnál ugyanez más betűkkel: potenciál marad, töltések változnak, ettől függ a munka. Anyagi kölcsönhatás is ilyen, kémiai potenciál fix, anyagmennyiség változik, ettől függ a munka.



A hőtan I. főtétele

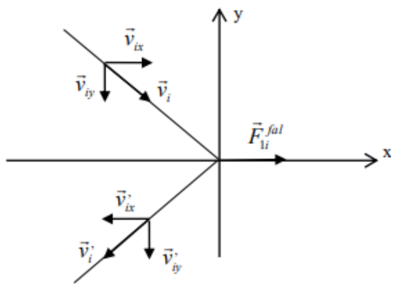
$dU = \delta Q + \delta W$, tehát az energiája egy zárt rendszernek csak akkor változhat meg, ha hőt vesz fel vagy ad le, vagy munkát végez vagy végzünk rajta. Tehát elsőfajú örökmozgó gép (amit ha beindítunk, örökké menni fog) nem létezhet. Olyan előfordulhat, hogy a hőből munka lesz, és az energia nem változik, de ha csak magában áll a rendszer, akkor az összeg 0.

9. tétel

A kinetikus gázelmélet alapjai

A kinetikus gázelmélet a gázmolekulák mozgásával és ütközésével foglalkozik. Először írjuk le, mit értünk a molekulák alatt, ugyanis kell néhány egyszerűsítés: átmérőjük elhanyagolható (tehát pontszerűek), és nem fejtenek ki vonzó/taszító erőt az edény falával. Nincs kitüntetett irány, amerre a molekulák haladnak, éppen ezért véletlenszerű sebességgel képzeljük el őket. Ha egy sebesség véletlenszerű, akkor az átlaga 0. Ha egy sebesség átlaga 0, akkor minden térbeli tengelyen is 0: $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$. Azért bontjuk fel, mert minden mozgás egyszerűbben kezelhető független tengelyenként, egyszerre egy-egy dimenzióban. Nézzük meg, mi a helyzet, ha négyzetátlagot számolunk: itt már nem nulla lesz az átlag, mert a nulla átlag azt jelenti, hogy ugyanannyi a negatív számok összege, mint a pozitívaké. Mivel minden szám négyzete pozitív, ezért a négyzetátlag pozitív lesz. A sebesség egy háromdimenziós vektor, felírhatjuk a komponenseire (összetevőire) a Pitagorasz-tételt: $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$. Tudjuk, hogy az átlagok egyenlők, tehát a négyzetük is egyenlő. Egyszerűen összeadtunk 3 ugyanolyan számot, tehát beláthatjuk, hogy ezek igazából a sebesség négyzetátlagának harmadai: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$.

Az ideális gáz nyomása



A kinetikus gázelmélet szerint a nyomást a molekulák fallal való ütközéséből származó erő adja. Nézzünk egy ilyen ütközést olyan síkon, ahol csak két tengellyel kell foglalkoznunk. A molekula v_{ix} sebességgel halad a falra merőleges tengelyen (tehát a fal felé), és v_{iy} sebességgel halad vele párhuzamosan. Mivel tengelyenként számolható a mozgás, belátható, hogy a fallal párhuzamos sebesség változatlan. A merőleges ütközés tökéletesen rugalmas (az ütközés előtti és utáni energia azonos), ezért egyszerűen ellentétes irányba, azonos sebességgel pattan vissza a részecske, tehát $v'_{ix} = -v_{ix}$. Mivel energia nem veszik el, ellentétes irányú, de azonos sebességgel távozik a faltól a molekula. Ehhez az kell, hogy kétszeres sebességgel ellentétes irányba gyorsuljon, ugye az elsőt kivonva lesz nulla, a másodikat kivonva pedig azonos irányú: $a = -2 * v_{ix}$. Tudjuk, hogy $F = m * a$, de a molekula tömegét μ-vel jelöljük, ezért minden behelyettesítve $F = -2 * \mu * v_x$. Ez a molekulára ható erő, a falra ellentétes előjelű, mert tudjuk, hogy az ellenerő azonos. Mivel az erő nem azonnal megy végbe, hanem adott idő alatt, ezért azt figyelembe véve a falra ható erő $\Delta F = \frac{2*\mu*v_x}{\Delta t}$. A nyomásról mondtuk, hogy a felületre vetített erő, tehát $\Delta F/\Delta A$ formában lenne rá szükség. Ezt behelyettesítve az áll elő, hogy $p = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{3} * \frac{N}{V} * \mu * v^2$. Az értelmezése: $\frac{1}{3}v^2$ a korábban levezetett egyenlőség miatt lett az egyetlen tengely helyett, N darab molekula oszlik el V térfogaton (ez a felületre vonatkozó rész), a többi pedig az erő.

10. tétel

A hőmérséklet kinetikai értelmezése

Ehhez a tételhez nyugodtan mondd fel a 9-est is röviden.

Egy ideális gáz melegítésekor az energiaváltozás csak a molekulák sebességében nyilvánul meg. Kicsit alakítsuk át a nyomás képletét: $p = \frac{2}{3} * \frac{N}{V} * \overline{\varepsilon_m}$. Itt annyi történt, hogy $\overline{\varepsilon_m}$ alá kivittük az $\frac{1}{2} * \mu * v^2$ tagot, ez lett egy molekula átlagos kinetikus energiája. Itt felhasználva, hogy $p * V = n * R * T$, hőmérsékletre is átrendezhetjük a tagot. Első lépésben $p = \frac{1}{V} nRT$, és ha ezt a p-t behelyettesítjük az előző képletbe, majd átrendezzük, akkor lesz belőle, hogy $T = \frac{2}{3} * \frac{N}{n * R} * \overline{\varepsilon_m}$. Az Avogadro-szám $(N_a * n = N)$ és Boltzmann-állandó $(k = \frac{R}{N_A})$ bevezetésével az lesz, hogy $T = \frac{2}{3} * \frac{\overline{\varepsilon_m}}{k}$. Ezzel matematikailag bizonyított, hogy a hőmérséklet az átlagos mozgási energiával, így az átlagos sebességgel arányos.

Át lehet úgy rendezni a képletet, hogy egy molekula átlagos sebességét megkapjuk:

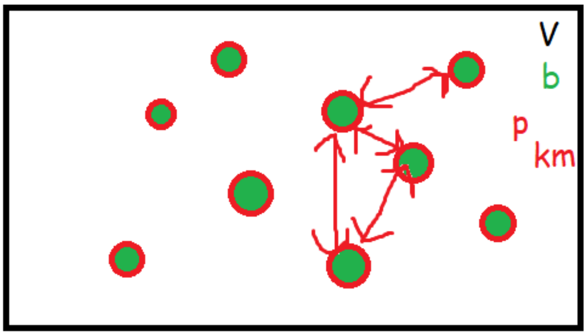
$$c = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{\mu}}$$

.

11. tétel

Valódi gázok, a Van der Waals-féle állapotegyenlet

Ehhez a tételhez nyugodtan mesélj arról is, hogy mi az ideális gáz állapotegyenlete, mert abból indulunk ki.



Azzal egyszerűsítettünk a gázelmélet elején, hogy a gázmolekulák nem hatnak egymásra gravitációs vonzással, és pontszerűek, tehát térfogatuk nincs.

Először foglalkozzunk a térfogattal, az a könnyebb. Kísérleti úton meghatározva minden molekulához tudunk egy b értéket. Ez egyszerűen egy molekula térfogata. Ha n molekulánk van, az $n * b$ térfogatot foglal el, tehát ennyivel kevesebb lesz a kitöltött tér térfogata. Helyettesítsük tehát be az eddigi V helyére, hogy $V_M - n * b$, ahol V_M a maximális térfogat, vagyis ami az edényben lenne, ha nincs ott a gáz.

A molekulák egymásra ható vonzása miatt a nyomás a valóságban kisebb, mint ami az ideális gázok képletében van. Ezért be kell vezetni egy korrekciót, ami kárpótol az így lecsökkent nyomásért, és akkor tudjuk, hogy ha a gáz ideális lenne, mennyi lenne a nyomása, és számolhatunk tovább az állapotegyenlettel. Két molekula egymást egy a betűvel megadott kohéziós erővel tartja vissza, ami fordítottan arányos a térfogat négyzetével, így egy párra az $\frac{a}{V^2}$ hányados jelenti a korrekciót. Mivel minden molekula hat mindre, tehát n molekula n másikra, ezért négyzetesen szorozza ezt a tagot, és a korrigált nyomás az lesz, hogy $p + n^2\frac{a}{V^2}$. Így tehát a valós gáz állapotegyenlete ez lesz:

$(p + n^2\frac{a}{V^2})(V_M - n * b) = n * R * T$, ahol az új dolgok:

- a: a kohéziós (összetartó) erőkből eredő nyomáscsillapítás (korrekció) mértéke
- b: kísérleti úton megállapítva egy molekula térfogata

Úgy könnyű megjegyezni, hogy p és V behelyettesítését külön-külön értelmezed.

12. tétel

Homogén rendszerek hőkapacitása, fajhői és belső energiája

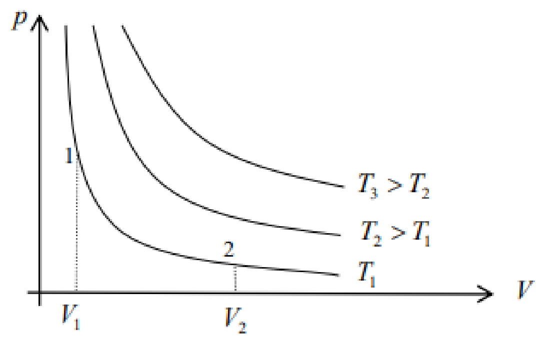
$K = \frac{\delta Q}{dT}$, Q a közölt hő, T a hőmérséklet, tehát a hőkapacitás azt jelenti, hogy mennyi hőt kell egy rendszernek adni, hogy a hőmérséklete 1 fokkal emelkedjen. Fajhő az, hogy ez hogyan oszlik meg a tömeg egységei közt, a $K = c * m$ képletből jön ki c-ként, és a kilónkénti hőkapacitást adja meg.

Belső energia: $\overline{\varepsilon}_m = \frac{f}{2} * k * T$, ahol $k = n * R$ és f a szabadsági fokok száma. Lényegében azt mondja el, hogy a belső energia, ami a hőmérséklettel arányos, szabadsági fokonként egyenletesen oszlik el.

13. tétel

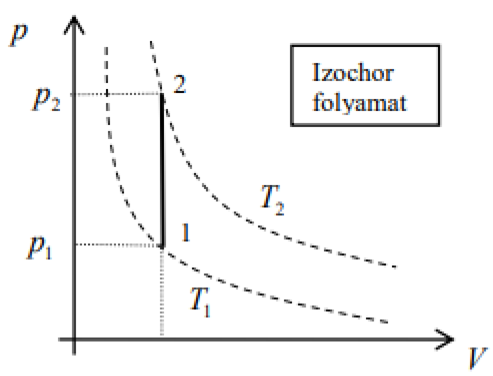
Ideális gáz állapotváltozásai

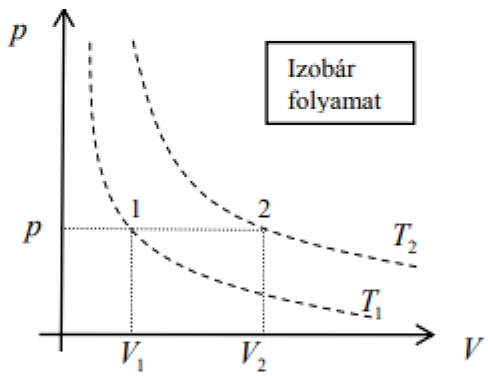
Izoterm: hőmérséklet változatlan, a nyomás és térfogat aránya változik. Belső energia nem változik, a rendszeren végzett munka hőleadással jár: $Q = \; - W$.



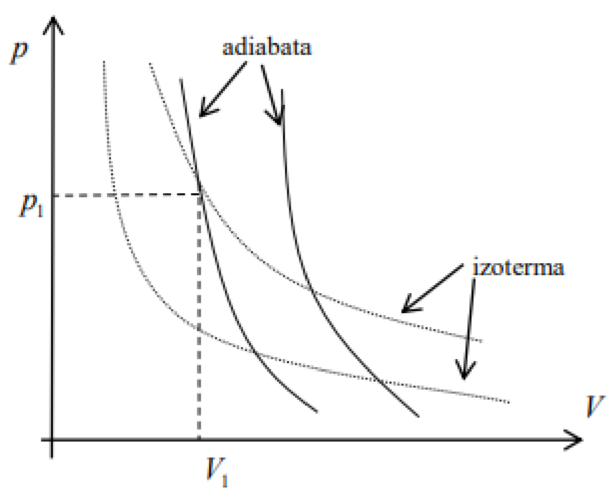
Izochor: térfogat változatlan, a nyomás, és így a hőmérséklet is változik. Mivel $dV = 0$, nincs munka, az energiát csak hőátadás (Q) változtatja.

Izobár: nyomás változatlan, a térfogat, és így a hőmérséklet is változik, mint izochornál: $W = \; - pdV$.





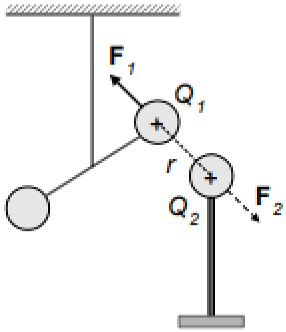
Adiabatikus: nincs hőátadás a környezettel, tehát $Q = 0$, így $dU - pdV = 0$.



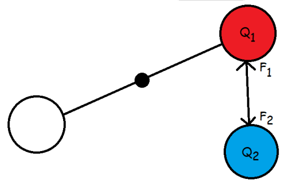
14. tétel

Az elektrosztatikus kölcsönhatás

Az elektrosztatika az, ami nyugvó elektromos töltések erőhatásait vizsgálják. Ellentétes töltésű testek vonzzák, azonos töltésűek taszítják egymást.



Kicsit értelmezzük újra az ábrát: nem felfelé mozdul el a Q_1 gömb a súlyzó egyik oldalán, hanem vízszintesen körbe. A Q_2 is egy síkban van vele, az alsó ábra a felülnézeti. A közepén rögzíti a szál, és ha egy szálat megtekerünk, az visszatekeredik magától. Egyensúly beállta után ebből ki tudjuk számolni, hogy pontosan mekkora erő téríti ki az ingán a súlyzót. A berendezésen változtatható a töltés mérete és helyzete.



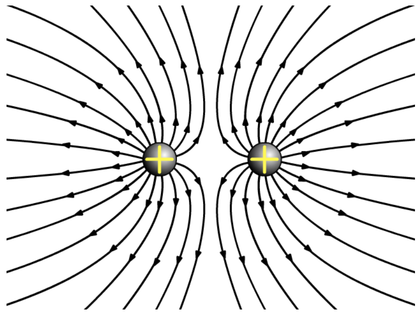
A Coulomb-törvény

Az elektrosztatikus kölcsönhatás hasonlít a gravitációshoz: $\mathbf{F}_{21}=\frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0}*\frac{Q_1*Q_2}{r_{12}^2}\mathbf{u}_{12}$, ahol $\mathbf{F}_{21}$ a második töltésből az első felé mutató erővektor, ε_0 egy arányszám, Q_1, Q_2 a két töltés nagysága, nevezőjükben a távolságuk négyzete áll, $\mathbf{u}_{12}$ pedig irányt ad az erőnek, egy egységnyi hosszú vektor, ami az első töltésből a második felé mutat. Látható, hogy a vonzás és taszítás a két töltés közt a töltések előjelétől függ.

Ez a törvény akkor érvényes, ha a közegben nem gátolja semmi az elektromos kölcsönhatást, tehát vákuum van. Alapesetben a levegő is kicsit befolyásolja a kölcsönhatást, de nem jelentős mértékben.

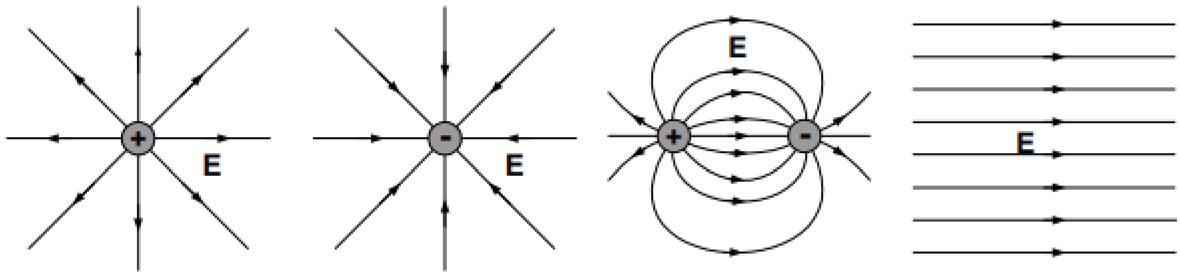
15. tétel

Az elektromos tér



Elektromos töltés(ek csoportja) körül mindig fel tudjuk rajzolni, hogy az adott pontban merre és mekkora erővel mutat az elektromos erővektor. Ezeknek az összességét hívjuk elektromos térnek. Rövid definíció: olyan közeg, ami elektromos töltések hatását egymásra kényszeríti.

Az ábrán az erőtér látható, ahová alkalmanként beszúrunk egy pozitív q ponttöltést, amit a szintén pozitív Q töltés kilök. Mivel megmozdul q, amire más erőnek nem kellene hatnia, ezért igazoltuk, hogy van erőtér. Példák elektromos terekre:



a) b) c) d)

a) pozitív töltés tere
b) negatív töltés tere
c) elektromos dipólus
d) párhuzamos elektromos tér

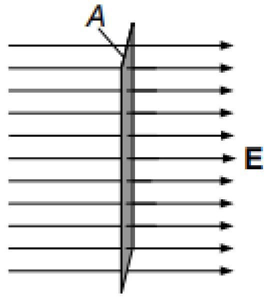
Minél sűrűbben vannak a térerősségvonalak, annál nagyobb ott a térerősség.

Az elektromos térerősség

Az elektromos tér egy adott pontján kifejtett erő: **F**= q ***E**. Ez csak a Coulomb-törvényből kiemelve az egyik töltés q-val jelölve. Ez úgy működik, hogy vesszük a Coulomb-törvényt, ahol az egyik töltés q lesz, vagyis $\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q * Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12}$, ezt a q-t kiemeltük, a maradékot elneveztük **E**-nek. Az **E**-t nevezzük térerősségnek, szokás erre rendezni. A szuperpozíció miatt több töltés térerőssége a tér egy pontján összeadható, elvégre az is egyfajta erő. A térerősséget mérni tudjuk egy ponton, de az összetevőit megállapítani már nem. Ha egyszer összeadtunk sok számot, egyetlen számból nem tudjuk megmondani, mik az összetevők.

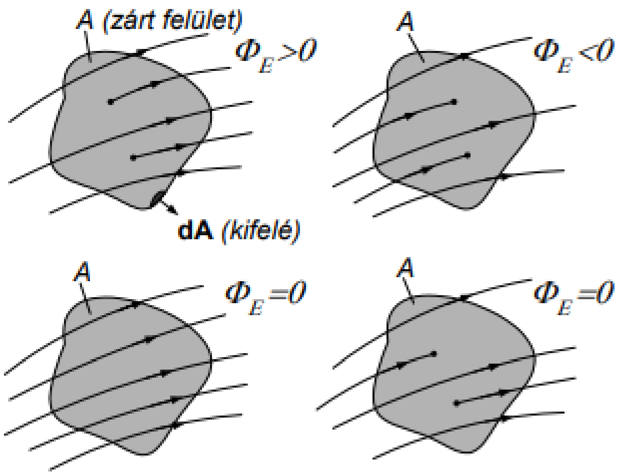
16. tétel

Az elektromos tér munkája, az elektromos potenciál



Elektromos fluxus: $\Phi_E^A = E * A$, tehát az, hogy egy A területű, bármilyen formájú lap felületén összesen mennyi erőssége halad át az elektromos térnek. Szabad felületen a fluxust úgy határozzuk meg, hogy $\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}$.

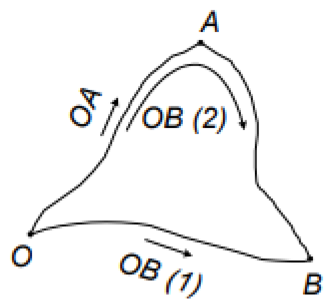
Erővonalak akkor kezdődnek vagy végződnek egy zárt felületen (testben), ha van benne töltés, különben amelyik erővonal bemegy, az ki is jön, tehát nullázódik. Ezt a következő ábra szemlélteti:



A potenciál $U_{op} = -\int_O^P \mathbf{E} d\mathbf{r}$, és azt írja le, hogy egy töltés potenciálisan mennyi munkát végezhet egy erőtérben két pont között.

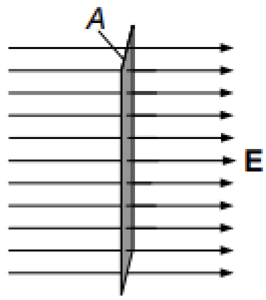
Az elektrosztatika I. alaptörvénye

Azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív, tehát ha megteszel egy bármilyen kört, a potenciál nem változik: $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$. Az ábra a jobb oldalon azt mutatja, hogy ha egyik pontból a másikba haladunk, végső soron ugyanannyit változik a potenciál. Ebből is látszik, hogy ha teszünk egy kört, akkor 0 lesz a változás, hiszen az olyan, mintha meg sem mozdultunk volna.



17. tétel

A fluxus

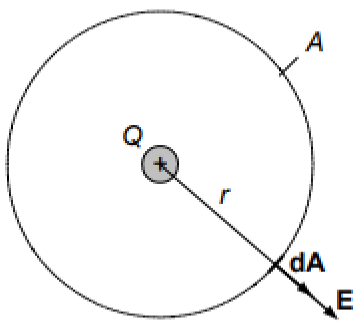


$\Phi_E^A = \int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}$, egy felületen áthaladó elektromos erővonalak energiáinak összessége. Lényegében a felület minden pontján összeadjuk, hogy ott mennyi az elektromos tér energiája. Síknál ez az integrál megoldva egyszerűen $E * A$, vagy ha valamilyen szögben áll, akkor $E * A * cos(\alpha)$, mert minél merőlegesebb az erővonal, annál kevésbé számít.

Az elektrosztatikus tér II. alaptörvénye

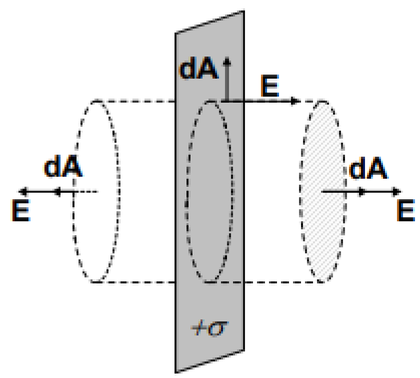
Arra vagyunk kíváncsiak, hogy zárt test fluxusa mi. Egy zárt test az, amiből nincs kifelé vezető út. Mivel minden töltés erővonalak forrása, a zárt testen belül található töltéseket csak össze kell adni, ennyivel járulnak hozzá az erőtérhez. A külsőket egyszerűen hagyjuk figyelmen kívül, mivel ami vonal bemegy egy zárt testbe, az ki is jön belőle. Ezek alapján $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$, ami kizárólag a belül található töltésektől függ.

Egyszerű geometriájú töltéselrendeződések elektromos terének számítása

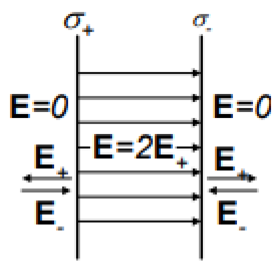


Ponttöltés elektromos tere: egyszerűen ugyanaz az integrál, mint a második alaptörvényben, mivel pont a ponttöltést befoglaló zárt testet vizsgáltuk.

Vezető gömb elektromos tere: a vezető gömb olyan gömb, amiben a töltések szabadon mozognak. Ettől a felületére kényszerülnek, mivel taszítják egymást, és így vannak legtávolabb. Egy vezető gömböt körülölelő gömbtest esetében a fluxus $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, amit már láthattunk korábban is, de ez csak akkor igaz, ha a zárt test, amin vizsgáljuk az elektromos teret, körbeöleli a vezető gömböt (pl. a felső ábrán vegyük Q-t a vezető gömbnek, és A-t a zárt testnek. Ha a vezető gömb nagyobb, akkor a fluxus 0, mivel a gömb belsejében nincs elektromos tér, a töltések tere kioltja egymást, mert mindennek van egy ellentétes irányú párja.



Síkkondenzátor elektromos tere: egy elektromosan töltött, végtelen kiterjedésű lap két oldalának elektromos terét nézzük. Mivel mindkét irányba ugyanolyan párhuzamos erőtere van, ezért a felülettel kétszer szorozzuk: $\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = 2 * E_+ * A$, ahol E_+ az egyik oldal elektromos erőtere. Ha két ilyen lapot veszünk, vagyis

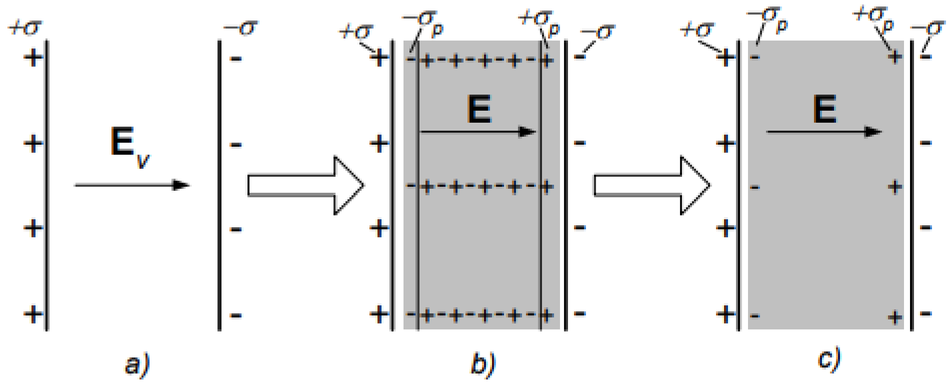


kondenzátort hozunk létre (alsó ábra), akkor a térerősség belül $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, ahol $\sigma = dQ/dA$.

18. tétel

Elektromos tér anyag jelenlétében

Ha anyagon elektromos tér megy át, a töltéseket az elektromos erőtér irányába állítja, vagyis azok rendeződnek. Toljunk be egy szigetelőt egy kondenzátor két fegyverzete közé:



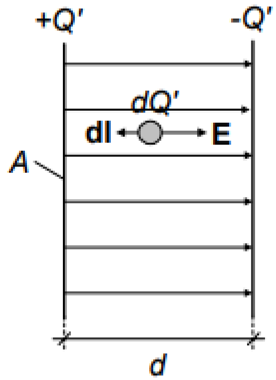
A töltések olyan módon rendeződnek kondenzátorba tolt hasábon, hogy -+-+-+... Ennek a közepén mind kiüti egymást, mintha ott se lennének, de a szélén marad szabad töltés. Ezeknek a mértéke σ_p, és mivel a mellettük lévő σ-k (ró, töltéssűrűségek) polaritásával a vonzás miatt ellentétesek, ezért picivel majd csökkenteni fogják az erőtér mértékét (összeadódnak). Adjuk össze egy fegyverzet töltését: $\sigma + (-\sigma_p) = \sigma - \sigma_p$. Mivel valójában a térerősség csökkent, látszik a szigetelő, tehát az elektromos erőteret csökkentő hatás.

A permittivitás

A relatív permittivitás megmondja, hogy az eredeti (E_v) térerősség hányszoros lenne, ha a szigetelő nem lenne ott. Ha leosztjuk ε_r-el bármelyik elektromos tér erősségét, azt kapjuk meg, hogy az adott szigetelőt beiktatva mekkorára csökken a térerősség: $E_v = \varepsilon_r * E$.

19. tétel

Az elektromos tér energiája



Vegyük át a kondenzátort: egy olyan áramköri elem, ami töltéseket képes tárolni. Két elektromosan töltött lapból áll, amiket egymással párhuzamosan állítunk. Egy ilyen lap neve fegyverzet. Az egyik fegyverzet pozitív, a másik negatív töltésű. A két lapon kívül az előjelek összeadódnak, így az elektromos erőtér 0 lesz, viszont a két lap közt egyesülnek, és az ábrán látható párhuzamos erőteret hoznak létre. A kondenzátornak van egy C kapacitása, ami azt mondja meg, hogy adott feszültségen mennyi töltést tud tárolni, ugyanis a feszültség tölti fel.

Ahhoz, hogy töltéseket halmozzunk fel, amitől például a kondenzátor tárolja az energiát, munkát kell végezni. Ellentétes előjelű töltéseket nem halmozhatunk fel, különben kioltanák egymást, így az első feladat azok szétbontása előjel szerint. Azonos előjelű töltések taszítják egymást, így ezeket szintén munkába kerül mozgatni. Emiatt a munka elektrosztatikus helyzeti energiát eredményez. Nézzünk egy konkrét példát a helyzeti energiára: egy kondenzátorban azt jelentené, hogy mennyi energia lenne, ha a töltések a negatív lapra vándorolnának.

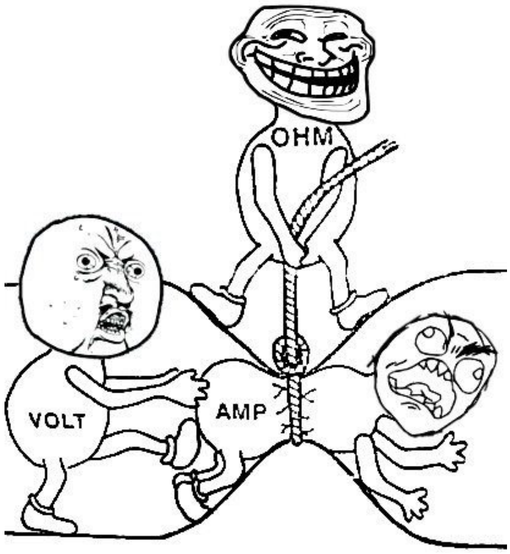
Úgy számíthatjuk ki a helyzeti energiát, hogy megnézzük, mennyi energiát vesz fel, míg a kondenzátor feltöltődik, vagyis minden töltés a pozitív lapra mozog a negatívról. Ez egy C kapacitású kondenzátornál $E_h = \frac{1}{2*C} * Q^2$. Hozzuk vissza a képletbe a térerősséget, amit Q-ból lehet, mert $Q = E * A * \varepsilon$. Korábbról E az erőtér, A a felület, és ε a permittivitás. Ebből lesz $E_h = \frac{1}{2} * \varepsilon * A * d * E^2$, ahol $A * d$ igazából a térfogat, szóval írjuk át V-re: $E_h = \frac{1}{2} * \varepsilon * V * E^2$. Ennek már egy térfogatra vonatkozó mértékét kell bevezetnünk (leosztani V-vel), ez lesz az energia térfogati sűrűsége: $w_e = \frac{1}{2} * \varepsilon * E^2$.

20. tétel

A stacionárius elektromos áram, áramerősség

Az áramerősség az időmennyiség alatt áthaladó töltés. Ha időben állandó, akkor az áram stacionárius.

Áramsűrűség



Az áramsűrűség egy adott keresztmetszetre, a teljes vezető anyag egy részére mondja meg, hogy mennyi áram folyik át rajt. Az áramerősség ezt azért nem adja meg, mert a teljes keresztmetszetre vonatkozik, az áramsűrűség pedig az áramerősség és a felület hányadosa: $j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$.

Ohm-törvény, elektromos ellenállás

Áramot okozó feszültség és áramerősség közt mérések szerint egyenes arányosság van. Ohm írta le, hogy adott vezető és adott körülmények közt az arányossági tényező állandó, tehát állandó módon ellenáll az áram folyásának. Ezt nevezzük ellenállásnak, a jele R, mértékegysége pedig Ω (Ohm). $U = I * R$, ebből U a feszültség, I az áramerősség, és R az ellenállás. Minden anyag valamilyen mértékben ellenáll a töltések folyásának, ezt számszerűsíti Ohm törvénye.

Joule törvény

Az elektromos áram miatti töltésmozgás hőtermeléssel jár, és a hőtani tételekkel levezethető, hogy $P = I * U$ teljesítmény alakul hővé egy időegység alatt. Adott időre jutó munkát írna le P, ami $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ alakban írható fel.

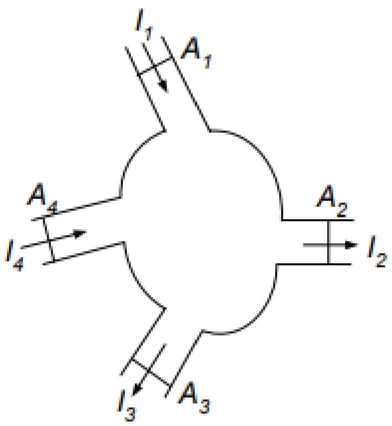
21. tétel

Az elektromos áramkörök leírása

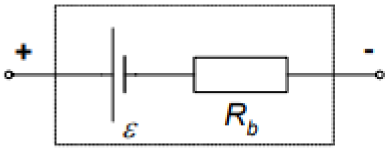
Áramkör az, ahol zárt hurokban haladnak az elektromos töltések. A zárt hurok azt jelenti, hogy valamilyen kört tesznek meg. Ez a hurok elágazhat, több kör is lehet egyben, a körök részei további körökre bomolhatnak, ilyenkor elektromos hálózatnak hívjuk. Példaként gondolj arra, hogy egy hosszabbítóba dugott minden eszköz 1-1 áramkör, de ettől még a hosszabbítóból indulnak, tehát vele együtt egy hálózatot alkotnak, mivel a hosszabbító is egy áramkör a fali aljzatból. Ahol az áramkör elágazik, azt csomópontnak hívják. Két csomópont közötti vezető szakaszok (ágak) tartalmazhatnak áramköri elemeket, például telepet (ez az aksi vagy elem fizikai neve), ellenállást, stb. Egy hálózat vizsgálatánál azt nézzük, hogy az áramerősség az ágak közt milyen törvények szerint oszlik meg, és hogy érvényes-e, illetve milyen módon érvényes az elektrosztatika I. alaptörvénye. Mi olyan áramkörökkel foglalkozunk, ahol az áramerősség időben nem változik meg, ezt hívjuk stacionárius áramnak.

A Kirchhoff-egyenletek

Kirchhoff I. egyenletét úgy hívjuk, hogy a töltésmegmaradás törvénye. Először azt vizsgáljuk, hogy ha egy vezetőben halad az áram, de például a vezető szűkül, változik-e az áramerősség. Felmerülhet, hogy ilyenkor a töltések felhalmozódnak a szűkülés miatt, nem férnek át, de ez nem fordul elő. A válasz az, hogy egy vezető minden pontján pontosan ugyanaz az áramerősség folyik, mert ami töltés megindul, az át is megy rajta végig. Töltésfelhalmozódás tehát nincs.



Elemezzük a jobb oldali ábrát: az 1-es és 4-es keresztmetszetű vezetőn érkezik áram, a 2-es és 3-as keresztmetszetűn távozik. Beláttuk, hogy töltés nem halmozódhat fel, ezért ami bejön, annak távoznia kell, tehát a bemenő és kimenő áramok összege egyenlő kell legyen, ennél a példánál épp $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$. Ha a csomópont szemszögéből írjuk fel, akkor igazából a kimenő áram negatív, tehát $I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$ lenne a pontos képlet. Így már általánosan is megfogalmazhatjuk: $\Sigma I = 0$, vagyis egy csomópontnak nem lehet áramerőssége, nem halmozódhat fel benne töltés, és ami befut, az távozik is.



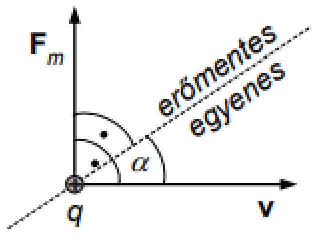
A II. egyenlet előtt először vegyük át, hogy működik a telep: azt tudjuk, hogy a köré épített áramkör valamilyen munkát végez. Viszont tudjuk az I. egyenlet miatt, hogy 0-ra kell kijönnünk, tehát a telep valami ellentétes munkát végez. A pozitív munka kint a - pólustól a + felé halad, belül ez fordítva van. Az áramkörön ellenállásokkal szemléltetjük a fogyasztókat, és mivel magán az áramkörön is van ellenállás, ezért a telepet is jellemezni kell egy olyan R_b belső ellenállással, amivel egyensúlyban van magával az áramkörrel. Azt, hogy az áramkör a telepen kívül és belül is ugyanakkora munkát végez, tehát ugyanaz a feszültsége, úgy írjuk le, hogy $\Sigma I_k R_k + \Sigma I_m R_{bm} - \Sigma U_m = 0$, ahol a k-val jelölt tagok a külső (áramköri) ellenállások, az m-mel jelölt tagok pedig a telepeken belüli ellenállások, U_m pedig a telepek úgynevezett generátorfeszültsége, vagyis amit adnak a rendszernek. Összesítve egyszerűen $\Sigma U = 0$ a képlet, ez Kirchhoff II. egyenlete.

22. tétel

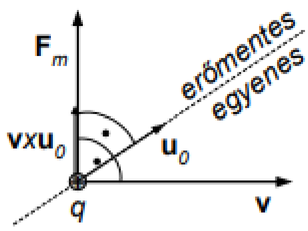
Mágneses erőtér

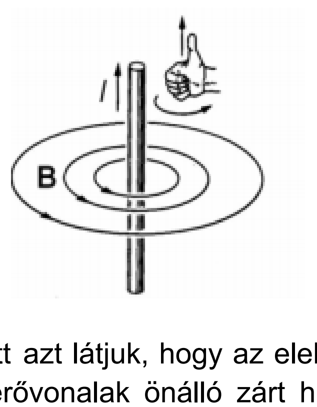
Beszéljünk a mágnesekről először: olyan anyagok, amiknek van egy pozitív és negatív pólusa, amik vonzzák és taszítják egymást. Mint a gravitáció, de mégis független tőle. Mint az elektromosság, de nincsenek töltések. A mágnes a végtelenségig mágnes: ha eltöröd, az új daraboknak ugyanúgy lesz pozitív és negatív pólusa. Az iránytűk működéséből látjuk, hogy valójában a Föld is egy hatalmas mágnes. Kísérleteken látszik, hogy a mágnes hatással van *mozgó* elektromos töltésekre (bár maga a mágnesesség nem töltésekkel működik, hatással van rájuk és viszont), ezért, hogy egyszerűbb legyen velük foglalkozni, töltésekkel határozzuk meg a mágneses mező mértékét.

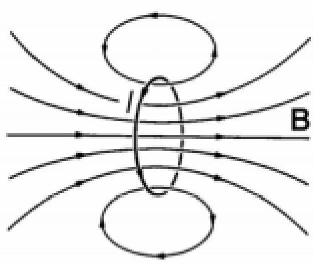
Mágneses indukcióvektor

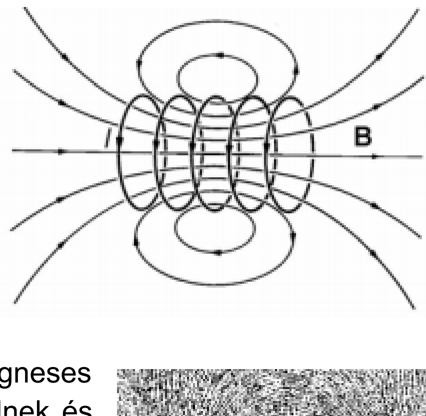


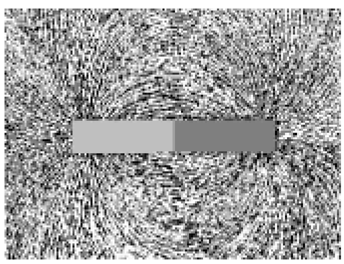
Nézzük az ábrát. Az valójában 3 dimenziós, és szemlélteti, hogy az egyik tengely egy úgynevezett erőmentes egyenes. Ez azt jelenti, hogy azon mozgó töltéseken semmi mágneses erő nem keletkezhet, csak aminek a mozgása eltér tőle. Így minden esetben erre merőleges a mozgó töltésre ható mágneses erő ($\mathbf{F}_m$). A q töltés természetesen minden irányba mozoghat **v** sebességgel, és a mágneses erő majd erre merőlegesen fog hatni. Egy α szöget zár be az erőmentes egyenessel, amitől függ a mágneses kölcsönhatás mértéke. A teljes képlet $\mathbf{F}_m = B * \mathbf{v} * q * sin(\alpha)$, ahol B egy arányossági tényező a mágnes tér erősségét szemléltetve, és úgy hívjuk, hogy *mágneses indukcióvektor*, mértékegysége Tesla. **B** vektorként is felvehető ($\mathbf{B} = B * \mathbf{u}_0$, az erőmentes egyenes irányába fog mutatni, és $\mathbf{u}_0$ adja neki az irányt (ábra). Ebből adódik ez a szorzat: $\mathbf{F}_m = q * \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. A térben az elektromos erőterekhez hasonlóan a mágneses erőtér is szemléltethető, ahol **B** irányát az adott pontban megmutató indukcióvonalakról beszélünk:







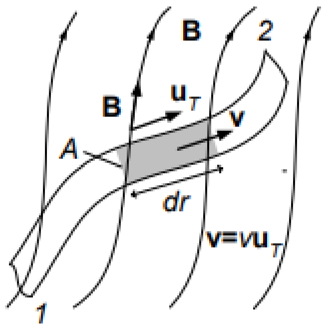




Itt azt látjuk, hogy az elektromossággal ellentétben a mágneses erővonalak önálló zárt hurkok, nem a forrásban kezdődnek és végződnek. A bal oldali ábrán látható a jobbkézszabály, vagyis hogy ha úgy tesszük kezünk, hogy a hüvelykujj az áram folyását mutatja, a többi megmutatja az indukcióvektorok irányát.

23. tétel

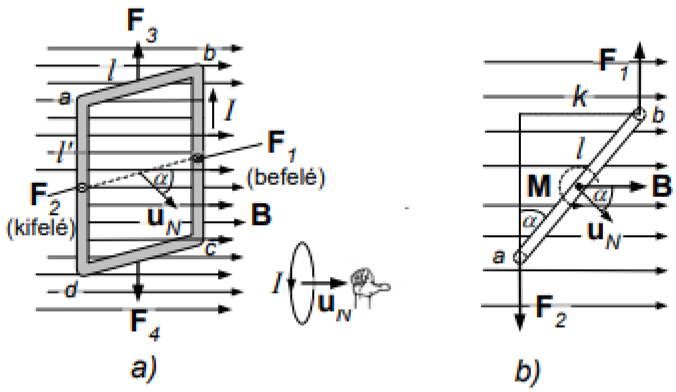
Áramra ható erő mágneses térben



Azt figyelhetjük meg, hogy mágneses térben az árammal átjárt vezető is mozog, de ez azért van, mert az összes benne áthaladó töltésre hat a mágnesesség. Az ábra mutat egy vezetőn áthaladó mágneses teret, és az összes jelölést vettük már korábban, $\mathbf{u}_T$ a sebességvektor normalizált (1 hosszú) iránya. Azt vettük, hogy egy töltésre milyen erők hatnak, ezt összegezni kellene az összes áthaladó töltésre. Szerencsére az áramerősség mértéke annak, hogy mennyi töltés halad át a vezetőn, és ez mindenhol azonos, tehát egy áramhurokra ható erő felírható úgy, hogy $\mathbf{F} = I * \oint_L \mathbf{u}_T \times \mathbf{B} dr$, azaz a vezető L hosszán integráljuk a töltések sebességét és az azokra ható indukcióvektort, ami egyetlen töltésre mondaná meg a kifejtett erőt, ezért az áramerősséggel szorozva előáll a vezetőre ható erő. Természetesen az integrál tetszőleges szakaszra, például az ábrán látható 1-2-es tartományra is felírható. Ha homogén hurokról beszélünk (tehát **B** mindenhol azonos), akkor természetesen $\mathbf{F} = 0$, mivel az elmozdulásvektorok összege 0, ugyanoda értünk vissza.

Áramhurokra ható nyomaték mágneses térben

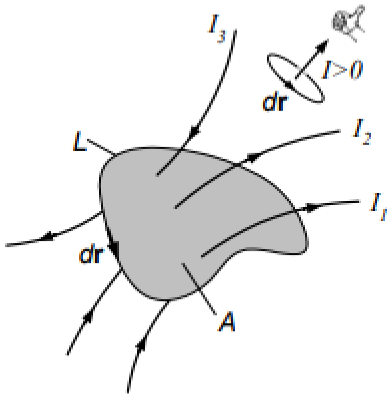
Egy áramhurokban az erő mellé forgatónyomaték is fellép. Az egyszerű számításáért egy olyan példát hozunk, ahol az erő 0, de forgatónyomaték mégis van: homogén mágneses teret használunk. Képzeljünk el ebben egy téglalap alakú áramkört, ami a középtengelyén forog, és $\mathbf{u}_N$-t az áram folyására merőlegesen határozzuk meg, ez α szöggel tér el **B**-től. $\mathbf{F}_3$ és $\mathbf{F}_4$ azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányú, szóval kioltják egymást, marad a két másik erő.



Ezeket a felülnézeti ábrán láthatjuk, hogy kifelé mutatnak, mivel az erővektorok mindig merőlegesek **B**-re. Ezek az erők ezekbe az irányokba húzzák a testet, és ugyanazt kell elképzelni, mintha két oldalról kötéllel húznánk: a mágneses erővonalakra merőlegesen beáll és úgy marad. A forgatónyomaték mértékét az $\mathbf{M} = I * A * \mathbf{u}_N \times \mathbf{B}$ képlet adja meg. Látjuk, hogy $\mathbf{u}_N$ iránya egyre jobban közelít **B**-hez, és ha ez megtörténik, akkor az egész szorzat 0 lesz, mivel azonos irányba álló vektorok vektorszorzata 0. Látható, hogy ha megfordítjuk az áram irányát, akkor 180 fokot fordul a téglalap, ellentétes irányba áll be. Ha pont akkor váltunk irányt, amikor átlendülőben van a merőleges ponton, akkor tovább forog, és az áramirány váltogatásával egy egyenáramú motort kaphatunk.

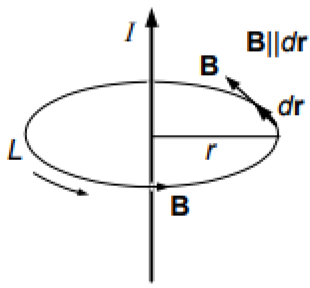
24. tétel

A sztatikus mágneses tér I. alaptörvénye

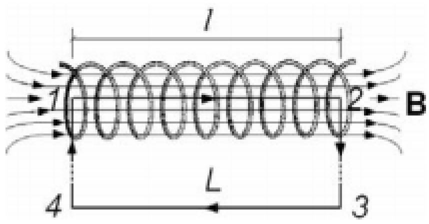


Az elektrosztatika I. alaptörvényéhez hasonló mértékre vagyunk kíváncsiak, vagyis egy hurkon az összesített mágneses erőre: a $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r}$ integrált számítjuk. Láttuk, hogy a mágneses erők hurkokban jelentkeznek, ezért biztosak lehetünk benne, hogy ez az integrál nem 0. Ha az indukcióvektor irányába halad az *L* kör, akkor pozitív lesz, ha ellentétesen, akkor negatív. Az ábra bemutat egy ilyen körre példát, ami több elektromos vezető körül jelentkezik. Azt látjuk, hogy valamilyen módon az áramerősséggel arányos az integrál értéke, szóval egy arányossági tényezőt választunk neki: $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu_0 * \sum_k I_k$. Itt k a vezetők egy darabját jelzi, μ_0 neve pedig a vákuum permeabilitása, ami egyszerűen egy ilyen egyenlőség arányossági tényezőjét jelenti. Ezt az alaptörvényt még úgy is hívják, hogy gerjesztési törvény.

Egyszerű geometriájú áramok mágneses terének számítása



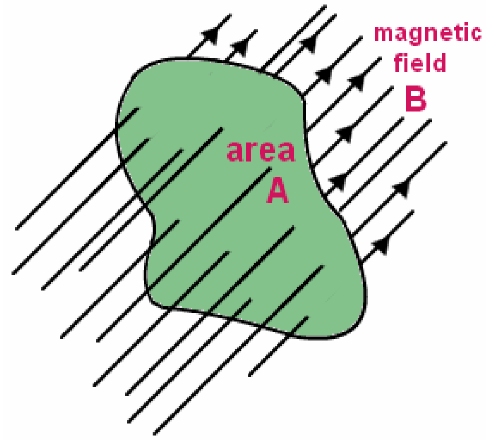
Hosszú, vonalszerű vezető mágneses erőtere: vonalszerű = nagyon vékony. Az ábrán látható módon kijelölünk egy olyan kört, ami megegyezik egy mágneses indukcióvonallal, tehát **B** mindenhol ugyanakkora. Egyrészt egy vezető van, tehát a gerjesztési törvény szerint $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu_0 * I$. Mivel egy körről beszélünk, beláthatjuk, hogy $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = B * 2 * r * \pi$, ugyanis csak a kör kerületén kell **B** mértékét venni. Ezekből levezethető, hogy $B = \frac{\mu_u * I}{2 * \pi * r}$.



Egyenes tekercs mágneses erőtere: Az ábrán több dolgot látni: egyrészt egy tekercsen belül közelíthetően egyenes indukcióvektorok haladnak, N menete van, és l a hossza. Az L vizsgált kört érdemes felvenni, ugyanis van egy l hosszú szakasza, ahol érvényes rá **B**, máshol semmiféle mágneses indukció. Miután egy **B** vonalat követünk l hosszon, ezért $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} \approx B * l$. Azért csak közel egyenlő, mert a tekercs végén az erőtér nem homogén. Ezt és a gerjesztési törvény $\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu_0 * N * I$ alakját (N azért jelent meg, mert annyiszor metszi *L*-t) egyenlővé téve előáll, hogy $B \approx \frac{\mu_0 * N * I}{l}$. Itt, hogy a tényleges egyenlőséget megkapjuk, az indukcióvektort csak a tekercs belsejében kiszámolva az $n = \frac{N'}{l'}$ értékkel $B = \mu_0 * n * I$.

25. tétel

Az indukciófluxus



Az elektrosztatikánál a II. alaptörvény azt fogalmazta meg matematikai formában, hogy az erővonalak töltésben kezdődtek és végződtek. Itt is akarunk hasonlót leírni, csak ugye más a helyzet, a mágneses erővonalak köröket tesznek meg. Azért írjuk fel a felületet metsző indukcióvektorok előjeles összegét **A** felületre, vagyis az indukciófluxust: $\Phi_B = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}$.

A sztatikus mágneses tér II. alaptörvénye

Az, hogy a fluxus mértéke egy zárt felületen milyen, leírja, hogy forrásosak vagy forrásmentesek a vonalak, vagyis hogy van-e egy pont, amiből erednek, vagy nincs. Mivel mágnesességnél nincs ilyen pont, mert mind kör, ezért amelyik vonal bármelyik zárt testbe belép, az ki is lép abból, tehát a fluxoshoz hozzáadódik és ki is vonódik belőle, tehát egy zárt felület indukciófluxusa csakis 0 lehet: $\int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$. Ezt hívjuk a mágneses tér II. alaptörvényének, avagy Gauss-törvénynek. Azt fejezi ki, hogy a mágnesesség nem egy pontból ered vagy pontba fut, hanem minden esetben forrásmentes. Ez bizonyítja, hogy nem létezik mágneses töltés, amire további bizonyíték, hogy egy mágnesrúd két pólusra törésével nem szétválasztjuk a pólusokat, hanem két külön mágnest csinálunk, és azoknak is lesz mindkét pólusa.

26. tétel

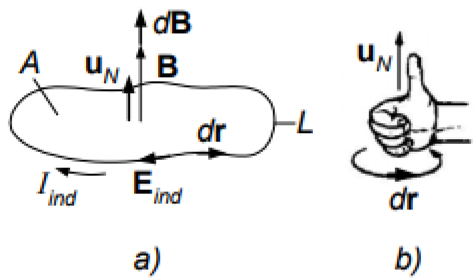
Az elektromágneses indukció

Mágneses tér hatására egy vezető hurokban létrejöhet indukált elektromotoros erő. Az erőterét indukált elektromos erőtérnek, az elektromos áramát pedig indukált áramnak hívjuk. Tudjuk, hogy ha nincs a töltéseknek sebessége az indukcióvonalhoz képest, akkor nem lesz belőle mágneses erő, ezért vagy a mágneses térnek kell mozognia (ekkor beszélünk nyugalmi indukcióról), vagy a vezetőnek (ami a mozgási indukció).

Számos tapasztalat mutatja, hogy egy rögzített vezető hurokban áram jön létre, ha változik körülötte a mágneses tér. Például köthetünk tekercsre árammérőt, amibe toljuk be egy mágnes egyik pólusát, ekkor látszik, hogy áram jelenik meg. Ha megállítjuk a mágnest a közepében, már nincs áram. Az is egy kísérlet a témában, hogy egy másik tekercset az első tekercs közepébe téve, arra áramot kapcsolva, egy kis időre lesz áram a külsőben. Ez működik fordítva is. Láttuk tehát, hogy a mágnes és az elektromágnes is indukál áramot. A kísérletek bizonyítják, hogy csak a mágneses tér változása indukál áramot, maga a tér nem. Azt is láttuk, hogy a gyorsabb mozgás több áramot termel.

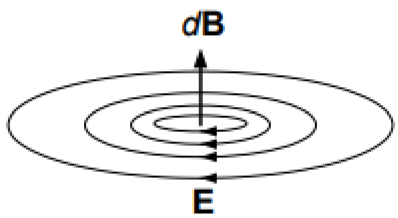
A Faraday-Lenz törvény

Ahhoz, hogy egy áramkörben tartósan áram folyjon, elektromotoros erőnek kell jelen lenni. Ez arányos az *A* felülettel és **B** idő szerinti deriváltjával, tehát a hurok felületére vonatkozó fluxussal. Kísérletekkel bizonyították, hogy az *a)* ábrán látható irányban változó erővonalak körül óramutató járásával egyirányú áram, így elektromos erőtér jelenik meg. Mivel jobbkézszabály szerint járjuk be, ezért ha képletet írunk fel az indukcióról, az előjel ellentétes lesz:



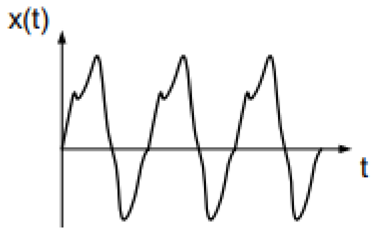
$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}\right)$$

Alapból ez lenne a Faraday-féle indukciótörvény. Lenz neve azért került a képbe, mert felismerte a képletből, hogy az indukált áram körül mágneses tér jelenik meg, ami viszont ellentétes *d***B**-vel, így azt csökkenti. Ha nincs elektromos vezető, mágneses tér változása körül akkor is indukálódik elektromos mező. Az ábrán látszik, hogy az erővonalak köröket írnak le, balkézszabály szerint, ez viszont azt jelenti, hogy megdől az elektrosztatika I. alaptörvénye, ugyanis már nem konzervatív az erőtér. Miután a statikus erőtér konzervatív, a fenti képlet pedig az egyetlen olyan példa, ahol az erőtér nem az, ezért azt ismerjük el annak a törvénynek, ami nem csak sztatikus, de változó erőterek esetén is érvényes. Erre jó a Faraday-Lenz törvény.



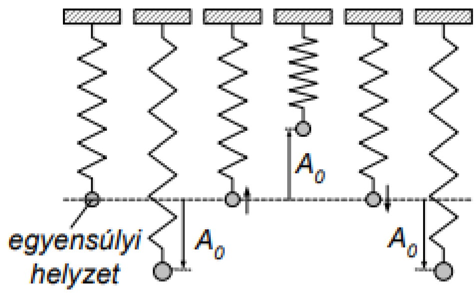
27. tétel

A rezgés fogalma és leírása, a harmonikus rezgés

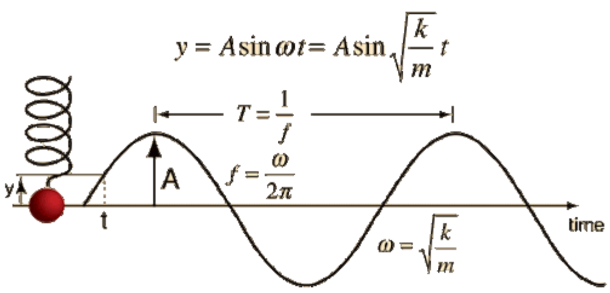


A rezgés általános értelemben valamilyen mennyiség bizonyos határok közti (periodikus vagy nem periodikus) változása. Nem feltétlenül a hétköznapi értelemben vett rezgéssel foglalkozunk, ugyanis más, például a feszültség is váltakozhat bizonyos határok között (például váltóáram). Egy rezgés nem feltétlenül tiszta szinusz (azt hívják harmonikus rezgésnek), lehet olyan fura, mint az ábra, vagy akár nem periodikus is. A lényeg, hogy minden rezgés felírható szinuszos tagok, így harmonikus rezgések összegeként, vagy az ábrán látható függvény egyszerűen még közelíthető is vele, mert nagyon hasonlít rá. Mivel ez bonyolult feladat, inkább csak a harmonikus rezgésekkel foglalkozunk. Bár a rezgések más-más fizikai jelenséghez tartoznak, az alapjuk mindig ez.

Harmonikus rezgés mechanikai- és elektromos rezgő rendszerben



Harmonikus rezgés, aminek az időfüggése harmonikus (szinusz vagy koszinusz) függvénnyel írható le. A valóságban ritka az ilyen, mert szinte mindig csillapodnak, viszont közel harmonikus példát tudunk: jó közelítéssel harmonikus mozgást végez egy rugón lógatott tömeg, ha az egyensúlyi helyzetéből kitérítjük (ábra). A tömeg az egyensúlyi helyzetből lefelé A_0 távolságra térül ki, majd a rugó visszarántja, aminek hatására felfelé is ugyanaddig térül ki, ahonnét szintén megfordul. Látszik az ábrán is, hogy az idő folyása szerint egy szinuszfüggvényt rajzol ki.



A harmonikus rezgés általános alakja $x(t) = A * sin(\omega_0 * t + \varphi)$, ahol cos is használható. A a legnagyobb kitérés, amit amplitúdónak nevezünk, ω_0 a rezgés T_0 rezgésidejét meghatározó körfrekvencia ($\omega_0 = 2 * \pi / T_0$), φ pedig az időmérés kezdetétől függő fázisállandó. Gyakran használt az $f_0 = 1/T_0$ módon meghatározható frekvencia is, ami az egységnyi idő alatt lezajló periódusok számát jelenti.

Elektromos váltóáram esetén az áramerősség és a feszültség ilyen kapcsolatban van egymással: $I(t) = I_m * sin(\omega_0 * t + \varphi_1)$, $U(t) = U_m * cos(\omega_0 * t + \varphi_2)$. Látható, hogy egy sin-cos pár, és I_m és U_m a maximális értékeket megadó áramerősség- és feszültség-amplitúdó.

28. tétel

A harmonikus rezgés energiaviszonyai

A tételben x tengely mentén fogunk gondolkozni, így x és $x(t)$ is az x irányú kitérést fogja jelenteni, az x indexek pedig azt, hogy az érték azon a tengelyen van. Erőt úgy határozunk meg, hogy $F = m * a_x$. Egy rezgőmozgás gyorsulása egyszerűen úgy áll elő, hogy az elmozdulását kétszer deriváljuk. Ekkor az áll elő, hogy

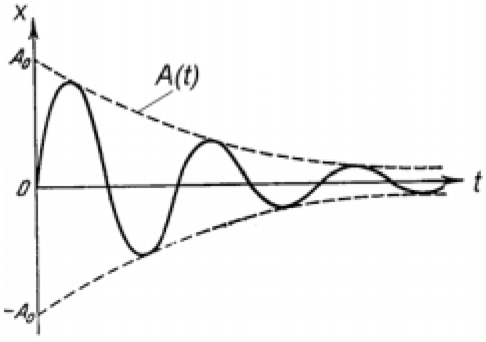
$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$, így $F = \ - m * \omega_0^2 * x$.

Szükségünk lesz az energiaviszonyok tárgyalása előtt a rugóállandó bevezetésére. D-vel jelöljük, és azt adja meg, hogy az adott rugón m tömegű test milyen körfrekvenciával rezeg. A $D = \ - m * \omega_0^2$ képlet adja meg, és például rövidebben felírható vele az erő: $F = D * x$.

Energiaátalakulások egydimenziós (egy tengelyen végbemenő, például a rugós példa) **mechanikai rezgésnél**: egy rezgő test helyzeti energiája $E_h = \frac{1}{2} * D * x^2$. A mozgási energia $E_m = \frac{1}{2} * m * v_x^2$. Korábbi tételből tudjuk, hogy $E = E_m + E_h$. Ha a helyzeti energia 0 (amikor a kitérés 0, az egész szorzat 0), akkor kizárólag mozgási energiája van. Nevezzük el ilyenkor a sebességet v_m-nek, mint maximális sebesség, amit v_x helyére írva meg is kapjuk az egyik képletet, ami meghatározhatja a teljes energiát. A másik esethez az kell, hogy a sebesség legyen 0. Ez akkor fordul elő, ha végkitérésben vagyunk, és elindul a másik irányba a rezgés. Ilyenkor a helyzeti energiában x helyén A áll, mert az a maximális kitérés. Láttuk tehát, hogy ha az egyik energia 0, a másikban van a teljes energia, tehát felírhatjuk, hogy $E = \frac{1}{2} * m * v_m^2 = \frac{1}{2} * D * A^2$.

29. tétel

A csillapodó rezgés alapegyenlete, jellegzetességei mechanikai és elektromos rezgő rendszerben



A valóságban egy rezgő rendszerből az energia folyamatosan eltávozik, így a rezgés amplitúdója folyamatosan csökken. Az ilyen rezgéseket csillapodó vagy csillapított rezgéseknek hívjuk. Vegyük például a 27. tétel rugós példáját A valóságban az ábrán látható módon az amplitúdója idővel csökkenni fog, ha felrajzoljuk a kitérés-idő függvényét. Valamilyen erő tehát fékezi, csillapítja a mozgást, nevezzük F_{cs}-nek jelölt csillapító erőnek. Deriváltuk már egyszer a kitérést, hogy gyorsulást kapjunk, tegyük meg újra, viszont ellentétes előjellel adjuk hozzá ezt a csillapítást, hogy egyre jobban fékezze a mozgást:

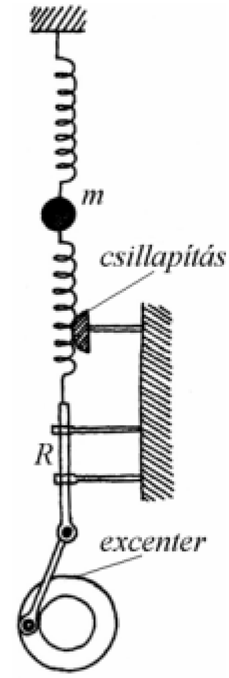
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) + F_{cs}$$

A csillapító erő az idő függvénye, lehet például a közegellenállás (közegben mozgó test mozgásának csillapítása a közeg által), ami a sebességgel ellentétes irányban hat, itt például $F_{cs} = -k * v_x(t)$, ahol k a rugómerevség.

Általában az amplitúdó csökkenése exponenciális. Így felírható egy exponenciálisan csökkenő szorzó taggal: $x(t) = A_0 * e^{-\beta * t} * sin(\omega * t + \varphi)$ formában, ahol A_0 az ábrán látható kezdeti amplitúdó, és $\beta = \frac{k}{2*m}$. Természetesen a rendszer energiája a rezgés csillapodása miatt folyamatosan csökken (ugye annak amplitúdójától függ), ennek pontos mértéke $dE/dt = -2 * \beta * E$.

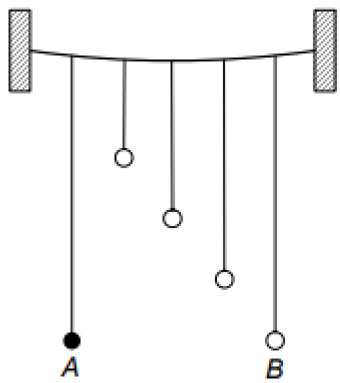
30. tétel

Kényszerrezgés és rezonancia mechanikai és elektromos rezgő rendszerben



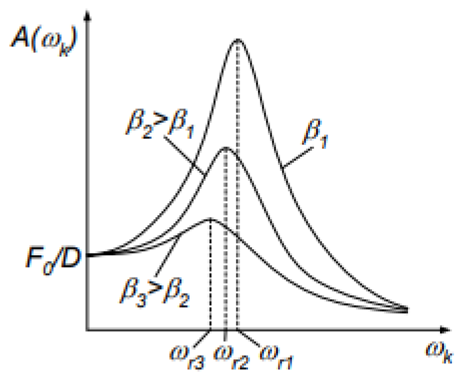
Kényszerrezgésnek nevezzük, amikor valamilyen külső hatás (kényszer) periodikus rezgései egy rezgésre képes rendszert rezgésre kényszerítenek. A külső hatás sokféle lehet, itt a szinuszt vizsgáljuk.

Az ábrán látható kísérlet egy pontszerű test rezgését modellezi, alaphelyzetben egyszerű rezgőmozgást tud végezni, ha kitérítjük. Került rá egy csillapítás, hogy a keletkezett rezgést tompítsa valamilyen mértékben, és ne rúgjon túl a kísérlet közben az amplitúdó a határokon. A lényegi rész az alsó excenter, amit forgatva az R rúd fel-le mozog, periodikus kényszerrezgést idézve elő. Ahogy növeljük a sebességet, vagyis a kényszerrezgés frekvenciáját, a tömeg egyre jobban kitér, de egy ponton túl már csökken, majd teljesen elhal. Ezzel látható, hogy van egy frekvencia, ahol a jelenség maximális. Az alsó kísérlet, hogy fellógatunk egy nagy tömegű ingát (*A*), és változó hosszúságú sok kicsit, ezek közül *B* hossza (így frekvenciája) egyezik *A*-val. Ha *A*-t kimozdítjuk, csak *B*-n látszik látványosan a kényszerrezgés. A kísérletekből tapasztaltuk, hogy a rendszer leginkább egy adott frekvencián rezonál külső kényszerre, ezért rezonanciának is hívjuk a jelenséget.



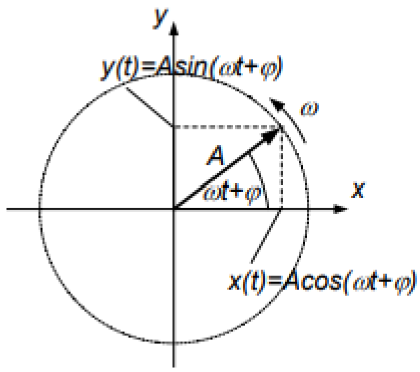
Képzeljük el ezt a rezgést egy gerjesztő $F_k = F_0 * sin(\omega_k * t)$ erőként. A tapasztalat szerint egy bonyolult rezgés után a rezonált tömeg a gerjesztő erő frekvenciáján rezeg, tehát a gerjesztő erő rákényszeríti ezt a rezgést. Ennek oka az, hogy ha egy rendszert egyensúlyi helyzetéből kitérítünk, beindul a sajátrezgése, amihez a kényszerrezgés hozzáadódik, viszont a csillapítás miatt a sajátrezgés eltűnik, és csak a kényszerrezgés marad.

Az amplitúdó frekvenciafüggését az az ábra szemlélteti, amit rezonanciagörbének hívnak. Az adott frekvencián mért amplitúdót mutatja, és látni rajta, hogy $A(0)$, vagyis a 0-hoz tartó frekvencia hozzáadott kitérése pont az F_0/D értékhez tart, ami megfelel annak, hogy D állandójú rugót egyszerűen F_0 erővel térítünk ki. A maximális körfrekvenciához tartozó frekvenciát, vagyis $f_0 = \omega_r/(2\pi)$ értéket rezonanciafrekvenciának nevezik. β az előző tételből ismert, értéke $k/(2m)$, a rugómerevség és a tömeg függvénye.

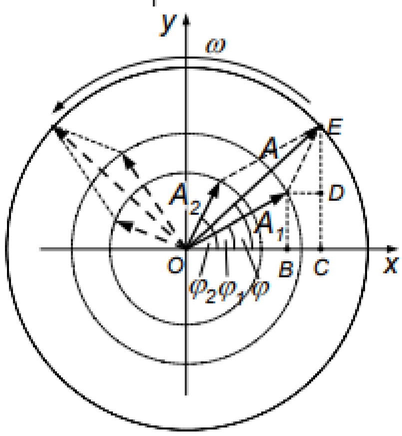


31. tétel

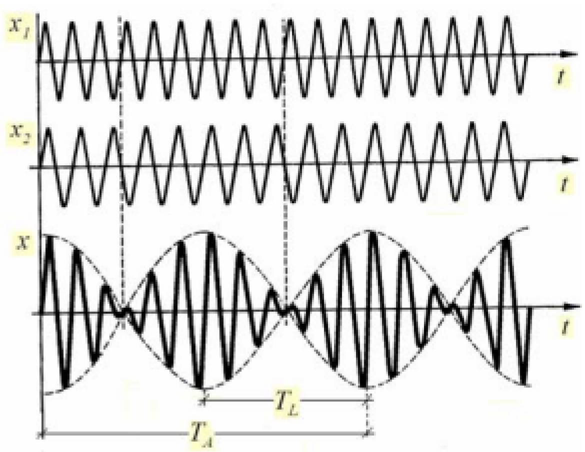
Harmonikus rezgések összetétele és felbontása



Gyakori, hogy egy rendszerben több harmonikus rezgés van, ezeket együtt kell kezelni, de az is előfordulhat, hogy egy összetett rezgést akarunk számolni, de harmonikus rezgésekre bontva könnyebb vele a dolgunk. Figyeljük meg az ábrát, ahol felrajzoltunk egy rezgőmozgást jellemző vektort, ami körbe mozog. Mivel a szinuszfüggvény egy forgó vektor szélességi kitérését, a koszinusz pedig a magasságát írja le, ezért nyugodtan szemléltethetjük így a rezgést. Az amplitúdó a vektor hossza, a körfrekvencia a mozgási sebessége, a fázis pedig, hogy kezdetben milyen szögben áll. Látható, hogy a szinuszos rezgésegyenlet az y tengelyen jelenik meg, a koszinusz az x-en. Ez bizonyítja, hogy a körmozgás valójában két külön rezgés, két tengelyen.



A második ábra már azt szemlélteti, hogy mi történne, ha két rezgést összeadnánk, amiknek a körfrekvenciája azonos. Ha csak az amplitúdók (A_1 és A_2), illetve a fázisok (φ_1 és φ_2) változnak, akkor ez a két vektor mindig azonos szögre egymástól, azonos sebességgel fog forogni, hiszen a körfrekvencia a forgási sebesség. Éppen ezért megtehetjük, hogy egyszerűen összeadjuk a két vektort, és ekkor két különböző, de azonos körfrekvenciájú rezgést le is írtunk egyetlen, közös rezgéssel. Természetesen ez működik több, de azonos frekvenciájú rezgésre is.

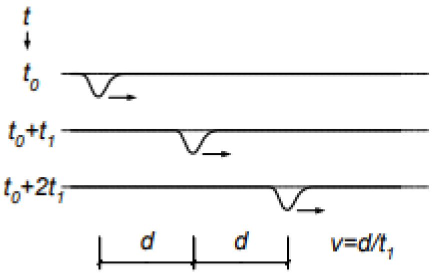


Ha különböző frekvenciájú jeleket adunk össze, az ábrán láthatóhoz hasonló összegzett jel áll elő (x a két jel minden időpillanatban összeadva). Ez periodikusan változó amplitúdót fog okozni, amit úgy hívunk, hogy lebegés. A lebegés főleg akkor látványos, ha azonos amplitúdójú, és közel hasonló frekvenciájú rezgéseket összegzünk, ugyanis a lebegés amplitúdójának körfrekvenciája $\omega_A = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Látható, hogy minél kisebb a különbség, annál kisebb ez a körfrekvencia, tehát annál nagyobb távolságokban, látványosan, elnyújtva jelenik meg a hatása.

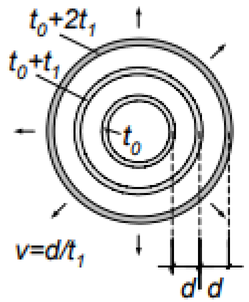
A rezgések szétbontását Fourier-sornak hívjuk, ez egy olyan módszer, ahol egy összetett rezgést harmonikus rezgések összegeként írhatunk fel, például az utolsó ábrán az alsó, összegzett rezgésből elő tudná állítani a két kiinduló rezgést, azok pontos paramétereivel.

32. tétel

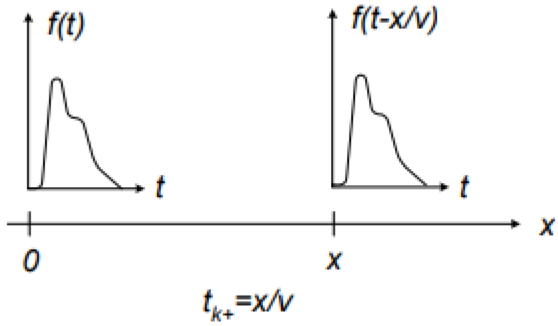
A hullám fogalma

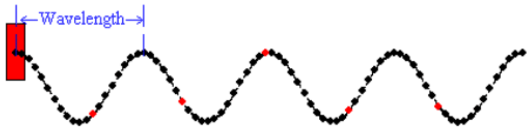


Egy rezgőmozgás jelenségeit gyakran távolabb is észleljük a létrehozás helyétől. Ezeket a távolban kiváltott hatásokat változásnak, zavarnak hívjuk. A zavar térbeli terjedését hívjuk hullámnak, azt a helyet pedig, ahol a zavar létrejött, hullámforrásnak hívjuk. A hullám szoros kapcsolatban áll a rezgésekkel, hiszen valamilyen rezgés terjed a térben. Erre a felső ábrán látható példa egy jó szemléltetés, ha egy kötélen rántunk egyet, az így kialakult völgy egyenletes sebességgel végighalad rajta. Bármilyen mozgást végzünk az elején, az el fogja érni a másik oldalát. Mivel a hullám egy vonalon terjed, ezért egydimenziósnak hívjuk. Két dimenzóban is nagyon könnyen tudunk rá példát mutatni, egyszerűen dobjunk bele egy tömeget egy álló vízbe. Az alsó ábra ennek a terjedését mutatja be, ami szintén egyenletes.



A hullámfüggvény





Az ábrán látható, hogy mi történik, ha adott pontból indítunk útjára egy hullámot, és nem 0 a pont. Természetesen ugyanaz lesz, ha helyileg máshol indítjuk, csak eltolással. Mivel v sebességgel terjed, és x távolságra toltuk el, pozitív irányban $t_{k+} = x/v$ időegység lenne elérni addig a pontig. Ha $f(t)$ függvény írja le, hogy adott időpillanatban a zavar mértéke egy pontban hogyan alakul, akkor egyszerűen ennyivel kell eltolni a függvényt, hogy úgy kezdődjön adott x pontban, mintha 0-ban lennénk: $f(t - x/v)$ a függvény. A hullám úgy működik, hogy a ponton, ahol leírtuk ezt a függvényt, változik, és széltében terjednek a korábbi értékei adott sebességgel. Ezt a GIF szemlélteti, lényegében a rezgő hullámforrás történelme terjed a térben, egy korábbi állapotát észleljük. Emiatt a hullámfüggvény nem csak időben, de térben is kell, hogy pozicionálja a hullámforrást, tehát egy pozíciót is megadunk hozzá, ami alapján már tudjuk, hogy adott pontban és időben mi lesz a hullám értéke: $\Psi(x, t) = f(t \mp x/v)$. Azért van ott a $\mp$, mert ha a vonalon balra vizsgálódunk, akkor $+\ x/v$, ha jobbra, akkor $-\ x/v$ az eltolás a függvényben.

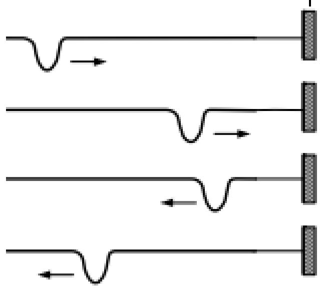
A hullámok típusai

- *Térbeli viszonyok szerint*: egy- (pl. kötél), két- (vízfelszín), vagy háromdimenziós (hang, fény)
- *A terjedés és a zavar viszonya szerint*: transzverzális (a zavar a haladási iránnyal merőlegesen hat, pl. kötélen) vagy longitudinális (a zavar a haladási irány szerint hat a környezetre, pl. hang)
- *Azonos értékkel rendelkező (azonos fázisú) pontok helye szerint*: síkban a vonal alakja szerint lehet egyenes hullám és körhullám, térben az alakja alapján beszélhetünk síkhullámról, gömbhullámról, hengerhullámról, stb.
- *A terjedő zavar időfüggése szerint*: ha a zavar időfüggését harmonikus tag adja meg, akkor harmonikus hullámnak nevezik, különben nem harmonikus hullámnak.

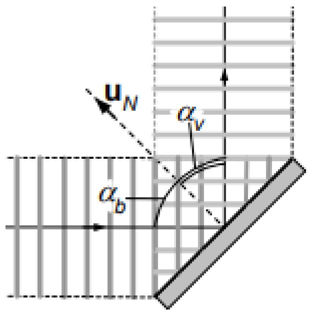
33. tétel

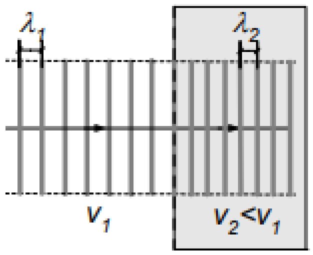
A hullámok visszaverődése és törése

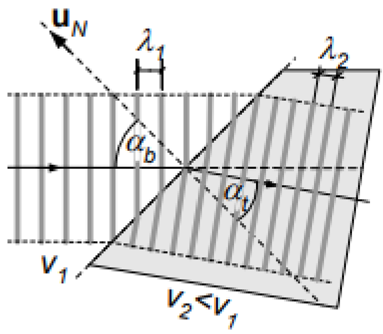
Ha a hullám egy közeg határához ér (például a hang a falhoz), akkor valamilyen módon visszaverődik, miközben a polaritása (előjele) megváltozhat, illetve behatolhat a közegbe, ott egy másik sebességgel és/vagy polaritással továbbterjedve. Próbáljuk ki, hogy egy falhoz feszített kötélen elindítunk egy hullámot. Az elér a falig, és ellentétes irányba kitérve elindul visszafelé, mint az a GIF-en is látszik. Ez azt jelenti, hogy a hullám fázisa 180 fokkal, vagyis π -vel (radiánban) változott meg. Módosítsuk a kötél végét úgy, hogy ne fixen legyen kikötve, hanem szabadon elmozdulhasson (például tegyünk a kötél és a fal közé vékony, rugalmatlan zsinórt), ekkor azt vesszük észre, hogy a polaritás nem változik, ugyanaz a hullám jön vissza, amit elindítottunk (alatta lévő ábra). A rögzített esetben a megfordulás oka az, hogy a falhoz érkező zavarnak a falnál el kell tűnnie, és ezt egy ellentétes irányú kitéréssel kompenzálja. Ez a jelenség elektromágneses hullámoknál is létezik.



Az oldalról érkező és megtörő hullámokat vízzel tudjuk bemutatni. Egyenes pálcával lassan ütögetve a vizet csináljunk hullámokat, majd tegyünk egy ferde akadályt az útjába. Erről a hullámok olyan szögben verődnek vissza, amik a falra merőleges normálvektortól (így hívjuk egy felület “előre” irányát) ugyanannyira különböznek, mint a beesési szög. Az alatta lévő ábrán azt látjuk, hogy egy medencét két részre bontottunk egyenes határral. A szürke részen a vízmélységet csökkentettük, és ez víznél a terjedési sebességet csökkenti, tehát egy másik közeget hoztunk létre. Meg is figyelhetjük, hogy a hullámok lassulnak. λ jelöli a hullámhosszt, és a képlete $\lambda = v * T$, ahol T a periódusidő. Ebből látni, hogy a hullámhossz és a terjedési sebesség egymással arányos. Ha ezt a sekély vizet úgy alakítjuk ki a medencében, hogy nem egyenesen vált a közeg, akkor az egyenes helyzeteket megadó fázisok egyenese is módosul, tehát törés is történt. Ilyenkor a hullámok irányát a közegváltási felülethez képest nézzük, hogy mekkora szögben térnek el a normálvektortól. A hullámforrás oldala felőli szög neve beesési szög (α_b), az új közeg szöge pedig törési szög (α_t).

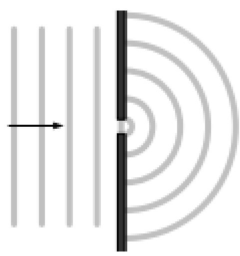






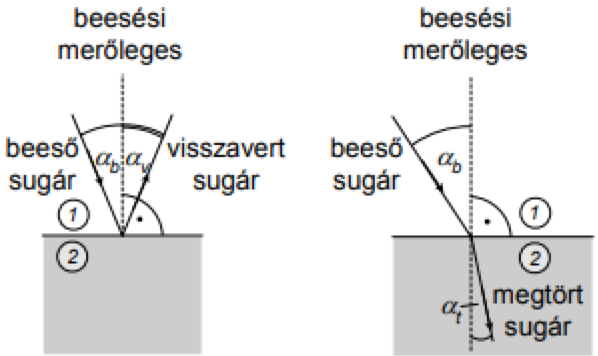
A Huygens-elv

Huygens bizonyította, hogy minden hullám felírható pontszerű hullámok összegeként. Ezt az a kísérlet is bizonyítja, hogy ha vízhullámokat egy résen engedünk át (ábra), akkor a rés túloldalán mintha a résből egy ponthullám indult volna el. A Huygens-elv az, hogy minden hullámfront (vagyis az egyenlő fázisú pontok halmaza - az ábrákon vastag szürke vonalak) elemi gömbhullámok összességei. Az új



hullámfrontot ezeknek a gömböknek a burkolófelülete fogja adni, amit a következő ábra szemléltet:

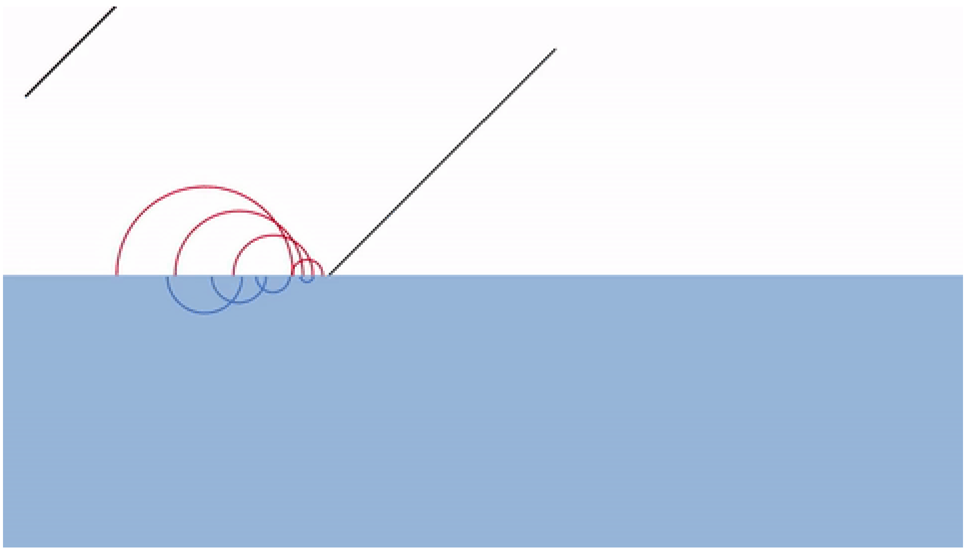
A következő ábra egy pontosabb kép, hogy mi is melyik szögnek/sugárnak számít:



A Huygens-elvből vezették le, hogy a beesési és törési szög kapcsolata:

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

Itt n_{21}-et úgy hívjuk, hogy a 2-es közegnek az 1-es közeghez képesti törésmutatója. Hogy ez a képlet hogy állt elő és az elvből miért következik, azt egy GIF szemlélteti nagyon jól:

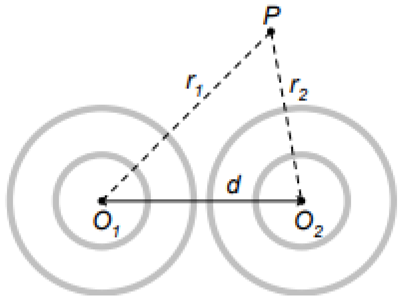


(ha nem tölt be, válts javaslat módra)

A beérkező hullámfronton új ponthullámok jönnek létre, azok pedig a megváltozott sebesség miatt más hullámfrontot alkotnak.

34. tétel

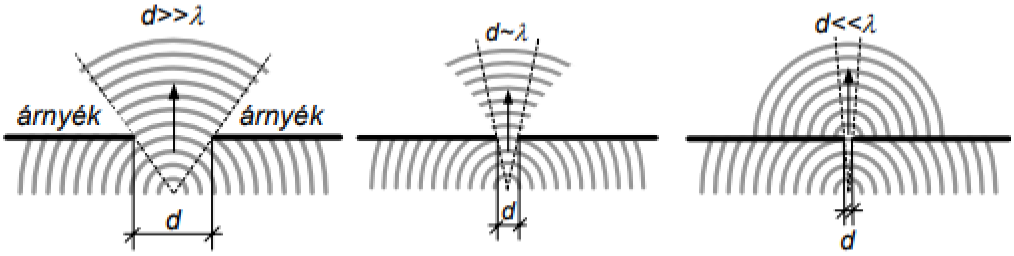
A hullámok találkozása, interferencia



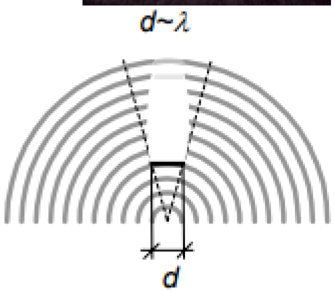
Ha a tér egy pontján két hullám van jelen, a hatásuk ott valamilyen módon összeadódik. Ezt nevezzük interferenciának. Mivel a szuperpozíció elve érvényes, ezért egyszerűen matematikailag adjuk össze a hullámok függvényeit: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \Psi_2(\mathbf{r}, t)$. Térben az amplitúdók eloszlását interferenciatérképpel mutatjuk meg, ezt mutatja az ábra. Itt például két pontforrást látni, amik síkban körhullámokat okoznak, de ha térről lenne szó, gömbhullámokat hoznának létre. Hogy az ábrán jelölt P pontban megkapjuk az interferenciát, egyszerűen csak helyettesítsük be a jelölt pontforrásokat az összegbe: $\Psi(P, t) = \Psi_1(O_1, t) + \Psi_2(O_2, t)$.

Hullámelhajlás

Ha egy pontból eredő hullámterjedés útjába rést teszünk, a hullámhossztól függően egy olyan jelenség kerül elő, hogy nagyobb szögben haladnak át a résen, mint a pontforrástól az indokolt lenne, ezt hívjuk hullámelhajlásnak, mert a szélei mintha elhajlanának:



Látható, hogy a legkisebb résnél már olyan, mintha pontforrás lenne a rés. Ezt korábban is beláttuk, mivel valójában minden hullámfront pontforrásokból áll. Nehezebb a magyarázat a középső példára, amikor a rés a hullámhosszal összemérhető. Ekkor egy köztes állapot áll elő a pontforrás és a változatlan továbbterjedés között. Pontosabb mérésekkel bármilyen rés határánál elhajlást figyelhetünk meg, mint az ábrán látható hullámkádas kísérleten. Olyan is előfordul, hogy a hullám útjába tett rés két oldalán "visszakanyarodik", ez látható az alsó ábrán. Ezt elhajlásnak, avagy diffrakciónak hívjuk, az ezekről rajzolt ábrák neve pedig elhajlási- vagy diffrakciós kép.



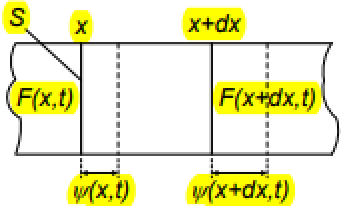
A Huygens-Fresnel–elv

Az elhajlás Huygens-elvvel már nem értelmezhető, mivel az nem veszi figyelembe a hullám intenzitásviszonyait, vagyis az interferenciáit, így azt sem, hogy a hullám az árnyéktérbe behatolhat. A Huygens-Fresnel elv már nem csak azt veszi figyelembe, hogy a hullámfrontok pontokból tevődnek össze, hanem azt is, hogy ezek a hullámok adott pontokon erősíthetik és kiolthatják egymást. Mivel ponthullámok, ezért minden irányban van intenzitásuk, az árnyéktér felé is. Egyszerűen ott is tudjuk számítani a mellette elhaladó végtelen sok pont interferenciáját, amik összeadódva már itt is okozhatnak hullámokat.

35. tétel

Ez az egész tétel "nem kell" jelzőt kapott a jegyzetben. Csak utolsóként tanuld meg!

A hullámterjedés matematikai leírása, a hullámegyenlet



Vettük a $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hullámfüggvényt. Az lenne a cél, hogy olyan fizikai egyenletet találjunk, ami ezt leírja. Vegyünk egy S széles, x tengelyen haladó rudat. Abból indulunk ki, hogy a hullám erőt fejt ki egy térfogatelemre, ami az ismert képlet alapján itt egy időpillanatban $dF_x = dm * a_x$ lesz. Ebből úgy lesz hullámegyenlet, hogy a gyorsulást kapcsolatba hozzuk vele. Tudjuk, hogy a hullámfüggvény elmozdulást ír le adott ponton, aminek első deriváltja a sebesség, második a gyorsulás. Ebből lesz $a_x = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$. A ∂ jelöli a parciális deriválást, mivel a hely fix, mi csak idő szerint deriválunk. A tömeget is alakítsuk át, az $dm = S * dx * \rho$ lesz, ahol S a keresztmetszet, x a hossz, ρ (ró) pedig a sűrűség, ami azt adja meg, hogy egységnyi térfogatú anyag tömege mennyi. Mivel a másik két szorzott tag egy térfogatszámítás, ezért a sűrűséggel szorozva megkapjuk a tömeget. Használjunk még egy másik erőképletet, ahol $F = S * E * \varepsilon$, itt ε a deformáció, vagyis egyszerűen Ψ deriváltja x szerint. Ha behelyettesítjük bal oldalon $m * a$-t, majd azokat egyenként, akkor a hullámfüggvény egy majdnem általános alakot fog ölteni:

$$\frac{E}{\rho} * \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Itt az első tagot kiemeljük, elnevezzük B-nek,és az általános alak ezek után:

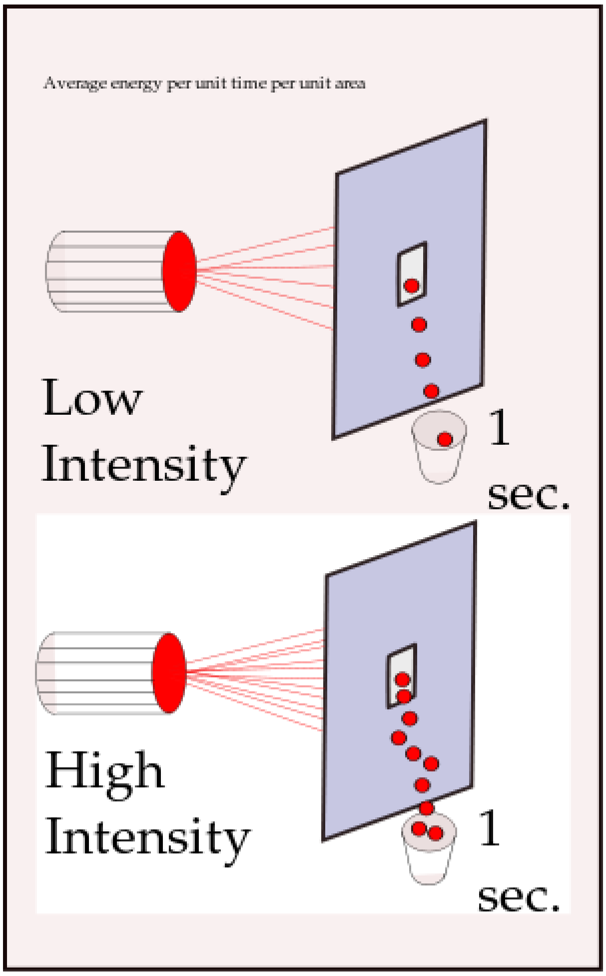
$$B * \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Itt B attól függ, hogy éppen milyen hullám terjed, más közegben terjedő más típusú hullám esetén nem E/ρ lesz. Ez most a rúdban terjedő longitudinális hullám volt. Ha nem egy dimenzióban számolunk, hanem mondjuk háromban, akkor is egyszerűen ugyanez a képlet, csak x mellett létezik y és z tag is.

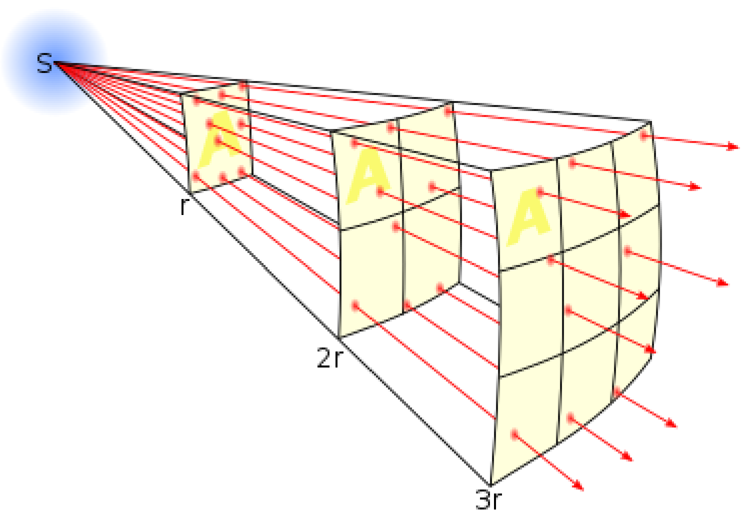
36. tétel

Energiaterjedés hullámban

Ahhoz, hogy egy közegben deformációt hozzunk létre, vagyis átalakítsuk, munkát kell végezni. Hogy ezt távolabb tegyük meg, ahhoz is munka kell. Tehát a hullámmal nem pusztán állapotváltozás terjed, de energiát is szállít. Ez leggyakrabban az energiaáram (Φ) nagyságával jellemzik, ami az adott idő alatt áthaladó energiaváltozást jelöli, és az a képlet írja le, hogy $\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. Ez egy teljes felületen áthaladó összes energiát adja meg (hasonlót láttunk az elektromosságnál és mágnesességnél is), ezért szükségünk lenne egy olyan tényezőre is, ami Φ változását egy hullámterjedésre merőleges ΔS felületen adja meg. Ezt úgy hívjuk, hogy intenzitás, jele I, és $I = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}$. Ha egy S felületen az intenzitás mindenhol ugyanakkora, akkor $\Phi = I * S$.

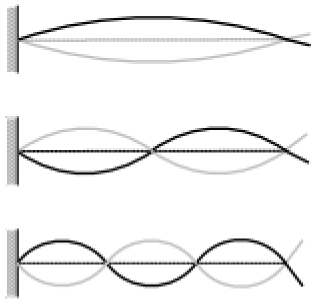


Az intenzitás a felület négyzetével arányos, tehát $I = C * A^2$, ahol C a hullám egyéb jellemzőitől függő mennyiség. Ebből látható, hogy ahogy nő a hullám (tágul a gömb), egyre nagyobb lesz a felülete, tehát egyre jobban szétoszlik rajta az intenzitás, így még akkor is csökken a távolsággal, ha nincs, ami csillapítsa. Ha gömbnél a $\Phi = I * S$ képletbe behelyettesítjük $I = C * A^2$-et, a felületre pedig a gömb felszínét, ami $4 * r^2 * \pi$, akkor átrendezhetjük úgy, hogy belássuk, hogy ahogy $A^2 \sim \frac{I}{r^2}$, vagyis az intenzitás a sugárral való négyzetes arányossággal csökken. Ezt úgy hívjuk, hogy inverz négyzetes törvény.

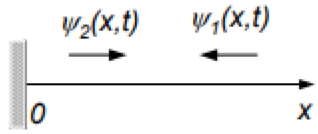


37. tétel

Állóhullámok



Eddig vettük külön a hullámok terjedését, a visszaverődést, és az interferenciát külön-külön, most arra vagyunk kíváncsiak, hogy egyszerre hogy viselkednek. Fogjunk egy falhoz rögzített kötelet, és kezdjük egyre növekvő frekvenciával mozgatni. Észrevehető, hogy adott frekvenciákon megjelennek olyan pontok, ahol a kitérés mindig nulla, ezeket csomópontoknak hívjuk. A csomópontok közti szakaszok közepén maximális a kitérést, ezek a duzzadóhelyek. A kialakult helyzet sajátossága, hogy az azonos fázisban álló pontok nem mozdulnak, a csomópontokban mindig 0 a kitérés, mintha nem is terjedne ott hullám. Ezért az így kialakult helyzetet úgy hívjuk, hogy állóhullám. Hogy meg tudjuk őket különböztetni a többi hullámtól, azokat haladó hullámnak hívjuk.

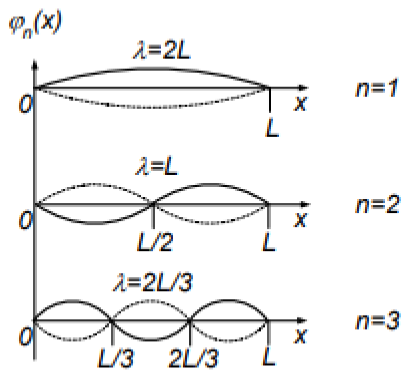


Egy adott pontra vonatkozóan a hullámot úgy számolhatjuk ki, hogy a kötél végétől egy Ψ_1 függvényt veszünk, ami valamilyen Ψ_2 -ként visszaverődik a faltól. A két hullám:

$$\psi_1(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx)$$
$$\psi_2(x,t) = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

Azt ki kell kötnünk, hogy a 0 pontban a kötél kitérése mindig 0, mert fix. Ezt hívjuk peremfeltételnek. Akkor teljesülhet ez, ha $\alpha = \pi$, mert ellentétes fázisban kell lennie a beeső hullámokkal, illetve a két amplitúdó egyenlő. Ilyenkor a két függvény összege $\Psi(x, t) = 2 * A_1 * sin(k * x) * cos(\omega * t)$. Ezen az látszik, hogy a távolság függvényében egy szinuszfüggvény is szoroz. Ilyenkor, ha $k * x = 0$, akkor $sin(k * x)$ is 0, tehát az egész szorzat 0, itt alakul ki állóhullám.

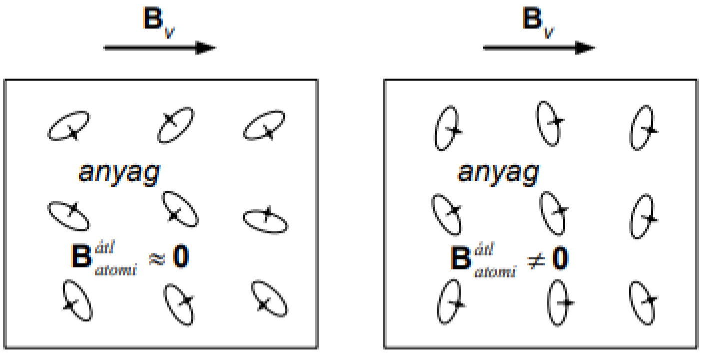
Ha a kötél mindkét oldalán rögzített (tehát egy újabb peremfeltétel x-re is kiírja, hogy 0), és úgy keresünk csomópontokat, akkor a függvény $\Psi(x, t) = 2 * A_1 * sin(k * L) * cos(\omega * t)$ lenne. Itt csak az x változott L-re az előző függvényből. Ezt ki akarjuk hozni 0-ra, amit úgy tudunk, ha $k = 0$, mivel ha a szinuszos tag 0, a többi már mindegy.



A $sin(k * L) = 0$ tagból kijön, hogy $k = n * \frac{\pi}{L}$, ahol $n = 1, 2, 3...$, vagyis bármely pozitív egész. A hullámhossz úgy áll elő, hogy $\lambda = 2 * L/n$, és különböző n értékekre az ábra mutat példákat. Itt látunk egy $\varphi_n(x)$ függvényt, ami igazából csak a hulámfüggvénynek azt a részét jelenti, ahol nincs ott a koszinuszos időfüggés, vagyis ez a helyfüggő tag: $\varphi_n(x) = 2 * A * sin(k * L)$.

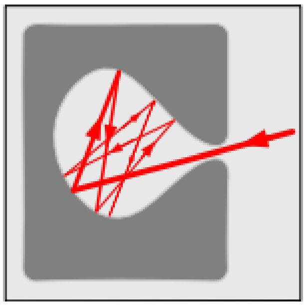
38. tétel

Elektromágneses hullám és anyag kölcsönhatása

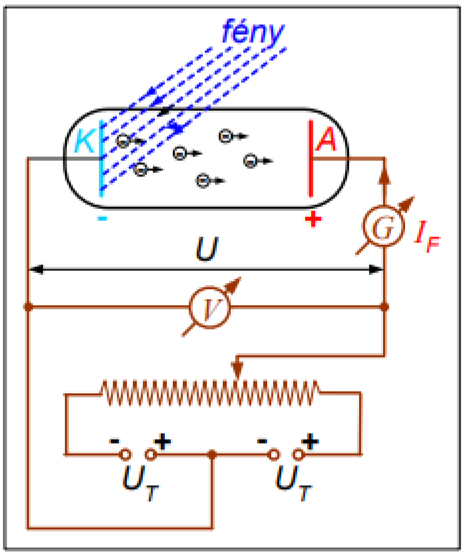


Kétféle anyag létezik, paramágneses és diamágneses. Előbbiek olyan anyagok, ahol az atomoknak van mágneses dipólusmomentuma, de átlagosan kioltják egymást. Mágneses tér hatására viszont azzal párhuzamosan (*para*lell) beállnak, ezért hívják őket így. Nem csak az atomok, de maga az ebből az anyagból készült test is beáll a mágneses tér irányába, például egy iránytű északnak. Eközben még saját mágneses erővanalai is lesznek, amik a test helyén párhuzamosak a külső mágneses erővonalakkal. A diamágneses anyagokban az atomok eredő dipólusmomentuma 0, viszont mágneses térbe helyezve indukálódik bennük, de nem párhuzamosan állnak be az erőtérre, hanem *dia*metriálisan, vagyis merőlegesen.

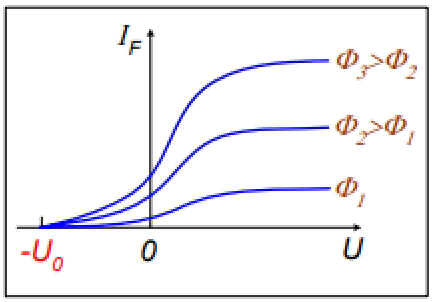
A foton (fekete test sugárzása, fotoeffektus, Compton-effektus)

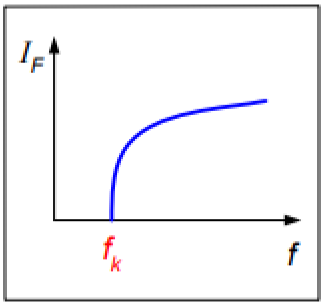


Azt tudták, hogy magasabb hőmérsékletű testek több hőhullámot sugároznak, de ezeknek a mértékét és frekvenciaeloszlását akarták pontosan meghatározni. Ehhez kellett egy jól szabályozható, termikus egyensúlyú test. Ez egy üreg belsejében valósulhat meg, és ott a fal tud sugározni. Itt azért van egyensúly, mert a sugárzott intenzitás a hőmérséklettel nő, az elnyelt sugárzás pedig az intenzitástól függ. Ettől a meleg pontok sugároznak, a hideg pontok pedig a sugárzást elnyelve melegednek, tehát egyensúly lesz. Hogy mérni is lehessen, lyukat vágtak a szélére. Ez nem zavar be nagyon a belső folyamatokba, mert ami sugárzás bejut, az a belső falon úgy verődik össze-vissza, hogy előbb nyelődik el, mint kijutna (ábra). Azért hívjuk fekete testnek, mert a lyuk minden sugárzást elnyel, és amit a lyukon mérünk, az szinte kizárólag a belső, vizsgált folyamatok sugárzása, amit úgy hívunk, hogy a fekete test sugárzása.

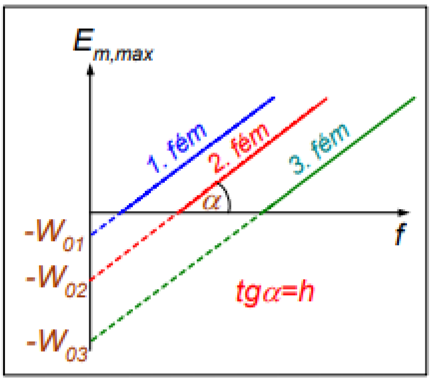


A fotoeffektussal tanulmányozhatjuk, hogy atomos szerkezetű anyaggal hogy viselkedik a sugárzás. Fotoeffektusnak hívjuk azt a jelenséget, amikor fénysugárzás hatására bizonyos anyagok (pl. alkáli fémek) felületéről elektronok lépnek ki. Ehhez egy kísérlet az ábrán látható rendszer, ahol egy fotoeffektust mutató fémlemezt vákuumcsőbe teszünk, a cső másik oldalán pedig egy kivezetéssel ellátott, nem érintkező elektród is van. A negatív töltésű elektródot más rendszerben is katódnak (*K*), a pozitívat anódnak (*A*) hívjuk. A rendszer része még egy érzékeny árammérő (*G*, galvanométer), és egy feszültségmérő (*V*), ami mér egy változtatható *U* feszültséget. Azt vesszük észre, hogy ha közelítőleg monokromatikus (szűk frekvenciasávú) fénnyel világítjuk meg a katódot, akkor *G* a feszültséggel arányos áramot mutat. Ezt úgy értelmezzük, hogy az elektronokat egy W_0 kilépési munkával tudjuk kiszakítani a helyükről, ilyenkor haladnak a pozitív töltés felé. Ha az elektron a beeső fénytől E energiát kap, és az nagyobb, annak valahová mennie kell, tehát egyrészt kilöki, másrészt a fennmaradó energiából (ha van) mozgási energia lesz: $E = W_0 + E_m$. A fény hatására létrejött elektront fotoelektronnak, a miattuk létrejövő áramot pedig fotoáramnak nevezik. Az ábrán látszik az áramerősség, ami attól függ, hogy az áramkörön eleve mekkora feszültség volt. Ha növeljük a feszültséget, az rásegít az elektronok mozgására, viszont ha csökkentjük, az fékezi őket, egy bizonyos negatív U_0 feszültség pedig már képes őket teljesen megakadályozni a mozgásban. Ennek a látványossága a besugárzott fény nagyobb intenzitásától (Φ) válik látványosabbá.



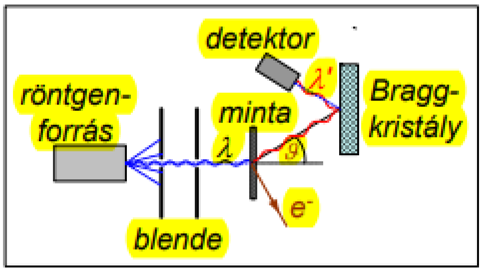


A fotoeffektus nem minden jelenségét magyarázza meg a klasszikus fizika: egyrészt az elektronok szinte azonnal kiszakadnak, pedig kiszámolva ez egy napnál is tovább tartana. A fotoeffektus a besugárzott fény frekvenciájának mértéke (ábra), pedig a W_0 kilépési munka minden frekvencián lesugározható energia lenne. Az utolsó probléma az alsó ábrán látható. Az $E_{m,max}$ maximális mozgási energia egyenlő az elektromos ellentér munkájával, vagyis $e * U_0$-al, ahol e az elektron töltése. Ha ez a maximális mozgási energia negatív, az elektronok nem tudnak kilépni a katódról, mert nem érik el a kilépési munkát. Ha viszont kilépnek, elvileg nem lineáris függvényt kell kapnunk a frekvencia szerint, viszont többféle fémnél is láttuk, hogy azt kapunk. Ez is egy ellentmondás a klasszikus fizikával.



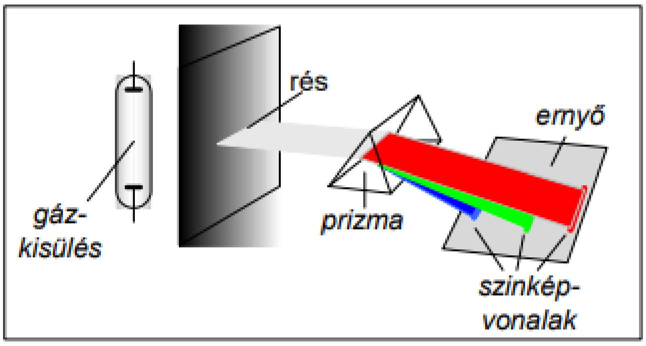
Erre a problémára a magyarázatot Einstein adta, aki leírta, hogy a energia magában a sugárzási térben is jelen van, energiaadagok formájában. Einstein szerint ezek is részecskék, amiknek tömege nincs, de impulzusuk van, ezeket nevezzük ma fotonoknak. Ezeket az energiaadagokat $h * f$ adja meg, ahol h a Planck-állandó, f pedig a frekvencia. Itt már látható, hogy a frekvencia függvényében lineáris az energia, a teljes kilépési képlet pedig: $h * f = W_0 + E_m$. Ez az összes eddig megmagyarázatlan jelenséget leírja.

Compton-effektus: ha röntgenhullámok egy mintával úgy ütköznek, hogy kiütnek egy elektront, akkor valamilyen szögben elhajlanak egy új hullámhosszal. Ez a hullámhossz a Bragg-kristályon történt elhajlással határozható meg. Az új hullámhossz a $\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - cos\vartheta)$ képletből számítható ki. Ezt, és a szögfüggést szintén nem magyarázza a klasszikus fizika, de ha a $E = h * f$ energiájú részecskék rugalmas ütközését vesszük alapul, akkor mivel h konstans, az ütközéstől megváltozó energiában csak f módosulhat.

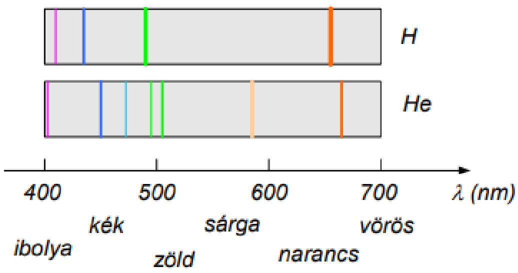


39. tétel

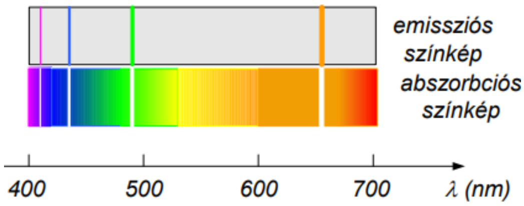
Színképvonalak és diszkrét atomi energianívók



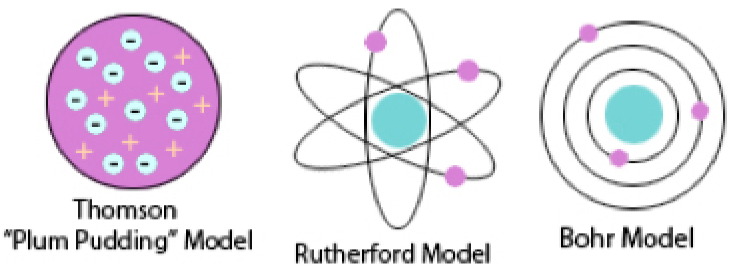
A hőmozgás által keltett hőmérsékleti sugárzás folytonos spektrumú, ami azt jelenti, hogy frekvenciák közt nagy spektrumon folytonosan oszlik el, minden frekvencia kisebb-nagyobb arányban képviselve van. Ez szorosan összefügg a sugárzást kibocsátó anyag szerkezetével: ezek az anyagok sok molekulából vagy erősen kölcsönható atomokból állnak, pl. szilárd anyagok, folyadékok. Gázoknál ez nincs így, gyenge kölcsönhatású atomokból állnak, és ezért másfajta sugárzás is létrejöhet. Ha ezekkel energiát közlünk (például elektromos erőtérrel gázkisülést okozunk), akkor csak a kibocsátó atomtól függő diszkrét $f_1, f_2, f_3 ...$ frekvenciákon sugároz. Ezt egy résen keresztül vezessük egy prizmára, ami a különböző hullámhosszú fényt különböző helyekre téríti. Ami így az ernyőn megjelenik, azt hívjuk vonalas színképnek, és az elkülönülő frekvenciák a látható tartományban színek szerint elkülönülnek. Az ábrán a hidrogén és hélium atomok vonalas spektruma látható.



Egy atom azokon a frekvenciákon képes sugárzást elnyelni, amin sugároz. Ezért ha teljes spektrumú fényt vetítünk át rajta, meg fog szűnni azokon a hullámhosszokon, ahol sugároz, ezt hívjuk elnyelési (abszorpciós) színképnek.

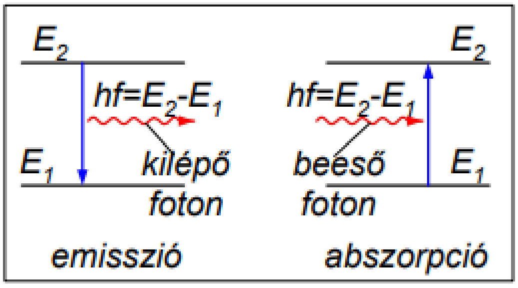


Bohr–modell



Egy atom modelljét folyamatosan finomították. A korai Thomson modellben egy nagy pozitív térben helyezkedtek el a negatív elektronok. Rutherford észrevette, hogy az atomokon a legtöbb sugárzás egyenesen halad át, tehát a belsejének nagy része üres, így az elektronokat a pozitív töltésű mag körül keringve képzelte el. Bohr arra akart magyarázatot adni, hogy a színképvonalakra mi a magyarázat. Arra jutott, hogy egy atom csak adott $E_1, E_2, E_3 ... E_m ... E_n$ energiával rendelkezhet (ami minden atomnál más), és ha az energiaszint lefelé változik, akkor a maradék energiát fotonokként adja le. Ez magyarázatot ad a vonalas színképre a következő képlettel: $E_m - E_n = h * f_{mn}$, ahol f_{mn} a kisugárzott foton frekvenciája, ha m

állapotból mentünk n állapotba. Ez érvényes visszafelé is: ha érkezik egy ilyen frekvenciájú foton, amit elnyel, akkor magasabb energiaszintre lép. Ezt a mechanizmust szemlélteti a mellékelt ábra. Ez nem csak arra ad magyarázatot, hogy a színképvonalak diszkrét frekvenciákat mutatnak, hanem arra is, hogy csak adott frekvenciájú fotonokat tud egy atom elnyelni. A képletet frekvenciára rendezve bármely két állapot közti frekvencia megmondható: $f = \frac{E_2 - E_1}{h}$, és az ilyen frekvenciás sugárzásokat tudja az atom elnyelni.



Már csak képlet kell arra, hogy a diszkrét (egymástól elkülönülő) energiaszintek pontos mértékeit meg tudjuk határozni. Bohr a Rutherford-féle modellbe építette be a diszkrét energiákat, de át kellett azt alakítani, mert a jelenlegi formájában nem tudná megmagyarázni ezt a jelenséget. Feltételezte, hogy valamilyen okokból léteznek olyan stacionárius elektronpályák (fix sugarú körök), amiken a keringő elektron nem sugároz. Ezeknek a sugarát úgy határozta meg, hogy az elektron perdülete (impulzusmomentuma, ami a forgási állapotot jellemző mennyiség) csak a $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ érték egész számú többszöröse lehet. A $\hbar$ karaktert úgy hívjuk, hogy “h-vonás”. A perdület képlete $L_n = r * m * v$, ahol r a sugár, m az elektron tömege, v pedig az a sebessége, amivel keringő pályán képes maradni. Bohr szerint ez csak az $L_n = n * \hbar$ értékeket veheti fel, ahol n bármely pozitív egész szám. Azt, hogy csak diszkrét értékeken létezhet, idegen szóval úgy hívjuk, hogy kvantált, ezért ezt az egyenletet Bohr-féle kvantumfeltételnek hívjuk.

Mértékegységek

Mechanika

t - idő [s, szekundum, másodperc]
s - út [m, méter]
r - elmozdulás [m]
v - sebesség [m/s, méter/szekundum]
a - gyorsulás [m/s^2, $méter/szekundum^2$]
F - erő [N, Newton]
m - tömeg [kg, kilogramm]
W - munka [J, Joule. "zsúl"]
E - energia [J]
g - gravitációs gyorsulás a Föld felszínén [m/s^2, $méter/szekundum^2$]
h - magasság [m]
M - nyomaték, forgatónyomaték [Nm, Newtonméter]

Hőtan

p - nyomás [Pa, Pascal]
V - térfogat [m^3, köbméter]
n - gáz anyagmennyisége [mol]
T - abszolút hőmérséklet [K, Kelvin]
Q - hőenergia [J]
U - gáz belső energiája [J]
μ - atomtömeg [kg]
ε_m - molekula kinetikus belső energiája [J]
c - közegbeli sebesség [m/s]
K - hőkapacitás [J/K, Joule/Kelvin]
c - fajhő [J/(kg*K), Joule/(kilogramm * Kelvin)]

Elektrosztatika

q, Q - töltés [Coulomb]
ε - permittivitás [F/m, Farad/méter]
E - térerősség [V/m, Volt/méter]
U - potenciál, feszültség [V, Volt]
I - áramerősség [A, Amper]
j - áramsűrűség [A/m^2, Amper/négyzetméter]
R - ellenállás [Ω, Ohm]
Φ - fluxus [Vs, Voltszekundum]
A - felület [m^2, négyzetméter]
C - kapacitás [F, Farád]
d - távolság [m]
P - teljesítmény [W, Watt]

Magnetosztatika

B - mágneses erőtér [Vs/m^2, Voltszekundum/négyzetméter]
μ - permeabilitás [Vs/Am, Voltszekundum/Amperméter]

Rezonancia

ω - körfrekvencia [rad/s, radián/másodperc]
φ - fázis [rad, radián]
x, y, z - kitérés [méter]
D - rugóállandó [N/m, Newton/méter]
n - törésmutató [-, ez egy arányszám]
I - intenzitás [W/m^2, Watt/négyzetméter]