Bevezetés a számításelméletbe 2. tételsor

Zsolt Hegyi

Kellemes vizsgázást!

Tartalomjegyzék

1. tétel

FAKTORIÁLIS Definíció: Az $n(n-1)(n-2)... \cdot 2 \cdot 1$ szorzatot n **faktoriálisának** nevezzük. Definíció szerint $0! = 1$.
Jel: $n!$

PERMUTÁCIÓ Definíció: Az n elem összes lehetséges sorrendjének a száma $n!$ és ezt hívjük **permutációnak**.

ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓ Definíció: k_1 darab első típusú elem, ..., k_n darab n-edik típusú elem lehetséges sorbarendezésének a száma a $k_1 + k_2 + ... + k_n$ **ismétléses permutációi**. Számuk:

$$\frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$$

VARIÁCIÓ Definíció: n-ből k elem összes lehetséges sorrendben való kiválasztása az n elem k-ad osztályú (ismétlés nélküli) **variációja**, ezek száma:

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ha $k = n$, akkor permutációról beszélünk.

ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ Definíció: n elemből k tagú sorozatok kiválasztása, ahol egy-egy elem többször is szerepelhet, az n-elem k-ad osztályú **ismétléses variációja**. Ezeknek a száma:

$$n^k$$

KOMBINÁCIÓ Definíció: Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma: n elem k-ad osztályú **kombinációja**. Száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Az $\binom{n}{k}$ a binomiális együttható.

ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ Definíció: n elemből k kiválasztása, ha a sorrend nem számít, de az elemek többször is szerepelhetnek: n elem k-ad osztályú **ismétléses kombinációi**. Számuk:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

BINOMIÁLIS TÉTEL Tétel: Tetszőleges valós x, y-ra és nemnegatív egész n-re:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + ... \binom{n}{k} x^{n-k}y^k + ...$$

PASCAL HÁROMSZÖG: A háromszög csúcsán álljon az $\binom{0}{0}$ együttható. Alatta álljon az $\binom{1}{0}$ illetve a $\binom{1}{1}$ együttható. A piramis $(k-1)$-edik sorában álljanak a $\binom{k}{0}$, $\binom{k}{1}$ ... $\binom{k}{k-1}$, $\binom{k}{k}$ együtthatók. A legutóbbi állítás alapján a Pascal-háromszög minden sorának a sorösszege: 2^{i-1}. Ez abból is belátható, hogy minden sor összege kétszerese az előzőnek, ugyanis az együtthatókat úgy is meg lehet kapni, hogy az új elem a felette álló két együttható összegéből áll össze.

BINOMIÁLIS ÖSSZEG Tétel: Minden n nemnegatív számra

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2. tétel

GRÁF Definíció: Egy **gráf** rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz, E pedig az ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza, V elemeit **pontoknak** v. **csúcsoknak** nevezzük, E elemeit pedig **éleknek**. A csúcsok számát v(G)-vel jelöljük, az élekét pedig e(G)-vel. A gráf csúcshalmazát V(G)-vel, az élhalmazt pedig E(G)-vel jelöljük.

HUROKÉL, TÖBBSZÖRÖS ÉL Definíció: Ha az $e \in E$ a v_1, v_2 párnak felel meg, akkor **hurokélnek** nevezzük azon éleket, melynek két végpontja ugyanazon pont (tehát $v_1 = v_2$). Ha két nem különböző nem hurokélnek végpontjai azonosak, akkor a két élet **párhuzamos** v. **többszörös élnek** nevezzük.

EGYSZERŰ GRÁF Definíció: Azokat a gráfokat, melyek nem tartalmaznak hurokéleket és többszörös éleket, **egyszerű gráfnak** nevezünk.

KOMPLEMENTER GRÁF Definíció: Egy G gráf **komplementerén** azt a $\bar{G}$ gráfot értjük, amelyet akkor kapunk, ha a G-t a $K_{v(G)}$ részgráfjának tekintjük és $\bar{G}$-ben azon pontpárok vannak összekötve, amelyek G-ben nincsenek.

IZOMORFIA Definíció: G = (V,E) és G'= (V',E') gráfok **izomorfak**, ha van olyan egyértelmű megfeleltetés (bijekció), hogy G-ben pontosan akkor szomszédos két pont, a G'-ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak, és a szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

RÉSZGRÁF Definíció: A G' = (V',E') gráf a G = (V,E) **részgráfja**, ha a $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G'-ben, ha a G-ben is illeszkedők.

FESZÍTŐ RÉSZGRÁF Definíció: G' = (V',E') gráf a G = (V,E) **feszítő részgráfja**, ha G' részgráfja G-nek és V' = V.

FESZÍTETT RÉSZGRÁF Definíció: Ha E' pontosan azokból az E-beli élekből áll, amelyeknek két végpontja V'-ben van, és az E' az összes ilyen élet tartalmazza, akkor G' a G gráf V' által feszített részgráfja.

ÉLSOROZAT, ÚT, KÖR Definíció: Egy $(v_0, e_1, v_1 ... v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot **élsorozatnak** nevezzük, ha e_i a v_{i-1}-et és v_i-t összekötő él. Ha $v_0 = v_k$, akkor az élsorozat zárt. Ha a csúcsok mind különbözőek, akkor egy **útról** beszélünk. Ha a csúcsok mind különbözőek és az élsorozat zárt, akkor pedig egy **körről**.

ÖSSZEFÜGGŐSÉG Definíció: G gráf **összefüggő**, ha bármely 2 csúcs között létezik élsorozat vagy út.

KOMPONENS Definíció: G gráf komponense olyan H feszített részgráfja G-nek, amire teljesül, hogy H összefüggő és bárhogy egy további csúcsot hozzáteszünk, már nem összefüggő feszített részgráfot kapunk.

FA Definíció: Az összefüggő körmentes gráfokat **fának** nevezzük. Amennyiben körmentes egy gráf, de nem összefüggő (tehát több fából áll), akkor azt **erdőnek** nevezzük.

FA FOKSZÁMA Tétel: Minden legalább 2 pontú fában van legalább 2 egy fokszámú pont.

Tekintsük a fában található leghosszabb utat, legyen ez $(v_1, v_2, ..., v_k)$, ekkor beláthatjuk, hogy v_1 és v_k végpontok egyfokúak lesznek. T.f.h v_k nem egy fokszámú, tehát belőle vezet még él a fa valamely pontjába. Az út többi pontjába nem vezethet, mivel a fa definíció alapján körmentes, és új pontba sem vezethet, mivel akkor egy hosszabb utat kapnánk, amivel ellentmondást kapunk.

FA ÉLEINEK SZÁMA Tétel: n pontú fa éleinek száma n-1.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. n = 2-re az állítás triviálisan teljesül. T.f.h. az állítás igaz minden $n < n_0$-ra. Az előző tétel szerint minden n_0 fában van egy fokszámú pont, ezt hagyjuk el. Ha elhagyjuk ezt a pontot és a hozzá tartozó élet, akkor mivel a maradék $n_0 - 1$ fára már igaz az állítás, látható, hogy az n_0 pontú eredeti fának $n_0 - 1$ éle van.

Az F gráf a G gráf feszítőfája, ha F fa, és részgráfja G-nek.

FESZÍTŐFA LÉTEZÉSE Tétel: Minden összefüggő G gráf tartalmaz feszítőfát.

Ha G-ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élét, ha a maradék gráfban még mindig van kör, akkor annak is hagyjuk el egy tetszőleges élét, folytatjuk, amíg körmentes lesz a gráf. Ha már nincsen több kör, akkor nézzünk rá, hogy mit kaptunk - az összefüggőség nem sérül, mivel körök egy-egy élét hagytuk el, és pontot se hagytunk el - tehát amit kaptunk, az láthatóan G gráf feszítőfája.

3. tétel

`http://cs.bme.hu/bsz2/bfs.pdf`

A BFS-algoritmus futása során a következőket tartjuk nyilván:

- $b(i)(i = 1, 2, 3, ...)$: az i-edikként bejárt csúcs
- $t(v)(v \in V)$: v távolsága s-től
- $m(v)(v \in V, v \neq s)$: v-t megelőző csúcs az algoritmus által megtalált, s-ből v-be vezető legrövidebb úton
- j: az eddig bejárt csúcsok száma
- k: a jelenleg aktív csúcs sorszáma a $b(1), b(2), ...$ sorozatban.

BFS Algoritmus: Bemenete a BFS algoritmusnak: Egy G gráf és egy $s \in V$ csúcs.
Az algoritmus:

- **0.** $j = 1$, $k = 1$, $b(1) = s$, $t(s) = 0$, minden $v \neq s$-re $t(v) = *$
- **1.** HA a b(k) csúcsnak van olyan v szomszédja, amelyre $t(v) = *$, AKKOR:
  - $j = j + 1$
  - $b(j) = v$
  - $t(v) = t(b(k)) + 1$
  - $m(v) = b(k)$

- Vissza az **1.** lépéshez.

- **2.**
  - Ha $k = j$, akkor **STOP**.
  - $k = k + 1$
  - Vissza az **1.** lépéshez.

Az algoritmus lineáris futásidejű, tehát $c \cdot e$ lépésszámú.

BFS-FA Definíció: A BFS algoritmus futtatása után kapott F feszítőfát nevezzük **BFS fának**. F összefüggő, ha az eredeti bemeneti gráf is összefüggő volt, valamint F nem tartalmaz kört (a fa definíciója miatt). Az is megfigyelhető, hogy bármely $v \in V$ csúcsra az s-et v-vel összekötő F-beli út a legrövidebbek egyike az s-ből a v-be vezető G-beli utak közül.

Kruskal Algoritmus: Bemenet: G gráf és az élekhez tartozó w súlyfüggvény. Az éleket rendezzük sorba úgy, hogy a legalacsonyabb költségűek legyenek először a sorban. A sorban kezdjünk előre haladni. Ha az él bevétele esetén a kapott gráf körmentes marad, akkor vegyük be. Ezt addig ismételjük, amíg van izolált pont, vagy amíg az élsorozat végére nem érünk. A kapott gráf a G gráf minimális költségű feszítőfája.

Ezt az eljárást **mohó algoritmusnak** nevezzük, mivel a végrehajtás során minden lépésben az éppen akkor a legjobbnak tűnő lehetőséget választjuk ki.

MINIMÁLIS SÚLYÚ FESZÍTŐFA Definíció: Legyen G gráf és annak éleihez rendelt $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. A gráfnak azon feszítőfáját, melyre ez a súlyfüggvény minimális, a gráf **minimális súlyú feszítőfájának** nevezzük.

Tétel: A Kruskal-algoritmus minimális súlyú feszítőfát talál.

Két állítást kell bizonyítanunk - azt, hogy feszítőfát ad az algoritmus, és azt, hogy az minimális. Kezdjük az elsővel. Legyen G egy összefüggő, súlyozott gráf (tehát van súlyfüggvény hozzárendelve) és F legyen egy részgráfja, amit az algoritmus produkál. F-ben nem lehet kör, mivel az algoritmus egy fát épít. F nem lehet nem összefüggő sem, mivel az első él (amit az algoritmus talál), ami összeköt két független komponenst F-ben még nem hozhat létre kört. Tehát F feszítőgráf.
A következő állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be. Legyen H egy élhalmaz, amit az algoritmus a futása során generál, a minimális súlyú feszítőfának ezt a H élhalmazt tartalmaznia kell, hiszen ebben vannak minimális súlyú élek. Az első lépésnél az állítás igaz, hiszen H üres, és minden gráfnak részgráfja az üres gráf. A k-adik lépésnél vegyük az állítást igaznak és legyen T a minimális súlyú feszítőfa, ami tartalmazza H-t. Ha az algoritmus által kiválasztott következő él, e, szintúgy benne van a T-ben, akkor az állítás szintúgy igaz a $H + e$ élhalmazra. Különben $T + e$ élhalmazban létezik egy C kör, és ezen kívül még létezik egy olyan f él, ami befejezi a C kört, de nem része H-nak. (Ha nem létezne f, akkor e-t már nem vehettük volna be, mivel kört produkált volna $H + f$-ben). Ekkor $T - f + e$ szintúgy egy fa, és azonos az összsúlya T-jével, hiszen T-nek minimális az összsúlya, és f-nek a súlya nem lehet kisebb, mint e-nek, hiszen akkor e helyett az f élet választotta volna az algoritmus. Tehát $T - f + e$ egy minimális súlyú feszítőfa. Ezek alapján az indukciós feltevést bebizonyítottuk, és

az állítás igaz, amikor H egy feszítőfává válik, ami csak akkor igaz, ha H egy minimális súlyú feszítőfa.

Alkalmazás: Pontok - városok, élek - utak, súly - hossz; Villamos hálózatok, Kirchhoff-törvények, áramköri elemekhez súlyokat párosítunk

4. tétel

SÍKBARAJZOLHATÓSÁG Definíció: G **síkbarajzolható** gráf, ha lerajzolható úgy (a síkba), hogy az élei a csúcsokon kívül sehol máshol ne keresztezzék egymást.

TARTOMÁNYOK Definíció: G síkbarajzolt gráf **tartományain** azon síkrészeket értjük, melyeket közrefognak az élek. Csak síkbarajzolt gráfok esetén beszélhetünk ezekről!

GÖMBRE RAJZOLHATÓSÁG Tétel: G gráf pontosan akkor síkbrajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás: Egy síkban lévő gráf leképezhető gömbfelületre oly módon, hogy ezt a gömbfelületet valamelyik pontjával a síkra helyezzük, ezt a pontot tekintjük a déli pólusként, és az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaiba. Ezeknek a vonalaknak van metszéspontja a gömbön, ezek szolgáltatják a kívánt vetítést. Ez az ú.n. sztereografikus projekció. Ezt visszafele is meg lehet ismételni.

EULER-FORMULA Tétel: Ha egy összefüggő síkbeli gráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van (beleértve a külső tartományt is), akkor eleget tesz az Euler-formulának:

$$n + t = e + 2$$

Bizonyítás: Tekintsük a gráf egy C körét (ha van) és ennek egy a élét. A C kör a síkot két részre osztja. Ezeket egyéb élek további tartományokra oszthatják, de mindkét részben van egy olyan tartomány, melynek a a határa. Ha a-t elhagyjuk, a két tartomány egyesül, azaz a tartományok száma eggyel csökken. A csúcsok száma nem változik, tehát a elhagyásával az $n-e+t$ érték nem változik. Ezt az eljárást addig folytassuk, amíg a gráfban nem marad kör. Ekkor viszont már csak egy feszítőfa maradt. Elég az állítást erre belátni, ami triviális, hiszen $t = 1$ és $e = n-1$.

BECSLÉS AZ ÉLEK SZÁMÁRA Tétel: Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak a száma legalább 3, akkor az előbbi jelölésekkel:

$$e \leq 3n - 6$$

Bizonyítás: Vegyük G tetsz. síkbarajzolását és jelöljük az egyes tartományokat határoló élek számát $c_1, c_2 ... c_t$-vel. Mivel a gráf egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja, tehát $c_i \geq 3$. Nyilvánvaló, hogy egy élhez legfeljebb 2 tartomány tartozik, tehát ha összegezzük a tartományokat határoló élek számát minden tartományra, akkor legfeljebb $2e$-t kaphatunk. Tehát:

$$3t \leq c_1 + c_2 + ... + c_t = \sum_{i=1}^{t} c_i \leq 2e$$

Az Euler-formulát felhasználva:

$$3(e - n + 2) \leq 2e$$

Ebből átrendezéssel megkapjuk az eredményt.

BECSLÉS AZ ÉLEK SZÁMÁRA Tétel: Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf és minden köre legalább 4 hosszú, valamint legalább 4 pontja van, akkor:

$$e \leq 2n - 4$$

Minden tartományt legalább 4 él határol. Az előző biz. gondolatmenete alapján $4t \leq 2e$ és ez alapján megkapjuk a képletet.

BECSLÉS MINIMÁLIS FOKSZÁMRA Tétel: Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor

$$\delta = min\, d(v) \leq 5$$

azaz a minimális fokszám legfeljebb 5.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy a gráf pontjainak a száma legalább 3. T.f.h. $\delta \geq 6$. Mivel a fokszámok összege egyenlő az élszámok kétszeresével, $6n \leq 2e$. Az élszám-becslés alapján azonban $2e \leq 6n - 12$, ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel $6n \not\leq 6n - 12$.

5. tétel

KURATOWSKI-GRÁFOK Tétel: A Kuratowski-gráfok, tehát a K_5 és a $K_{3,3}$ nem rajzolhatóak síkba.

Bizonyítás: Ha K_5 síkbarajzolható volna, akkor teljesülne rá az élbecslés tétel. Azonban K_5 pontjainak száma 5, éleinek száma 10 és $10 \nleq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, tehát K_5 nem síkbarajzolható. A $K_{3,3}$ minden körének hossza legalább 4. Ha volna 3 hosszú kör, legalább 2 "kút" vagy "ház" között kellene annak mennie, ami nem lehetséges. Így tehát a 2. élbecslés alkalmazható. $K_{3,3}$ pontjainak a száma 6, éleinek száma 9 és $9 \nleq 2 \cdot 6 - 4 = 8$, tehát $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Érdemes megjegyezni, hogy ezeknek a topologikus izomorf megfelelőit (tehát ha egy él helyett 2 hosszú út van) se lehet síkba lerajzolni. Ezeket úgy tudjuk konstruálni, hogy egy él helyett vagy egy új, 2-fokú csúccsal helyettesítünk, vagy egy 2-fokú csúcsot egy éllel.

TOPOLOGIKUS IZOMORFIA Definíció: A G és H gráfok **topologikusan izomorfak**, ha a fentebb említett transzformációk ismételt alkalmazásával izomorf gráfokba transzformálhatóak.

KURATOWSKI-TÉTEL Tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf lenne $K_{3,3}$-al vagy K_5-el. **A bizonyítás a szükségességre fentebb található.**

FÁRY-WAGNER TÉTEL Tétel: Ha G egy egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbeli ábrázolása is, melyben minden élet egy egyenes szakasszal rajzoltunk le.

DUÁLIS Definíció: Egy G gráf **duálisát** úgy kapjuk meg, hogy G tartományaihoz rendelünk pontokat (G* pontjai) és G*-ban akkor kötünk össze két pontot, ha a megfelelő G-beli tartományoknak van közös határvonala.

A duális gráfban tehát $n* = t$ és $t* = n$, valamint $e* = e$. A párhuzamos élekből "soros élek", hurokélekből pedig elvágó élek lesznek.

ELVÁGÓ ÉLHALMAZ Definíció: G összefüggő gráf, $x \in E(G)$. x elvágó élhalmaz, ha $(V(G), E(G)\backslash x) = G'$ és G' nem összefüggő. x vágás, ha x elv. élhalmaz, de semelyik részhalmaza sem az.

VÁGÁSOK ÉS KÖRÖK Tétel: G összefüggő és síkbarajzolt, ekkor ha C kör a G-ben, a C* vágás lesz G duálisában, G*-ban és fordítva, ha C vágás G-ben, a C* kör lesz a G*-ban.

FA DUÁLISON BELÜL Tétel: G összefüggő, egyszerű gráf, F ezen belül feszítőfa. A G* duálison belül ez az F a saját komplementereként fog megjelenni.

6. tétel

EULER-ÚT ÉS KÖR Definíció: A G gráf **Euler-körének** nevezünk egy zárt élsorozatot, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza G összes élét. Ha az élsorozat nem feltétlenül zárt, akkor **Euler-útról** beszélünk.

EULER-KÖR LÉTEZÉSE Tétel: G összefüggő gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha G minden pontjának fokszáma páros.

Először lássuk be, hogy ha van a gráfban E-kör, akkor minden pont foka páros. Induljunk el a gráf tetszőleges pontjából és járjuk körbe az E-kör mentén. Minden pontban ugyanannyiszor mentünk be, mint ahányszor kimentünk, a ki-bemenések száma a pont fokszáma. Ez biztosan páros. Másik irány jegyzet 29. oldal, baszódjon meg ez a bizonyítás.

EULER-ÚT LÉTEZÉSE Tétel: Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-út, ha a páratlan fokszámú pontok száma 0 vagy 2.

Az előző tétel bizonyítása alapján, ebben az esetben ha 0 a páratlan fokszámú pontok száma, akkor Euler-körről is beszélhetünk, ha 2, akkor az élsorozat nem zárt, a két végpontnak lesz eltérő a fokszáma, mivel ezt úgy tudjuk képezni, hogy a két végpontot összekötő élt elhagyjuk.

HAMILTON-ÚT ÉS KÖR Definíció: Egy G gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy H kört, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Egy utat pedig Hamilton-útnak nevezünk, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

SZÜKSÉGES FELTÉTEL A H-KÖR (ÚT) LÉTEZÉSÉHEZ Tétel: Ha a G gráfban létezik k olyan pont, melyeket elhagyva a gráf több mint k komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban H-kör. Ha több mint k+1 komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban H-út se.

Indirekt t.f.h. van a gráfban H-kör, ez legyen $(v_1, v_2, ..., v_n)$ és legyen $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$ az a k pont, amelyet elhagyva a gráf több mint k komponensre esik. Az elhagyott pontok közötti "ívek" biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl. a $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, ..., v_{i_2-1})$ is összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti H-kör éle fut. Mivel épp k ilyen ívet kapunk, ezért nem lehet több komponens k-nál (kevesebb lehet, mivel különb. ívek közt futhatnak élek). U.a. bizonyítjuk útra. Ha egy H-útból elhagyunk k pontot, legfeljebb k+1 öf. ív marad.

ELÉGSÉGES FELTÉTEL - ORE TÉTEL Tétel: Ha az n pontú G egyszerű gráfban minden olyan $x, y \in V(G)$ pontpárra, amelyre $x, y \notin E(G)$ (nem szomszédosak), teljesül az, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van H-kör.

Indirekt t.f.h. a gráf kielégíti a feltételt, de nincs benne H-kör. Vegyünk hozzá a gráfhoz éleket úgy, hogy továbbra se legyen benne H-kör. Ezt egészen addig csináljuk, amíg már akárhogyan is veszünk hozzá egy élet, lesz a gráfban H-kör. Az így kapott

G' gráfra továbbra is teljesül a feltétel, hiszen új élek behúzásával "rossz pontpárt" nem lehet létrehozni. Biztosan van két olyan pont, hogy $x, y \notin E(G')$. Ennek a behúzásával már lesz $G' + x, y$-ban H-kör, tehát G'-ben van H-út. Legyen ez $P = z_1, z_2, ..., z_n$ ahol $z_1 = x$ és $z_n = y$. Ha x szomszédos a P út valamely z_k pontjával, akkor y nem lehet összekötve z_{k-1}-el, mert akkor az egy H-kört adna. Így tehát y nem lehet összekötve legalább d(x) ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

ami viszont ellentmondás, hisz $x, y \notin E(G)$.

ELÉGSÉGES FELTÉTEL - DIRAC TÉTEL Tétel: Ha egy n pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább n/2, akkor a gráfban létezik H-kör.

Ez az előző tételből következik, hiszen ha minden pont foka legalább n/2, akkor teljesül az Ore-tétel feltétele, mivel bármely pontpárra

$$d(x) + d(y) \geq n$$

7. tétel

GRÁFOK SZÍNEZÉSE Definíció: Egy G hurokmentes gráf **k színnel színezhető**, ha minden csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. G **kromatikus száma** $\chi(G) = k$, ha k színnel meg lehet színezni G-t, de $k-1$-gyel már nem. Egy ilyen színezésnél az azonos színű pontok halmazát **színosztálynak** nevezzük.

KLIKK Definíció: G egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretet, azaz pontszámát $\omega(G)$-vel jelöljük és a gráf **klikkszámának** nevezzük.

Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bizonyítás: G pontjainak kiszínezésével a maximális klikk pontjait is kiszínezzük, mégpedig különböző színekkel. k nagyságú klikk esetén legalább k szín kell.

MYCIELSKI-KONSTRUKCIÓ Tétel: Minden $k \geq 2$ egész számra van olyan G_k gráf, hogy $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$.

Bizonyítás: G_2-nek nyilván megfelel a 2 pontot és egy élt tartalmazó gráf. T.f.h. hogy már megkonstruáltuk a fenti tulajdonságokkal rendelkező G_k gráfot. Ebből konstruáljuk meg a G_{k+1}-et. Jelöljük G_k pontjait $v_1, v_2, ..., v_n$-nel. Vegyünk fel $n+1$ darab új pontot, $u_1, u_2, ..., u_n$ és w-t, valamint az új éleket a következőképp: Minden u_i-t kössünk össze v_i minden G_k-beli szomszédjával, de magával a v_i-vel ne. Végül w-t kössük össze u_i-val (de a többi v ponttal ne). Belátjuk, hogy az így kapott G_{k+1} gráf kielégíti a feltételeket. Először lássuk be, ha G_k-ban nem volt háromszög, akkor G_{k+1}-ben sincs, azaz a klikkszáma még mindig 2. T.f.h. mégis van háromszög a G_{k+1}-ben. Ennek nyilván nem lehet mindhárom csúcsa G_k-ban, mivel ekkor volna már háromszög G_k-ban is. Ha w a háromszög egyik csúcsa, az sem jó, mivel akkor a háromszög másik két csúcsa u_i és u_j lehet, viszont ezek nem szomszédosak. Ha u_i a háromszög egyik csúcsa, akkor a maradék két csúcs csak v_x és v_y lehet. Mivel azonban u_i szomszédai megegyeznek a v_i szomszédaival (kivéve w), ezért v_i-vel is szomszédosnak kellett volna lennie v_x és v_y-nak, ekkor létezett volna G_k-ban is háromszög, ami ellentmondás. Ebből kijön az, hogy $\chi(G_{k+1}) \leq k+1$. Színezzünk ki minden v_i-t valamilyen színnel, az u_i-ket színezzünk ugyanolyanra (mivel v_i-vel nem szomszédos) és w legyen a plusz egy szín, így jól színeztük ki $k+1$ színnel. T.f.h. $\chi(G_{k+1}) = k$. Jelöljük x pont színét c(x)-el, a színeket pedig $1, 2, ..., k$-val. Azt is feltehetjük, hogy $c(w) = k$. Mivel w minden u_i ponttal össze van kötve, ezért az u_i pontokat a $1, 2, ...k-1$ színekkel színezzük. Megadunk egy c' színezést a v_i pontok által feszített részgráfon (Ez éppen G_k-val izomorf részgráf). Ha $c(v_i) = k$ akkor legyen $c'(v_i) = c(u_i)$, különben $c'(v_i) = c(v_i)$, vagyis a k színűeket színezzük át a "párjuk" színére. Belátjuk, hogy c' egy jó $k-1$ színezése G_k-nak, ami ellentmondás.

8. tétel

MOHÓ SZÍNEZÉS Algoritmus: A mohó színezés sorba rendezi a csúcsokat $(v_1, v_2...v_n)$ és a v_i.-hoz azon legkisebb színt rendeli, amit a $(v_1, ...v_{i-1})$ szomszédokhoz még nem rendelt. A mohó színezés nem feltétlenül a legoptimálisabb színezést adja.

$\chi(G)$ ÉS $\Delta(G)$ VISZONYA Tétel: Minden G gráfra teljesül, hogy

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Bizonyítás: A mohó színezés segítségével bizonyítjuk. Színezzük ki G pontjait $(v_1, v_2, ..., v_n)$ úgy, hogy az i-edik lépésben v_i-t olyan színre színezzük, ami nem szerepel v_i kiszínezett szomszédságában. Mivel v_i-nek legfeljebb $\Delta(G)$ kiszínezett szomszédja lehet, és mindegyik szomszéd legfeljebb egy-egy színt zár ki, ezért v_i színezése elvégezhető a rendelkezésre álló színek valamelyikével (a kimaradó $\Delta(G)+1$)-edik). v_n kiszínezése után G egy $(\Delta(G)+1)$ színezését kapjuk meg.

Érdemes megjegyezni, hogy $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ abban az esetben, ha teljes gráfról vagy húr nélküli páratlan körről beszélünk.

BROOKS-TÉTEL Tétel: Ha G egyszerű, összefüggő, nem teljes gráf, nem páratlan hosszúságú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$, tehát a kromatikus szám nem nagyobb, mint a maximális fokszám.

INTERVALLUMGRÁF Definíció: Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], ...$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek $p_1, p_2, ...$ egy G gráf pontjai és p_i, p_j akkor és csak akkor legyen él G-ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **intervallumgráfnak** nevezzük.

INTERVALLUMGRÁF SZÍNEZÉSE Tétel: G intervallumgráf, emiatt:

$$\omega(G) = \chi(G)$$

Mohó színezéssel bizonyítjuk, méghozzá úgy, hogy az intervallumokat bal végpontja szerint rendezem és ezek alapján növekvő sorrendben színezem, akkor optimális színezést kapok. T.f.h. k színnel színez a mohó algoritmus. A cél az, hogy belássuk a következőt:

$$k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$$

. MAJD.

PÁROS GRÁF Definíció: Egy G gráfot **páros gráfnak** nevezünk, ha G pontjainak V(G) halmazát két részre, egy A és B halmazra tudjuk osztani úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, a másik pedig B-ben van. Ennek jelölése: $G = (A, B)$. A $K_{a,b}$-vel jelölt teljes páros gráf olyan $G = (A, B)$ gráf, ahol $|A| = a$ és $|B| = b$ és minden A-beli pont össze van kötve minden B-beli ponttal.

PÁROSÍTÁS LÉTEZÉSE Tétel: Egy G gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha minden G-ben lévő kör páros.

Bizonyítás: Ha G páros gráf, és C egy kör G-ben, akkor C pontjai felváltva vannak A-ban és B-ben, így $|V(C)|$ nyilván páros. Ha G minden köre páros hosszú, akkor megadhatjuk az A és B halmazt. Válasszunk egy tetszőleges v pontot, legyen ez A első pontja. v minden szomszédját tegyük bele B-be, majd ezeknek a szomszédjait rakjuk bele A-ba. Ezt folytassuk, amíg ki nem fogyunk a pontokból. Ez biztosan jó elosztás, mivel ha például lenne A-ban két szomszédos pont, akkor léteznie kéne a gráfban páratlan körnek, így ellentmondásra jutnánk. Nem öf. gráfok esetén komponensenként hajtsuk végre.

KROMATIKUS SZÁM ÉS PÁROSÍTÁS KAPCSOLATA Tétel: Egy legalább egy élt tartalmazó G gráf akkor és csak akkor páros, ha $\chi(G) = 2$.

Ha a gráf páros, akkor az egyik oldalon lévő pontokat pirossal, másik oldalon lévőeket kékkel megszínezzük. Ha a gráfnak van egy éle, akkor ennek a két végpontját már nem színezhetjük egy színűre. A színek megfelelnek a két halmaznak, amire fel tudjuk bontani a páros gráfokat.

9. tétel

PÁROSÍTÁS Definíció: **Párosításnak** vagy **részleges párosításnak** nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élnek nincsen közös pontja. Az ilyen éleket **független éleknek** nevezzük. A részleges párosítás **lefedi** éleinek végpontjait. Egy párosítás **teljes párosítás**, ha a gráf minden pontját lefedi.

FLEN/LEFOGÓ ÉLEK/PONTOK Definíció: Jelöljük $\nu(G)$-vel a G gráfban található **független élek** maximális számát. $X \subseteq V(G)$ egy **lefogó ponthalmaz**, ha G minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza. A lefogó pontok minimális számát $\tau(G)$-vel jelöljük. $Y \subseteq E(G)$ **lefogó élhalmaz**, ha minden pontot lefog. A lefogó élek minimális számát $\rho(G)$ jelöli. $X \subseteq V(G)$ **független ponthalmaz**, ha nincs benne két szomszédos pont. A független pontok maximális száma $\alpha(G)$

CUCCOS VISZONY TÉTEL Minden G gráfra:

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

Bizonyítás: Legyen M maximális méretű független élhalmaz. Mivel pusztán M éleinek lefogásához legalább $|M|$ pontra van szükség, ezért $\tau(G) \geq |M| = \nu(G)$. Hasonlóan bizonyítjuk a második állítást is.

GALLAI TÉTEL I. Tétel: Minden olyan G gráfra, mely hurokmentes:

$$\tau(G) + \alpha(G) = v(G) = n$$

Bizonyítás: Egy X halmaz pontjai akkor és csak akkor függetlenek, ha a $V(G)\backslash X$ halmaz lefogó ponthalmaz. Hiszen ha X nem független, akkor van két összekötött pont, és így $V(G)\backslash X$ nem fogja le ezt az élt. Fordítva, ha $V(G)\backslash X$ nem fog le egy huroktól különböző élt, akkor X-ben ennek az élnek mindkét végpontja szerepel. Tehát $\tau(G) \leq |V(G)\backslash X|$ teljesül minden X független ponthalmazra. Ebből pedig következik, hogy a $\tau(G) + \alpha(G) \leq v(G)$. Hasonlóan $\alpha(G) \geq |V(G)\backslash Y|$ minden Y lefogó ponthalmazra, amiből $\tau(G) + \alpha(G) \geq v(G)$ következik.

GALLAI TÉTEL II. Tétel: Minden olyan G gráfra, melyben nincs izolált pont:

$$\nu(G) + \rho(G) = v(G) = n$$

Bizonyítás: Egy $\nu(G)$ elemű X független élhalmaz lefog $2\nu(G)$ különböző pontot. A többi pont (mivel nincs izolált) nyilván lefogható $v(G) - 2\nu(G)$ éllel, így $v(G) - \nu(G) \geq \rho(G)$. Másrészt, ha Y egy minimális lefogó élhalmaz, akkor Y néhány (k darab) diszjunkt csillag egyesítése. Ha ugyanis Y tartalmazna kört, akkor annak bármely élét, ha pedig 3 hosszú utat, akkor a közepét el lehetne hagyni Y-ból, mert a többi él még mindig lefogná az összes pontot. Így $\rho(G) = v(G) - k$. Minden csillagból kiválasztunk egy élt, az így kapott élhalmaz nyilván független. Tehát $\nu(G) \geq k = v(G) - \rho(G)$.

TUTTE-TÉTEL Tétel: Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha minden $X \subseteq V(G)$-re $c_p(G - X) \leq |X|$, azaz akárhogy hagyunk el a gráfból k pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma nem lehet több, mint k.

Bizonyítás (csak szükséges): Ha G-ben van teljes párosítás, akkor nyilvánvalóan teljesül a feltétel. Hiszen ha elhagyunk a gráfból X-et, akkor a páratlan komponensek mindegyikéből az eredeti gráfban indul ki legalább egy párosításbeli él, és ezek az élek csak egy-egy (különböző) X-beli pontba mehetnek. Tehát $c_p(G - X) \leq |X|$.

10. tétel

PÁROSÍTÁS Definíció: **Párosításnak**, vagy **részleges párosításnak** nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élnek közös pontja. Az ilyen éleket független éleknek nevezzük. A részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait. Egy párosítás **teljes párosítás**, ha a gráf minden pontját lefedi.

ALTERNÁLÓ ÚT Definíció: Hozzunk létre egy részleges párosítást egy páros gráfon belül, ekkor a párosítás során bevett élek legyenek az X élhalmaz elemei. Alternáló útnak nevezünk olyan élsorozatot, ami felváltva tartalmaz nem-X beli és X-beli élt.

JAVÍTÓ ÚT Definíció: G(A,B,E) páros gráfban van már párosítás (nem teljes). P út **javító út**, ha párosítatlan A-ból indul, párosítatlan B-be érkezik és P alternáló út. Ha ez a javító út elkészül, úgy tudjuk bevenni, hogy a ”nem-X”-beli éleket bevesszük és a régebben X-beli éleket pedig nem.

JAVÍTÓ UTAS ALGORITMUS (MÓDOSÍTOTT BFS) Algoritmus: Bemenetként kapjuk meg M párosítást valamint G(A,B,E) gráfot. Ha létezik ebben a gráfban javító út, akkor azt vegyük be, ezt folytassuk addig, amíg létre tudunk hozni újabb és újabb javító utakat. Ha már nem tudunk újabb élt bevenni a párosításba, akkor álljunk le. Ebben az esetben már maximális a párosítás. Az algoritmus mohó módon működik.

KŐNIG-TÉTEL Tétel: Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. Ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$ is teljesül.

Bizonyítás: Először az első állítást bizonyítjuk. Legyen M egy olyan párosítás, mely a javító utak módszerével már nem bővíthető. Legyen $U = A - X$, T' azon B-beli pontok halmaza, amelyek élerhetőek U-ból alternáló úton. T pedig ezek párjainak halmaza. Legyen $Y = T' \cup (X - T)$. Ennek a halmaznak éppen $|M|$ pontja van. Ezek minden élt lefognak, hiszen $N(T \cup U) = T'$, ugyanúgy, mint a Hall-tétel bizonyításában. Így $\tau(G) \leq |M| \leq \nu(G)$ amiből viszont már következik az állítás a CUCCOS VISZONY (*8. tétel*) tétel alapján. Most már könnyű belátni a második állítást is, Gallai két tétele miatt ugyanis $\nu(G) + \rho(G) = \tau(G) + \alpha(G)$ és imént beláttuk, hogy $\nu(G) = \tau(G)$.

HALL-TÉTEL Tétel: Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$ (ezt **Hall-feltételnek** nevezzük).

??? Bizonyítás: Ha létezik A-t fedő párosítás, akkor minden A-beli pontnak különböző párja van, tehát tetszőleges $X \subseteq A$-ra. Azt kell igazolnunk, hogy $\nu(G) \geq |A|$. Legyen U minimális (azaz $\tau(G)$ méretű) lefogó ponthalmaz, és legyen $U_A := U \cap A, U_B := U \cap B$. Mivel U lefogja az $X := A \backslash U_A$-ból induló éleket, ezért $N(X) \subseteq U_B$, tehát $|(NX)| \leq |U_B|$. A Kőnig-tétel ill. a Hall-feltétel miatt

$$\nu(G) = \tau(G) = |U| = |U_A| + |U_B| \geq |U_A| + |N(X)| \geq |U_A| + |X| = |A|$$

FROBENIUS-TÉTEL Tétel: Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A|= |B|$ és $|N(X)|\geq |X|$ minden $X \subseteq A$-ra.

A két feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha viszont teljesül a második feltétel, akkor a Hall-tétel miatt van A-t fedő párosítás. Mivel azonban $|A|= |B|$, ezért ez lefedi B-t is.

11. tétel

REGULÁRIS GRÁF Definíció: Egy gráfot k**-regulárisnak** nevezünk, ha minden pont foka k. Egy gráfra azt mondjuk, hogy **reguláris**, ha létezik olyan k, amire k-reguláris.

REGULÁRIS GRÁFBAN TELJES PÁROSÍTÁS Definíció: Minden reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.

Bizonyítás: Vegyünk egy páros gráfot A, B pontosztállyal, ami k-reguláris. Először lássuk be, hogy ugyanaz az elemszáma A és B-nek. A-ból $k \cdot n$ él megy ki, B-be pedig $k \cdot m$ él megy. $k \cdot n = k \cdot m$, osszuk le k-val $\rightarrow$ $n = m$. Hall-feltétel: $|N(A) \geq |A|$. A-ból $k \cdot |A|$ él megy ki, ezek a N(A) csúcsokba mennek. Ez annyit jelent, hogy egy N(A)-beli csúcsba átlagosan $(k \cdot |A|) \backslash |N(A)|$ él megy, tehát $(k \cdot |A|) \backslash |N(A)| \leq k$ (mivel egy csúcsba maximum k él megy). Szorozzuk be $|N(A|$-val és osszunk k-val. $|A| \leq |N(A)|$, Hall feltétel OK, Frobenius-tétel OK, létezik teljes párosítás.

ÉLSZÍNEZÉS Definíció: Egy G gráf élei **k színnel színezhetőek**, ha minden élt ki lehet színezni k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen. G **élkromatikus száma** $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k - 1$-gyel már nem.

VIZING-TÉTEL Tétel: Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$. Bizonyítás $\emptyset$.

ÉLKROMATIKUS SZÁM Tétel: Tetszőleges G gráfra $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ áll.

Bizonyítás: Az egy csúcsból induló élek egymástól különböző színt kapnak, és ez speciálisan a maximális fokszámú csúcsokból induló élekre is igaz.

KŐNIG-TÉTEL Tétel: Ha G páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Bizonyítás: Elég azt igazolni, hogy $\chi_e(G) \leq \Delta(G)$ az előző állítás miatt. Létezik olyan H páros gráf, melynek G részgráfja, és H minden csúcsának fokszáma $\Delta(G)$. Ha sikerül a $\Delta(G)$-reguláris H gráf éleit $\Delta(G)$ színnel kiszínezni, akkor egyúttal a G részgráf éleinek is megkapjuk egy ugyanennyi színnel való színezését. H gráf élszínezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás, ezt pedig már bizonyítottuk egy fentebbi tételben.

12. tétel

HÁLÓZAT Definíció: Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy c(e) nemnegatív számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki két pontot, s-et és t-t G-ben, melyet **termelőnek** és **fogyasztónak** nevezünk. Ekkor a (G,s,t,c) négyest **hálózatnak** nevezzük.

FOLYAM, FOLYAMÉRTÉK Definíció: Legyen f(e) az a ”vízmennyiség”, ami az e élen folyik át. Ez az f függvény **megengedett függvény**, ha $f(e) \leq c(e)$ minden élre és

$$m(v) = \sum\{f(e)|e\ vegpontja\ v\} - \sum\{f(e)|e\ kezdopontja\ v\} = 0$$

minden $v \in V(G)$-re, kivéve az s és t pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)$. Ezt a közös értéket a folyam értékének nevezzük és m_f-el jelöljük. Egy élt **telítettnek** hívunk egy folyamban, ha $f(e) = c(e)$ és **telítetlennek**, ha $f(e) < c(e)$.

VÁGÁS Definíció: Legyen $s \in X \subseteq V(G)\backslash t$, sem X, sem $V(G) - X$ nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a C halmazát, melyeknek egyik végpontja X-beli, másik $V(G) - X$-beli, a hálózati folyam egy (s,t)-**vágásának** nevezzük. A **vágás értéke**, c(C), azon éleken levő kapacitások összege, melyek egy X-beli pontból egy $V(G) - X$-beli pontba mutatnak. Ezeket előremutató éleknek nevezzük. Tehát a vágás értékében nem játszanak szerepet a visszafelé mutató élek, vagyis azok, melyek egy X-beli pontba mutatnak.

JAVÍTÓ ÚT HÁLÓZATRA Algoritmus: Legyen a gráfban $s = v_0, v_1 ... v_k$ egy út, aminek most nem kell feltétlenül az irányítás szerint haladnia. Növelhetjük a folyam értékét abban az esetben, ha minden $i = 0, 1, 2, ..., k-1$-re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$, vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő. Az ilyen utakat javító utaknak hívjuk.
Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s-ből t-be.

MAXIMÁLIS FOLYAM Tétel: Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s-ből t-be.

Bizonyítás: Legyen P egy javító út. Ekkor P minden első típusú élére a $c(e) - f(e)$, második típusú élére pedig f(e) érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek minimuma d. Az első típusú élekre növeljük f(e)-t d-vel, második típusúaknál csökkentsük f(e)-t d-vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d-vel nőtt. T.f.h. nincs javító út s-ből t-be. Lehetnek azonban olyan pontok a gráfban amelyek elérhetőek s-ből javító úton. Legyen az ilyen pontok halmaza $X \subset V(G)$. Ekkor sem X, sem $V(G) - X$ nem üres, hiszen $s \in X, t \in V(G) - X$. Tekintsünk egy olyan e élt, mely egy X-beli x pontból egy nem X-beli y-ba mutat. Ekkor $f(e) = c(e)$, hiszen ellenkező esetben az s-ből x-be vezető javító út e-vel meghosszabbítva egy s-ből y-ba vezető javító utat szolgáltatna. Ugyanígy egy olyan élre, ami egy nem X-beliből egy X-belibe mutat, teljesül, hogy f(e) = 0. Tehát az X és $V(G) - X$ között futó élek mind telítettek, és a visszafele mutató éleket nem használjuk, tehát ezen a vágáson nem folyhat több víz. Vagyis f maximális folyam.

FORD-FULKERSON (MAXFLOW-MINCUT) TÉTEL Tétel: A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz

$$max\{m_f|f\ egy\ folyam\ s-bol\ t-be\} = min(c(C)|C\ vagas)$$

Bizonyítás: A maximális folyam nyilván nem lehet nagyobb a minimális vágásnál, hiszen ha minden előremutató él telített, a visszafele mutató éleken pedig 0 a folyam értéke, akkor ezen a vágáson nem folyhat át több víz. Az előző tételben beláttuk, hogy ha létezik egy f maximális folyam, akkor létezik ilyen értékű vágás. Azt, hogy maximális értékű folyam mindig létezik, a következő tételben bizonyítjuk.

EDMONDS-CARP TÉTEL Tétel: Ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.

13. tétel

EGÉSZÉRTÉKŰSÉGI LEMMA Lemma: Ha (G,s,t,c) hálózatban minden e él c(e) kapacitása egész szám, akkor létezik olyan f maximális folyam, hogy f a G gráf minden élén egész értéket vesz fel. Az ilyen folyamot **egészfolyamnak** nevezzük.

A FOLYAMPROBLÉMA ÁLTALÁNOSÍTÁSAI: T.f.h. a hálózatban több termelő, $s_1, s_2, ..., s_k$ és több fogyasztó, $t_1, t_2, ..t_k$ van. A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó folyam maximalizálása. Vegyünk fel két s', t' pontot, és kössük össze s'-t az összes termelővel, t'-t pedig az összes fogyasztóval, az élek kapacitása ezek között pedig legyen ∞.
Ekkor az s' és a t'-t vesszük termelőnek és fogyasztónak, innen triviális a megoldás.

Ha nem csak élekhez, hanem pontokhoz is rendelhetünk c(v) kapacitásokat és megköveteljük, hogy minden v-re $\sum_{u,v \in E} f(u,v) \leq c(v)$, akkor minden v pontot helyettesítsünk két ponttal, v' és v"-vel. Ha egy él az u pontból a v pontba mutatott, akkor helyette vegyünk fel egy u"-ból v'-be mutató élet a hozzá tartozó kapacitással együtt, ezen kívül minden v'-ből mutasson c(v) kapacitású él v"-be.

Amennyiben irányítatlan élek is szerepelnek a hálózatban, akkor cseréljük le őket két, átellenes irányított éllel, mindkettő kapacitása legyen az irányítatlan él kapacitásával egyenlő.

DISZJUNKT FOLYAMOK: Ha a kapacitások egész számok, akkor van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyam értéke egész. Így nyilvánvaló, hogy ha a kapacitás minden élen 1 vagy 0, akkor van olyan maximális folyam, melynek minden élén a folyam értéke vagy 1 vagy 0. Ha elhagyjuk ez utóbbi éleket, akkor diszjunkt utakat kapunk s-ből t-be. Ezeknek a számát úgy is meg tudjuk kapni, hogy veszünk egy minimális vágást és az élhalmazának az elemszámával lesz egyenlő a diszjunkt utak száma.

DISZJUNKT UTAK Definíció: Vegyük (G,s,t,c) folyamot, ezen belül veszünk utakat. **Páronként éldiszjunkt útnak** nevezünk utakat, ha páronként nincsen közös élük. **Belsőleg pontdiszjunkt utaknak** nevezünk utakat, ha páronként nincs közös pontjuk.

Diszjukt folyam algoritmus: Vegyünk tetszőleges hálózatot, és futtassuk le a fentebb leírt módszert rajta úgy, hogy vegyünk egy minimális vágást a hálózatban. A visszaélek (tehát amik a t-t tartalmazó halmazból az s-et tartalmazó halmazba mennek) legyenek 0 értékűek, egyébként pedig 1 értékűek az élek. Ebben már meg lehet keresni a diszjunkt utakat.

14. tétel

MENGER Tétel: Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s-ből t-be vezető páronként élidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított s-t utat lefogó élek minimális számával.

Bizonyítás: Ha létezik G-ben k darab ilyen irányított s-t út, akkor az s-t utakat lefogó élek száma nyilvánvalóan legalább k. Nézzük az egyenlőtlenség másik oldaláról is. T.f.h. az s-t utakat lefogó élek minimális száma k. Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a maximális folyam értéke legalább k. Ekkor a Ford-Fulkerson tétel miatt a minimális vágás értéke is legalább k. Azt már beláttuk, hogy van olyan max. folyam, ahol minden élen a folyamérték 0 vagy 1. Lássuk be, hogy G-ben van k élidegen irányított s-t út. Egy ilyen út legalább van, különben nem lehetne k a folyam értéke. Az ebben az útban szereplő élek kapacitását csökkentsük nullára, így a folyam értéke legalább k-1 lesz. Folytassuk a gondolatmenetet és kapunk k élidegen irányított s-t utat.

MENGER Tétel: Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s-ből t-be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított s-t utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás: Készítsünk egy új G' gráfot. Minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a G gráfban egy minimális ponthalmaz lefogja az irányított s-t utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v") pontok is lefogó ponthalmazt alkotnak s-t-re G'-ben. Kevesebb él nem elég a lefogáshoz, mert ha a lefogó élek közt lennének (a”, b’) típusú élek, akkor ezeket helyettesítjük (b’, b”)-vel, ha $b' \neq t$, illetve (a’, a”)-val, ha $b' = t$. Így pedig G-ben egy kisebb lefogó ponthalmazt nyernénk. Vagyis a G-beli lefogó pontok és a G’-beli lefogó élek minimális száma egyenlő. Az is könnyen látható, hogy G-beli pontdiszjunkt utaknak G’-ben éldiszjunkt utak felelnek meg és fordítva, G’-beli élidegen utaknak G-ben pontidegen utaknak felelnek egy. Innen az előző tétel segítségével bizonyítjuk az állítást.

MENGER Tétel: Ha G egy irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s-ből t-be vezető élidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan s-t utat lefogó élek minimális számával.

Bizonyítás: Vezessük vissza irányított gráfos problémára. A bizonyítás a számításelmélet jegyzet 70. oldalán található, hosszú.

MENGER Tétel: Ha G egy irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s-ből t-be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan s-t utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás: Előző tételhez hasonlóan.

TÖBBSZÖRÖS ÖSSZEFÜGGŐSÉG Definíció: Egy G gráfot **k-szorosan összefüggőnek** nevezünk, ha legalább k+1 pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf **k-szorosan élösszefüggő**, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élt, összefüggő gráfot kapunk. A k-szoros összefüggőség ”erősebb” a k-szoros élösszefüggőségnél.

A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út. Hasonlóan, G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

Bizonyítás: Először a második részt bizonyítjuk. Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor az u-v utakat lefogó élek minimális száma nyilván legalább k. Így Menger idevágó tétele szerint élidegen u-v utak maximális száma legalább k. Ennek a résznek a megfordítása is következik a Menger tételből. Ha G k-szorosan összefüggő, akkor bármely két, $u, v \in V(G)$ pontot választva legalább k darab, u-tól és v-től különböző pontra van szükség ahhoz, hogy lefogjuk az összes u és v közötti utat (u-v éltől eltekintve). Így az utolsó Menger tétel alapján létezik u és v között k pontidegen út. Ha G bármely két pontja között létezik k pontidegen út, akkor nyilván nem lehet ezeket k-nál kevesebb ponttal lefogni, tehát a k-szoros összefüggőség következik ebből.

MENGER Tétel: A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.

Bizonyítás: Az első állítás triviális, hiszen két pontidegen u-v út együtt egy kört ad, amely átmegy u-n és v-n. A második állítás pedig az elsőből következik. Lássuk be, hogy ha G 2-szeresen összefüggő, akkor e, f éleken keresztül van kör. Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az e illetve az f élt. Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő. Az első állítás szerint ezen a két ponton át is megy kör, és ez a kör az eredeti gráfban átmegy e-n és f-en. A megfordítás ismét nyilvávaló.

15. tétel

Az algoritmusok futása során a következőket tartjuk számon:

l(e) - az e él hossza

d(v) - a v pontba az s kezdőpontból eddigi legrövidebb út hossza. d(s) = 0.

Kulcslépések:

(*) $d(s) = 0$, minden $v \neq s$-re $d(v) = \infty$

(**) Ha x-ből vezet egy e él y-ba és $d(y) > d(x) + l(e)$, akkor $d(y) = d(x) + l(e)$.

DIJKSTRA-ALGORITMUS Algoritmus: **Az algoritmus:**

0. $S = s, T = V \setminus s$ és **(*)**.

1. Minden S-beli pontból minden T-beli pontba vezető e élre végezzük el **(**)** javítást.

2. A T-beli pontok közül legyen v_0 az, amelyiken a d(v) érték a legkisebb. Tegyük át v_0-t T-ből S-be.

3. Ha T üres, **STOP**. Ha nem, vissza **1.** lépéshez.

Az algoritmus lépésszáma $c \cdot n^3$, mivel az 1. lépés k. elvégzésekor $|S| = k,\ |T| = v - k$, így az összes **(**)** hívások száma $\sum k(v - k) = \sum kv - \sum k^2$ és ennek az összege k^3-höz közelít.
Az algoritmusnak létezik egy kedvezőbb futási idejű változata, $c \cdot n^2$ lépésszámmal.
Az optimalizált algoritmus:

0. $S = s, T = V \backslash s$ és **(*)**, valamint $v_0 = s$.

1. Csak a v_0-ból a T-beli pontokba vezető e élekre végezzük el a **(**)** javítást.

2. A T-beli pontok közül legyen v_0 az, amelyiken a d(v) érték a legkisebb. Tegyük át v_0-t T-ből S-be.

3. Ha T üres, **STOP**. Ha nem, vissza **1.** lépéshez.

FORD-ALGORITMUS Algoritmus: A Ford-algoritmus megengedi a negatív súlyú éleket is, valamint az algoritmus egyszerűbb, mint a Dijsktra-algoritmus.

0. Számozzuk meg az éleket 1-től e-ig, ezt rögzítsük le (tetszőleges sorrend). Legyen $i = 1$ és **(*)**.

1. A rögzített sorrendben végezzük el a **(**)** javítást minden élen.

2. $i = i + 1$. Ha $i > v$, akkor **STOP**. Különben folytassuk **1.** lépésnél.

Az algoritmus lépésszáma $c \cdot e \cdot v$, ez jóval nagyobb általában, mint n^2, ezt az árat kell megfizetnünk a negatív élhossz featureért. Mi történik negatív kör esetén? Ezt valahogyan fel kell ismerni! A módosított 2. lépés, ami jelzi, ha negatív összsúlyú körbe kerültünk:

2. Ha az **1.** lépés során egyetlen javítás sem történt, akkor **STOP** (és megvannak a minimális úthosszak). Különben $i = i + 1$. Ha $i \leq v + 1$, folytassuk **1.** lépésnél, ha pedig $i > v + 1$, akkor **STOP** (és van negatív összsúlyú kör).

16. tétel

http://cs.bme.hu/bsz2/dfs.pdf

FLOYD-ALGORITMUS Algoritmus: A Floyd-algoritmus a gráfban lévő összes pontpár közt megadja a távolságokat. Ezt a Ford-algoritmussal is megtehettük volna, viszont annak a futási ideje az összes pontból kiindítva $c \cdot ev^2$-tel lett volna arányos. A Floyd-algoritmus ezt megteszi mindössze $c \cdot v^3$ alatt. A sikeres futás feltétele az, hogy a gráfban NE legyen negatív összsúlyú kör.
T.f.h. G irányított gráf a $V(G) = v_1, v_2, ..., v_n$ pontokon. A v_i-ből v_j-be mutató él hosszát, azaz súlyát, jelöljük l(i,j)-vel és t.f.h. a gráfban nincs negatív összsúlyú irányított kör. Ha nincs él v_i-ből v_j-be, akkor legyen $l(i,j) = \infty$. Továbbá $l(i,i) = 0$, minden $i = 1, 2, ..., n$-re. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a v_i-ből v_j-be vezető legrövidebb olyan irányított út hosszát, mely csak k-nál szigorúan kisebb pontokon megy át. Így $d^{(1)}(i,j) = l(i,j)$ és $d^{(n+1)}$ lesz az eredetileg keresett legrövidebb irányított út hossza lesz v_i-ből v_j-be. Világos, hogy a v_i-ből v_j-be vezető legrövidebb olyan út, ami csak $k+1$-nél szigorúan kisebb pontokon megy át, vagy átmegy v_k-n, vagy nem. Ha nem megy át, akkor $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,j)$. Ha viszont átmegy, akkor $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,k) + d^{(k)}(k,j)$. Csak azt kell megnéznünk, mely esetben találunk rövidebb utat. Ezek után már világos, hogy az algoritmus lépésszáma $c \cdot v^3$-bel arányos.
Az algoritmus:

- **0.** Minden i,j rendezett párra legyen $d^{(1)}(i,j) = l(i,j)$ és $k = 2$.

- **1.** Minden i,j rendezett párra

$$d^{(k+1)}(i,j) = min\{d^{(k)}(i,j),\ d^{(k)}(i,k) + d^{(k)}(k,j)\}$$

- **2.** Ha $k = n + 1$, akkor STOP. Különben $k = k + 1$ és folytassuk **1.** lépésnél.

IRÁNYÍTOTT ACIKLIKUS GRÁF Definíció: Egy G gráfot akkor nevezünk **irányított aciklikus gráfnak** (DAG), ha irányított élei vannak és nem tartalmaz kört.

TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS Definíció: Legyen G egy irányított gráf. G topologikus elrendezése a csúcsoknak egy olyan $v_1, v_2, ..., v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j,\ akkor\ i < j$)

TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS Lemma: Ha G irányított gráf aciklikus, akkor létezik benne nyelő (olyan pont, amiből nincsen kimenő él).

Bizonyítás: Legyen P a leghosszabb irányított utak egyike, v legyen a végpontja. T.f.h. v nem nyelő. Járjuk be az utat topologikus sorrendben. Az előző állítás annyit jelent, hogy P vagy nem a legutolsó elem a topologikus elrendezésben (ellentmondás) vagy egy, a topologikus sorrendben előrébb lévő ponthoz csatlakozik vissza (ellentmondás).

TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS Tétel: Egy G irányított gráfhoz akkor és csak akkor létezik topologikus elrendezés, ha az aciklikus.

Bizonyítás: A szükségeset triviális bizonyítani, viszont az elégségességet nem. Az előbbi lemma állítását felhasználjuk a bizonyításhoz. Keressünk ebben a gráfban egy nyelőcsúcsot, ez a v_n csúcs. Ezt dobjuk ki. Ekkor $G \backslash v_n$-ben v_{n-1} lesz nyelő. Ezt is dobjuk ki. Ismételjük, amíg semmi se marad. Amit "kidobtunk", ha fordítva sorba rendezzük (tehát a legvégén lesz az először kidobott elem), akkor az egy topologikus sorbarendezése lesz G-nek. A DFS is generál egy ilyet a futása során, ha nincs benne visszaél (tehát ha nincs benne kör).

LEGRÖVIDEBB ÉS LEGHOSSZABB ÚT KERESÉSE DAG-BAN Algoritmus: A topologikus rendezést használva lineáris időben, tehát $n + e$-vel arányos lépésszámban megoldható a leghosszabb/legrövidebb út keresése. Input legyen a G irányított gráf és annak egy topologikus sorrendje (s).

Az algoritmus:

- **0.** $t(s) = 0$, minden $v \neq s$-re $t(v) = \infty$, w: $E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.
- **1.** FOR i=2 TO n DO:
  HA $\exists e = \overrightarrow{v_j v_i}$ él melyre $t(v_j) \neq \infty$ AKKOR: $t(v_i) = min/max(t(v_j) + w(e) : e = \overrightarrow{v_j v_i},\ t(v_j) \neq \infty)$
  END FOR

17. tétel

`http://cs.bme.hu/bsz2/dfs.pdf`

A DFS algoritmus a következő adatokat tartja számon:

- d(v): a v csúcs mélységi száma
- f(v): a v csúcs befejezési száma
- m(v): a v-t megelőző csúcs - tehát amiből a v-t a bejárás elérte
- a: a jelenleg aktív csúcs
- g: az aktuális gyökérpont
- D: az eddigi legnagyobb mélységi szám
- F: az eddigi legnagyobb befejezési szám

DFS Algoritmus: Bemenet: Egy n csúcsú G irányított gráf és egy $s \in V$ csúcs.

- **0.** $d(s) = 1$, minden $v \neq s$-re $d(v) = *$, minden v-re $f(v) = *$, minden v-re $m(v) = *$, $a = s$, $g = s$, $D = 1$, $F = 0$.
- **1.**
  HA létezik olyan $e = \overrightarrow{av}$ él, melyre $d(v) = *$, AKKOR:
  - $D = D + 1$
  - $d(v) = D$
  - $m(v) = a$

- $a = v$
- **1.** lépéshez vissza

- **2.**

  - $F = F + 1$
  - $f(a) = F$
  - HA $a \neq g$, AKKOR $a = m(a)$ és **1.** lépéshez vissza
  - HA $D = n$, AKKOR **STOP**.
  - Válasszunk olyan v csúcsot, melyre $d(v) = *$.
  - $g = v$, $a = v$, **1.** lépéshez vissza.

DFS-ERDŐ Definíció: s csúcsból indítva G irányított gráfban lefuttatuk a DFS algoritmust. A futáshoz tartozó DFS erdő F. Legyen $e = \overrightarrow{uv}$ a G-nek tetszőleges éle. Ekkor

- e-t faélnek nevezzük, ha $e \in E(F)$.
- e-t előreélnek nevezzük, ha nem faél, de F-ben van u-ból v-be irányított út (vagyis v leszármazottja u-nak).
- e-t visszaélnek nevezzük, ha F-ben van v-ből u-ba irányított út (tehát v őse u-nak).
- e-t keresztélnek nevezzük, ha F-ben sem u-ból v-be, se v-ből u-ba nincs irányított út.

DFS ÉS ACIKLIKUSSÁG Tétel: Ha G irányított gráf aciklikus, a DFS futtatásakor nem keletkezik visszél. Ha nincs visszél, akkor f(v) szerinti csökkenő sorrend a topologikus sorrend.

Bizonyítás: Ha keletkezik visszél és $e = \overrightarrow{uv}$ ilyen, akkor G irányított gráf nyilván tartalmaz irányított kört: az F DFS-erdő tartalmaz v-ből u-ba irányított utat (mert e visszél), amit e-vel kiegészítve irányított körré zárhatunk. Tegyük fel ezért, hogy nem keletkezik visszaél. Ha megmutatjuk a tétel 2. állítását, hogy a csúcsoknak a befejezési számozás szerinti fordított sorrendje topologikus rendezés, akkor ebből nyilván következik G aciklikussága is. Azt kell megmutatnunk, hogy G minden $e = \overrightarrow{uv}$ élére $f(v) < f(u)$. Mivel feltettük, hogy visszaél nem keletkezett, ezért e lehet faél, keresztél vagy előreél. Ha e faél vagy előreél, akkor a DFS eljárás során u első aktívvá válásakor az u befejezéséig tartó szakasza során érte el v-t, így ennek során kellett befejeznie azt, tehát a v-t előbb fejezte be u-nál, tehát $f(v) < f(u)$. Ha pedig e keresztél, akkor e vizsgálatának a pillanatában f(v) már kapott értéket, u viszont épp aktív csúcs volt, így ekkor még $f(u) = *$ volt. Mivel az eljárás egyre nagyobb befejezési számokat ad, ezért $f(v) < f(u)$ erre is teljesülni fog.