Bevezetés a számításelméletbe I.

vizsgatételek

2013/2014. tanév első félév

① Térbeli koordinátageometria: sík egyenlete, egyenes egyenletrendszerei. Metszéspontok, metszésvonalak számítása. Vektortér definíciója, a definíció egyszerű következményei, példák.

A háromdimenziós tér pontjai egyértelműen jellemezhetőek egy számhármassal, amennyiben előre rögzítettünk egy koordinátarendszert.

$$P(p_1, p_2, p_3)$$

$\boxed{L}$ Ha P pont koordinátái (x_0, y_0, z_0), és O az origó, akkor $|OP|^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$

Biz: xy síkra majd x tengelyre vetítéssel, Pitagorasz tétellel.

$\boxed{T}$ $P(x_0, y_0, z_0)$ és $Q(x_1, y_1, z_1)$ és O az origó:

$$OP \perp OQ \iff (x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0)$$

Biz: $OPQ\triangle \Rightarrow OP$ és OQ akkor merőleges, ha $POQ\measuredangle \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Pitagorasz tétel, előző lemma segítségével kijön a megoldás.

Sík

Def: Ha S a koordinátarendszer síkja, akkor az $\underline{n}$ vektort az S normálvektorának nevezzük, ha $\underline{n}$ nem nullvektor és $\underline{n}$ merőleges S összes vektorára.

T A koordinátarendszer S síkjának egy pontja $P(x_0, y_0, z_0)$, egy normálvektora $\underline{n} = (a, b, c)$, akkor egy $Q(x, y, z)$ pont pontosan akkor van rajta S síkon, ha:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \quad \text{teljesül.}$$

Biz: $Q \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \underline{n}$, $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

✓

Def: Az $\underline{n} = (a, b, c)$ normálvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete:

$$ax + by + cz = \underbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0)}_{\text{konstans}}$$

Egyenes

Def: Ha e egy egyenes, akkor $\underline{v}$ vektor az e egyenes irányvektora, ha $\underline{v} \parallel e$.

Tetszőleges egyenest meghatároz egy pontja és egy irányvektora.

Ha $P(x_0, y_0, z_0)$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ egy e egyenes egy pontja és egy irányvektora akkor:

$Q \in e \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PO} + \lambda \underline{v} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0 + y_0 + z_0) + \lambda (v_1, v_2, v_3)$

Ekkor az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left(\lambda =\right) \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

$$\Downarrow$$

$$x = x_0 + \lambda v_1$$
$$y = y_0 + \lambda v_2$$
$$z = z_0 + \lambda v_3$$

Ha a $\underline{v}$ irányvektor valamelyik koordinátája 0, akkor Q megfelelő koordinátája P megfelelő koordinátájával lesz egyenlő ($\lambda v_x = 0$).

Az egyenest mindig két sík egyenletének együttes teljesülése írja le.

Metszéspontok, metszésvonalak
(nem triviális esetek: nem esnek egybe, és van metszetük)

- 2 sík metszete: egyenes => a két sík egyenleteinek együttes teljesülése adja az egyenes egyenletet
- több sík: egyenes vagy pont => Ha a síkok egyenleteiből kapott egyenletrendszernek 1 megoldása van, az a metszéspont, ha végtelen, az az egyenes egyenlete (amelyben metszik egymást).
  (Értelemszerűen, ha nincs megoldás, nincs metszet)
- 2 vagy több egyenes metszete: pont => egyenleteikből kapott egyenletrendszerrel számítható
- sík és egyenes: pont => előzőhöz hasonlóan

Vektortér **Def:** A V halmazt $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, $\mathbb{R}$ elemeit skalároknak nevezzük, ha

(1) $(V,+)$ kommutatív csoport = zárt az összeadásra, vagyis teljesülnek rá az alábbi axiómák:
$\forall u, v, w \in V$ esetén

(ö1) $u+(v+w)=(u+v)+w$

(ö2) $u+v=v+u$

(ö3) $\exists\ \underline{0} \in V:\ u+\underline{0}=u \quad \forall u \in V$-re

(ö4) $\forall u \in V$-re $\exists$ egy $v \in V$, hogy $-u=v \Rightarrow$
$$u+(-u)=\underline{0}$$
($-u$: az u vektor ellentettje)

(2) zárt a skalárral szorzásra, vagyis teljesülnek az alábbi axiómák:
$\forall \lambda, k \in \mathbb{R}$ és $\forall u, v \in V$

(sz1) $(\lambda+k)u=\lambda u+ku$

(sz2) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$

(sz3) $(\lambda k)u=\lambda(ku)$

(sz4) $1u=u$

Példák **Példa:**
- $\mathbb{R}$ vektortér önmaga felett.
- A síkbeli helyvektorok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett a szokásos összeadásra és skalárral szorzásra
- A valós számokból álló n hosszú sorozatok is vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett
- $n \times k$ méretű valós mátrixok is

szorzás: minden elem végigszorzása, összeadás: elemenként

- Valós polinomok
- Legfeljebb n-edfokú polinomok
- A valós számok mindegyikéhez valós számot rendelő függvények:

$$+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\cdot : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

<u>~~Következmény~~ Következmények</u>:

<u>Tétel</u>: V egy valós vektortér

(1) $\lambda \underline{0} = \underline{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(2) $0 v = \underline{0} \quad \forall v \in V$

(3) $(-1) v = -v \quad \forall v \in V$

(4) $\lambda v = \underline{0} \Rightarrow \lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$

<u>Biz</u>:

(1) $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0} \quad / \cdot \lambda$

$$\lambda \underline{0} = \lambda \underline{0} + \lambda \underline{0} \quad / + (-(\lambda \underline{0}))$$

$$\underline{\underline{\underline{0} = \lambda \underline{0}}}$$

(2) $0 = 0 + 0 \Rightarrow 0 v = (0+0) v \quad / + (-(0 v))$

$$\underline{\underline{\underline{0} = 0 v}}$$

(3) $\underline{0} = \underline{0} v = (1-1) v = 1 v + (-1) v = v + (-1) v$

$$/ + (-1v)$$

$$0 + (-1v) = v + (-1v) + (-1v)$$
$$-v = (-1) v$$

(4) (1) (2) -ből ha $\lambda = 0$ vagy ha $v = 0$ akkor $\lambda v = 0$.

Tegyük fel, hogy $\lambda v = 0$ és $\lambda \neq 0$.

Ekkor:

$$\underline{0} = \frac{1}{\lambda} 0 = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) \overset{(1)}{=} \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) v \overset{(1)}{=} 1 v = v$$

Vagyis $0 = \underline{v}$

(2) Altér, lineáris kombináció, generált altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

Altér

Def: A $W \subseteq V$ részhalmaz a V valós vektortér altere, ha W is valós vektortér a V vektortér műveleteire, jelölése: $W \leq V$

Triviális altér maga a V vektortér, illetve a nullelem.

Példa: Síkbeli helyvektorok alkotta vektortér alterei az origón átmenő egyenesre illeszkedő helyvektorok

T Ha V vektortér, akkor $\emptyset \neq W \subseteq V$ pontosan akkor altere V-nek, ha zárt a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

Biz: Ha W altér, akkor a műveletek nem vezetnek ki W-ből. A műveletek zártságából azonnal adódik (ö1, ö2), és (sz1, sz2, sz3, sz4).

Csak (ö3, ö4)-et kell ellenőrizni.

$\emptyset \neq W \Rightarrow \exists w \in W$, ahonnan $-w = (-1)w \in W$ a skalárral való szorzás zártsága miatt.

Innen pedig $\underline{0} = w + (-w) \in W$, tehát (ö3, ö4) is teljesül. (ö4 miatt a nullelem eleme W-nek vagyis ö3 is teljesül.)

Lineáris kombináció

Def: Legyen V valós vektortér.
A $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok <u>lineáris kombinációja</u> a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ vektorösszeg, ahol $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$. A lin. kombináció triviális, ha $\forall \lambda_i = 0$.

Def: Azt mondjuk, hogy a $v \in V$ vektort <u>generálja</u> a V vektortér U halmaza, ha v előáll U véges sok vektorának lineáris kombinációjaként. Az U részhalmaz generálta vektorok halmazát $\langle U \rangle$ jelöli. Egy $g_1, g_2, \dots, g_n$ (vektorok) vektorrendszer által generált vektorok halmazát $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$-vel jelöljük.

Generátorrendszer

Def: Az $U \subseteq V$ halmaz generálja a $W \leq V$ alteret, ha minden vektorát generálja, azaz ha $W \subseteq \langle U \rangle$. Ha ezentúl még $U \subseteq W$ is teljesül, akkor U-t a W <u>generátorrendszerének</u> mondjuk.

T Tetszőleges vektorrendszer által generált vektorok alteret alkotnak, azaz $\langle U \rangle \leq V$ bármely $U \subseteq V$ esetén.

Biz: A műveletekre való zártságot kell ellenőrizni.
$v := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, ekkor $\lambda v = \lambda(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda \cdot \lambda_1 u_1 + \lambda \cdot \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda \cdot \lambda_n u_n =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i u_i \Rightarrow$ ez pedig egy lin. komb. $\Rightarrow$
zárt a skalárral szorzásra.

$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \; ; \; w = \sum_{i=1}^{m} K_i u_i$

Ha valamely u_i nem szerepel az egyik lin. kombinációban, annak együtthatója legyen 0.

$$v + w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{m} K_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + K_i) u_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ez pedig egy lineáris kombináció. $\Rightarrow$
zárt az összeadásra.

Def: A $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer <u>lineárisan független</u>, ha csak triviális kombinációjuk állítja elő $\underline{0}$-t, azaz ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \underline{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \lambda_i = 0$.

A rendszer lineárisan összefüggő (nem független), ha 0 előáll nem triviális lineáris kombinációként is.:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0, \text{ és } \exists i, \text{ hogy } \lambda_i \neq 0.$$

Áll. A $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer pontosan akkor független, ha egyik v_k sem áll elő a maradék v_j vektorok lineáris kombinációjaként.

Biz. Ha $v_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i$ akkor
$$\underline{0} = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i + (-1) \cdot v_k$$ egy nemtriviális lineáris kombináció, hiszen v_k együtthatója (-1).

③ Bázis és dimenzió fogalma, kicserélési tétel, és következményei.

Bázis

Def: A $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ vektorrendszer a V vektortér bázisa, ha lineárisan független, és egyúttal V generátorrendszere.

T A $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ pontosan akkor bázisa V-nek, ha $\forall v \in V$ egyértelműen előáll a b_i-k lin. komb.-jaként.

Biz: Tegyük fel, hogy $\{b_1; b_2; \dots; b_n\}$ bázis. Ekkor V minden vektora előáll lineáris kombinációként, hiszen a bázis generátorrendszer. Azt kell belátnunk, hogy a felírás egyértelmű. Tfh.: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i$ két felírás $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - k_i) b_i$$

Innen a b_i-k függetlensége miatt $\lambda_i - k_i = 0$, vagyis a felírás egyértelmű.

Most tegyük fel, hogy V bármely eleme egyértelműen előállítható a $b_1; b_2; \dots; b_n$ vektorok lin. komb.-jaként. $\Rightarrow$ Generátorrendszert alkotnak, csak a lin. függetlenség kell. Ha összefüggőek lennének akkor $\exists b_k$, hogy az előáll a többi lin. komb.-jaként $\Rightarrow$ a felírás nem egyértelmű. Ez ellentmondás $\Rightarrow b_1, b_2, \dots, b_n$ lin. független vektorrendszer.

Dimenzió

Def: A V vektortér *dimenziója* a V egy tetszőleges bázisának elemszáma.

Kicserélési tétel

Kicserélési tétel: Ha $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq V$ független, és $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq V$ generálja V-t, akkor tetszőleges f_i-hez létezik g_j, hogy

$$F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\} \text{ független},$$

Biz: *Indirekt* Tfh f_i-hez $\nexists\, g_j \Rightarrow$

$\Rightarrow F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\}$ nem független bármely g_j-re $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \Rightarrow \forall j$-re g_j előáll $F \setminus \{f_i\}$ vektorok lin. kombinációjaként. Ebből mivel a g_j-k ~~generátortért~~ generátorrendszert alkotnak generálják f_i-t is vagyis

$$f_i \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle \subset \langle F \setminus \{f_i\} \rangle$$

$$\Downarrow$$

f_i-t generálják a maradék F-beli vektorok vagyis F összefüggő. Ez ellentmondás. Az indirekt állítás helytelen.

Következmények

Következmények: Csak végesen generált vektorterekre

(1) Ha $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lin. függetlenek és a $g_1, g_2, \ldots, g_k$ vektorok generálják V-t, akkor $n \leq k$.

Biz: Cseréljük ki f elemeit sorban g elemeivel! Kics. tétel által megadott módon.
A kicserélési tétel alapján a művelet után

egy olyan lin. független rendszert kapunk, amelynek elemei között minden f_i helyett egy g_j szerepel. Azonban, ha egy azonos g_j 2-szer (vagy többször) szerepel a rendszer nem lesz lin. független $\Rightarrow$ legalább annyi g_j kell, hogy legyen, mint f_i.

(2) Vektortér bármely 2 bázisa azonos elemszámú.

Biz: Legyenek B_1 és B_2 a V tér 2 bázisa.
Ekkor (1) miatt $|B_1| \le |B_2|$ és $|B_2| \le |B_1| \Rightarrow$
$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$.

$\boxed{T}$ Ha $F \subseteq V$ független és $G \subseteq V$ generálja a V (végesen generált) vektorteret, akkor
$\exists\, F \subseteq B_1$ és $B_2 \subseteq G$ bázisok.

Biz: Legyen $G' = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ a V vektortér egy véges generátorrendszere. Vegyük hozzá F-hez sorban G' elemeit, de úgy, hogy csak akkor vesszük hozzá, ha ettől F még független marad. A művelet végén F' (a kiegészített F) generálja G'-t, hiszen csak azon elemei nincsenek benne G'-nek amelyeket már generált, valamint mivel G' generátorrendszer F' is az. Mivel generálja V-t és lin. független F' bázis $= B_1 \supseteq F$.

B_2 bázis előállítása: válasszuk ki G egy tetszőleges nemnulla elemét, mondjuk b_1-et. Ha $\langle b_1 \rangle = V$, akkor kész vagyunk, ha nem akkor válasszunk hozzá még 1 elemet G-ből, de úgy, hogy a kiválasztott elemek függetlenek maradjanak. Ezt ismételjük addig, amíg a választottak nem generálják V-t. Mivel G

generálja V-t, a művelet végén G egy olyan részhalmazát kapjuk amely generátorrendszer és lin. független, vagyis bázis.
Ha már nem tudtunk több elemet választani, akkor az összes nem választott előáll a választottak lin. kombinációjaként, így a kiválasztottak generálják G-t $\Rightarrow$ generálják V-t is.

4. Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval, redukált lépcsős alak előállítása. Megoldhatóság, a megoldás egyértelműségének feltétele.

Kibővített együtthatómátrix: ismeretlenek bal oldalon sorrendben, konstansok jobb oldalon állnak ⇒ ebből felrajzolható a mátrix

LA — Lépcsős alak: - minden sorban az első nemnulla elem 1, ezek a vezéregyesek
- ∀ vezéregyesre igaz, hogy tetszőleges feletteálló sorban tőle balra ∃ vezéregyes

RLA — Redukált lépcsős alak (RLA): olyan lépcsős alak, amelynek minden oszlopában az egyedüli nemnulla elem a vezéregyes
- szabad paraméter: amelyik oszlopban nincs vezéregyes
- tilos sor: az utolsó oszlopban van a vezéregyes

Def: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ megoldása a lineáris egyenletrendszernek, ha $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ helyettesítés az összes egyenletet igazzá teszi.

Megoldhatóság — A lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, ha pontosan 1 megoldása van.

Egy lineáris egyenletrendszer akkor megoldható, ha RLA-ban nincs tilos sor, akkor egyértelmű a megoldás, ha szabad paraméter sincsen.

Def: A kibővített együtthatómátrix sorekvivalens átalakításai:

(1) Két sor felcserélése

(2) Egy sor elemeinek egy $\lambda \neq 0$ számmal való végigszorzása

(3) Valamely sor egy másikhoz adása

$\Rightarrow$ (4) Egy sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz

(5) Csupa 0 sor elhagyása

A' az A mátrixból (1-4) műveletekkel megkapható $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A is megkapható így A'-ből

A megoldáshalmaz nem változik $\Leftarrow$ egyenletek

T: Tetszőleges kibővített együtthatómátrix lépcsős alakra RLA-ra hozható.

Biz: Gauss-elimináció M mátrixra

1. Ha $M^1 = 0$ (azaz M első oszlopa csupa 0) akkor elhagyjuk, majd a kapott mátrix elé odaírjuk

2a: Elérjük sorcserével hogy $M_1^1 \neq 0$ legyen

2b.: M_1 végigszorzásával elérjük, hogy M_1^1 1 legyen

2c.: (4) művelettel elérjük, hogy $M_i^1 = 0$ legyen $\forall i > 1$-re.

2d.: Hagyjuk el az első oszlopot és sort és elimináljuk a mátrix többi részét, majd a kapott M' mátrixot egészítsük ki ezzel a oszloppal és sorral.

(Szabad paraméterek tetszőleges megválasztásához egyértelműen $\exists$ megoldás)

A lépések segítségével ugyanígy ki tudjuk 0-ázni a vezéregyesek felett álló elemeket is $\Rightarrow$ RLA

Köv: (1) Egyértelműen megoldható, ha minden oszlopban van vezéregyes

(2) Ha ilyen, akkor legalább annyi egyenlet van, ahány ismeretlen.

(5.) Permutációk inverziószáma. Determináns definíciója, alaptulajdonságai kiszámítása. Kifejtési tétel. Mátrixok, műveletek mátrixokkal, ezek tulajdonságai. Determinánsok szorzástétele. (biz. nélkül)

Def: Jelölje $[n]$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt.
A $\sigma : [n] \to [n]$ bijektív leképezés neve permutáció.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutáció inverze a $\sigma^{-1} \in S_n$ permutáció, amire $\sigma^{-1}(i) = j \iff \sigma(j) = i$

A k, l elemek inverzióban állnak $\sigma \in S_n$ szerint, ha k, l, illetve $\sigma(k)$ és $\sigma(l)$ nagyságviszonya fordított.

Inverziószám Def: A σ permutáció $I(\sigma)$ inverziószáma a $\sigma \in S_n$ szerint inverzióban álló számpárok (halmaza) száma.
Egy $\sigma \in S_n$ permutáció páros, ha $I(\sigma)$ páros, és páratlan ha $I(\sigma)$ páratlan

T: Tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációra $I(\sigma) = I(\sigma^{-1})$
Biz: Kígyódiagramok! → majd irányváltoztatás

Def: A négyzetes mátrix (műveletek értelmezettek elemein)

$$\det(A) := |A| := \sum (-1)^{I(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$\boxed{I}$ Legyen A $n \times n$-es mátrix

(1) $\det(A) = \det(A^T)$

Biz: Az A mátrixhoz tartozó tetszőleges bás- tyaelhelyezések meghatároznak egy-egy olyan bástyaelhelyezést az A^T mátrixnak, melyben ugyanazon elemek szorzata szerepel.

σ A-ban σ^{-1} A^T-ben, mert $A_{ij} \to A_{ji}$ valamint, mivel $I(\sigma) = I(\sigma^{-1})$ az előjelek is stimmelnek

(2) Ha A felső háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ az A főátlóbeli elemeinek szorzata.

Biz: A det. definíciójában szereplő szorzatok kö- zül, azok, amelyek tartalmaznak elemet a főátló alól nem érdekesek, hisz ott értékük 0. Így csak a főátlóból vagy afölül választhatunk. Így utolsó sorból kénytelenek vagyunk az utolsó elemet választani, utolsó előttiből az utolsó előttit, i-edikből az i-ediket. Vagyis csak egy olyan bástyaelhelyezés van, a főátlóé. Ebben pedig semelyik 2 elem nem áll inverzióban $\Rightarrow$ előjele +

(3) Ha A egy sora/oszlopa csupa 0, akkor $\det(A) = 0$

Biz: Minden permutációban lesz abból sorból/ oszlopból elem $\Rightarrow$ az összes szorzat 0.

(4) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a det. is λ-szoros lesz.

Biz: Minden permutációban van ebből a sorból/oszlopból elem $\Rightarrow$ minden szorzat λ-szoros $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ összegük λ-szoros (kiemelve)

(5) Ha A 2 sorát/oszlopát felcseréljük a det. (-1)-szeresére változik.

Biz: Minden permutációban 2 bástya cserélődik ki. Ez sem a mindkettő előtt sem a mindkettő után álló tagok inverzióban állásainak számát nem változtatja. A kettő között állók inverzióban állásainak száma pedig párossal változik (mind 2 nagyobb $5\,3\,4 \Rightarrow 4\,3\,5$ 2-ből 2 (=)
mind 2 kisebb $1\,3\,2 \Rightarrow 2\,3\,1$ 1-ből 1 (=)
sorban $1\,3\,5 \Rightarrow 5\,3\,1$ (0-ból 2 páros)),
így az inverziószám paritása nem változik. Így csak a 2 változó elem paritása a döntő. Ezek pedig egymással vagy inverzióban álltak, vagy nem $\Rightarrow$ ez megfordul $\Rightarrow$ az inverziószám (-1)-szeresére változik $\Rightarrow$ det (-1)-szeresére változik.

(6) Ha A két sora/oszlopa azonos det. $= 0$

Biz: Ha a mátrixnak felcseréljük ezt a két sorát a mátrix nem változik $\Rightarrow$ a det sem változik, viszont (5) miatt a det (-1)-szeresére változik. Ellentettjével azonos a determináns, vagyis csak a 0 lehet.

(7) Ha A egy sorának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz, a determináns nem változik.

<u>Biz</u>: Legyen A' az a mátrix, amelyet úgy kapunk A-ból, hogy az i. sorának λ-szorosát hozzáadjuk a j-edik sorához.
Ekkor $\det(A')$ definíciójában minden permutációhoz tartozó szorzatban j-edik tényező egy összeg ezt felbontva 2 szorzatösszeget kapjuk.
Az egyik a $\det(A)$ definíciójában szereplő szorzat, a másik pedig annak az A'' mátrixnak a determinánsában szereplő szorzat, amelyet úgy kapunk, hogy a j-edik sorát az i-edik sorának λ-szorosára cseréljük. Ennek determinánsa viszont, ha $\lambda = 0 \Rightarrow 0$ (csupa 0 sor), különben pedig j-edik sorát $\frac{1}{\lambda}$-val beszorozva két azonos sora lesz $\Rightarrow$ determinánsa 0. $\Rightarrow$ Így az összeg $\det(A) + 0$.

<u>Det kiszámítása</u>: Gauss eliminációt végezzük el a mátrixon, úgy, hogy közben jegyezzük a det-en történő változásokat! $\Rightarrow$ Egy felső háromszögmátrixot kapunk, ennek det-je könnyen számolható.

Kifejtési tétel

<u>Kifejtési tétel</u>: Ha A $n \times n$-es mátrix és i rögzített:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

rögzített j-re:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

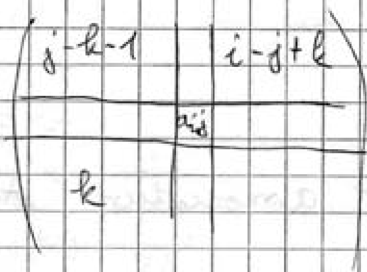
A_{ij}: előjeles aldetermináns:

Az A négyzetes mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával keletkezett mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Kif. tétel

Biz: i-edik sor szerint fejtjük ki.

Ekkor a def. szerinti szorzatból, mindegyikből kiemelhető a_{ij}, hiszen mindegyikben van elem az i-edik sorból, mégpedig a j-edik. Így a det csak az inverziószám miatt változhat.



Elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot. Ez a permutáció szempontjából olyan, mintha csak az a_{ij} elemet hagytuk volna el.
Azt kell megszámolni, hogy ezzel hány elem állt inverzióban.
Ezek a mátrixban 2 téglalapban helyezkedhetnek el.
a_{ij}-től ÉK-re, vagy DNY-ra.
Tegyük fel, hogy k elem van tőle DNY-ra. Az első $j-1$ oszlopban pontosan $j-1$ db elem áll $\Rightarrow$ a_{ij}-től ÉNY-ra $j-k-1$ elem van. Az első $i-1$ sorban pontosan $i-1$ elem áll. $\Rightarrow$ a_{ij}-től ÉK-re $i-1-(j-k-1) = i-j+k$ elem áll. Így a_{ij}-vel inverzióban lévő elemek száma $k+i-j+k = 2k+i-j$.
Azt kaptuk tehát, hogy az előjel akkor változik meg, ha $2k+i-j$ páratlan, ami pontosan akkor teljesül, ha $i+j$ páratlan. $\Rightarrow$ az aldeterminánsokat $(-1)^{i+j}$-nel szorozva a det.-et kapjuk.

Mátrix-műveletek

Def: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ akkor összeadhatóak, ami elemenkénti összeadást jelent, azaz $(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j$

kommutatív $(A+B=B+A)$, asszociatív $((A+B)+C = A+(B+C))$.

Skalárral szorzás: $(\lambda \cdot A)_i^j = \lambda \cdot A_i^j$

Def: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ akkor összeszorozhatóak, és $A \cdot B \in^{n\times l}$ és $(A\cdot B)_i^j = A_i \cdot B_j = \sum_k A_i^k A_k^j$

- Nem kommutatív
- azonban disztributív $A(B+C) = AB + AC$
  $(A+B)C = AC + BC$,
  Ha a szorzások elvégezhetőek
- asszociatív $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Determinánsok szorzástétele:

Ha A, B $n\times n$-es valós mátrixok, akkor:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

(6) $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságának jellemzése a determináns segítségével. Lineáris egyenletrendszerek leírása mátrixokkal. Mátrix inverze, létezésének szükséges és elégséges feltétele. Inverz meghatározása Gauss-eliminációval.

$\boxed{T}$ Legyen $A \in \mathbb{R}^{~~m~~ k \times n}$ tetszőleges valós mátrix, az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) Az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrix leírta lineáris egyenletrendszernek (egyértelmű) megoldása van.

def.

(2) Létezik $x \in \mathbb{R}^n$, amire $Ax = b$

szorzás

(3) Létezik $x \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $b = \sum_{i=1}^{n} A^i x_i$

lin. komb.

(4) $b \in \langle A^1, \ldots, A^n \rangle$ $\underline{(\text{és } A^1, \ldots A^n \text{ lin ftlen. vektorok})}$

b nem ftlen.

(5) $\langle A^1, \ldots, A^n \rangle = \langle b, A^1, \ldots, A^n \rangle$

dim nem vált.

(6) $\dim(\langle A^1, \ldots, A^n \rangle) = \dim(\langle b, A^1, \ldots, A^n \rangle)$ $\underline{(=n)}$

ftlenek

(7) $r(A) = r(A|b)$ $\underline{(=n)}$

rang lin ftlen. $\underline{\text{oszlopok}}$ (sorok) száma $= n$

$\boxed{T}$ Az $n \times n$ méretű A együtthatómátrixszal megadott lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det(A) \neq 0$ $(|A|)$

$\Rightarrow$

Biz: Amikor előáll a lépcsős alak (Gauss-elimináció), akkor a det értéke változik, de a nulla volta nem. Tehát, ha a lépcsős alakban minden oszlopban van vezéregyes $\Rightarrow \det \neq 0$

$\Leftarrow$

A lépcsős alakra hozás után látjuk, hogy $\det(A) \neq 0$, mert a főátlóban nem volt 0.

Másrészt: Ha $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists$ Inverze $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = (A^{-1} \cdot A)x = A^{-1} \cdot (Ax) = A^{-1}b \Rightarrow \exists x, \; A^{-1}b \text{ megoldás}$$

~~(másik irány)~~ szükségesség: megoldás egyértelmű $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A oszlopai lin. ftlenek. $\Rightarrow$ A rangja $n \Rightarrow \exists$ $n \times n$-es

nem-null det-ú részmátrix $\Rightarrow$ ez csak is A lehet.

Inverz

Def: A B $n \times n$-es mátrix az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix

balinverze, ha $B \cdot A = I_n$, ahol I_n az $n \times n$

méretű egységmátrix, aminek főátlója csupa

1, egyéb elemei 0-k. A $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix az

A jobbinverze, ha $A \cdot J = I_n$

Áll: ~~Ha~~ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak $\exists$ jobb, és balinverze

is, akkor ezek egyenlőek.

Biz: $B = BI = B(AJ) = (BA)J = IJ = J$

Lemma: Ha A és B összeszorozható mátrixok, akkor

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Biz:

$$\left((A \cdot B)^T\right)_{i \text{ sor}}^{j \text{ oszlop}} = (A \cdot B)_j^i = A_j \cdot B^i =$$

$$\overset{(\text{sor-oszlop})}{=} (B^T)_i \cdot (A^T)^j = (B \cdot A)^T{}_i^j$$

T: Minden $n \times n$-es A mátrixnak, aminek van

jobbinverze, annak van balinverze is.

$\det A \neq 0 \Rightarrow \det A^T \neq 0 \Rightarrow A^T$-nek van jobbinverze J

$$A^T \cdot J = E$$

$$(A^T \cdot J)^T = E^T = E$$

$$J^T \cdot A = E$$

Inverz létezésének szükséges és elégséges feltétele

$\boxed{T}$ $\det A \neq 0 \iff \exists\, \mathcal{J}$, hogy $A \cdot \mathcal{J} = I$

Biz: Végezzük azt a lineáris egyenletrendszert, amelynek kibővített együtthatómátrixa az A mátrix, jobbról az e_i egységvektorral bővítve.

Ha $\mathcal{J}$ az A mátrix jobbinverze akkor $\mathcal{J}$ minden oszlopa egy megoldását adja ennek az egyenletrendszernek, mert $A \cdot \mathcal{J}^i = e_i$ a jobbinverz definíciója szerint. Az oszlopokat egymás mellé rendezve $A \cdot \mathcal{J} = I_n$

Az e_i vektorok egymás mellé írhatóak a Gauss eliminációban.

Ezeket az egyenletrendszereket kell megoldani $\Rightarrow$ Gauss elimináció. Mivel a Gauss-elimináció a mátrix det.-ának 0-ságán nem változtat, ha (R)LA-ra hozzuk vele és van megoldása $\Rightarrow$ van inverze is $\Rightarrow \det A \neq 0$.

Ha tilos sor keletkezik $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ nincs megoldás $\Rightarrow \nexists$ inverz.

Szükségesség: Tfh $\det A = 0$.

Ekkor a Gauss-eliminációban bal oldalon egy csupa 0 sor lesz $\Rightarrow$ jobb oldalon is annak kell lennie $\Rightarrow \Leftarrow$ I-nek nincs ilyen sora

$$\det(A \cdot \mathcal{J}) = \det A \cdot \det \mathcal{J}$$

$$A \cdot \mathcal{J} = E \Rightarrow \det E = 1$$

ha $\det A = 0$; akkor $1 = 0$ ↯

$\boxed{T}$ $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(AB) \cdot (AB)^{-1} = E$ / A^{-1} balról

$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E} \cdot B \cdot ((AB)^{-1}) = A^{-1}$ / B^{-1} balról

$\underbrace{(B^{-1} \cdot B)}_{E} \cdot (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(7.) Mátrix rangja, a rangfogalmak egyenlősége, rang meghatározása Gauss-eliminációval. Lineáris leképezés fogalma, egyszerű tulajdonságai, Példák.

Def: Az A $n \times k$ méretű mátrix sorrangján $s(A)$ az A mátrixból kiválasztható lineárisan független sorok számát értjük. $(\dim \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle)$

oszloprang: A lin. fgtlen oszlopok száma $(o(A))$

determinánsrang: A legnagyobb nemnulla aldeterminánsának mérete. $d(A)$

[T] $\forall A$ mátrixra $d(A) = d(A^T)$

Biz: Mivel négyzetes mátrix determinánsa egyenlő a transzponáltjának a determinánsával, ezért az A-beli legnagyobb aldet az A^T beli legnagyobb transzponáltja lesz, a kettő pedig egyenlő.

[T] $o(A) = s(A) = d(A)$ $\forall A$-ra

Köv: $o(A) = s(A) = d(A)$

Biz: $o(A) = s(A^T) = d(A^T) = d(A)$

$d(A) = d(A^T)$

Biz: Legyenek A mátrix ~~(oszlop)~~ sorvektorai $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ezeket rendezzük sorba

$\dim (v_1, v_2, \dots, v_n) = s(A) = s$

úgy, hogy az első s (ami a száma) lin. független legyen.

Ekkor $\dim (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = s(A) = s$, mert a többi előáll az első lin. kombinációjaként.

Ha belátjuk, hogy $\dim\langle v_1, v_2, \dots, v_k\rangle = d(A)$, akkor kész vagyunk.

A Gauss-elimináció nem változtatja meg a sorrangot, mert a megváltozott mátrix sorai ugyanazt a teret generálják.

Változások a determinánsrang nullaságán

1.) λ-val való szorzás $\Rightarrow$ mivel $\lambda \neq 0$ nincs változás.

2.) két sor cseréje $\Rightarrow$ -1-szeresre változtat nincs változás

3.) transzponálás mátrix rangján nem változtat

4.) Egy sor λ-szorosának a másikhoz adása

Tfh változtat $\Rightarrow$ találtunk egy $k \times k$-nál nagyobb nem nulla aldet.-et. Ekkor a művelet

$$\left|\cdots\right| = \left|\cdots\right| + \lambda\left|\cdots\right|$$

ha egy sort λ-val szorzom, és beírom a helyére

Mivel mindkét tag determinánsa 0 $\Rightarrow$ az összege is 0 lesz $\Rightarrow$ az (al)det rang nem változik.

Ekkor a Gauss-elimináció után kapott lépcsős alakban az $1..l$ sorban van vezéregyes, a maradék pedig csupa 0 sor $\Rightarrow$ itt a max det. rang is l, mert $l \times l$-es a max nemnull aldet.

Így $d(A) = s(A)$

Ebből pedig az előzőek alapján

$$d(A) = s(A) = o(A) = \text{a mátrix rangja}$$

Lineáris leképezés

Def: Az U, V valós vektorterek között ható $A: U \to V$ függvény lineáris leképezés, ha

$$(1) \quad A(u+v) = A(u) + A(v)$$

$$(2) \quad \lambda A(u) = A(\lambda u)$$

Azonos terek közötti leképezéseket lineáris transzformációknak hívjuk.

Tulajdonságai

$$(1) \quad A(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$A(0+0) = 0$$

$$A(0) + (A0) = A(\underbrace{0+0}_{0})$$

$$A(0) + A(0) = A(0)$$

$$0 = A(0)$$

$$(2) \quad A(u_1+u_2+\dots+u_n) = A(u_1) + A(u_2) + \dots + A(u_n)$$

definíció szerint

$$(3) \quad A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_3 u_3) = \lambda_1 A(u_1) + \lambda_2 A(u_2) + \dots + \lambda_3 A(u_3)$$

Példák:

függvény: $A(u) = u + x$

Nem leképezés, hiszen $A(0) = 0 + x \neq 0$

$$A(0) \neq 0$$

Lin. leképezés: (1) x tengelyre vetítés

(2) origó körüli forgatás α fokkal

(3) origón átmenő egyenes tükrözése

(4) polinomok deriválása vektortéren

(8.) Lineáris leképezés adott bázispárra vett mátrixának definíciója, vektor képének meghatározása mátrix segítségével. Lineáris leképezések szorzata, szorzat mátrixa

Def: Legyen $A \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezés,

$B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ az U, $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ a V bázisa. Az A leképezés mátrixát a B_1 és B_2 bázisokban az alábbi módon írjuk fel:

$$[A]^{B_1}_{B_2} := \left([A(u_1)]_{B_2} \mid [A(u_2)]_{B_2} \mid \dots \mid [A(u_n)]_{B_2}\right),$$

azaz egy olyan $m \times n$-es mátrixról van szó, aminek i-edik oszlopa az u_i bázisvektor $A(u_i)$ képének koordinátavektora. Másképpen kifejezve, ha u_i képe $A(u_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^i v_j$ alakban áll elő a B_2 bázisban, akkor az $[A]^{B_1}_{B_2}$ mátrix j-edik sorának i-edik eleme λ_j^i lesz.

Vektor képe

T: $A \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $B_1 \subseteq U$ és $B_2 \subseteq V$ bázisok $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [A(u)]_{B_2} = [A]^{B_1}_{B_2}\,[u]_{B_1} \quad \forall u \in U$$

A mátrixa B_1-ből képez B_2-be

Biz: $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$

$$A(u) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_i^j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_i (\lambda_j^i v_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_j^i v_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_j^i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_j^i\right) v_j \Rightarrow$$ ez egy olyan m elemű oszlopvektor, aminek j-edik koordinátája $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_j^i$, ami a leképezés mátrixa.

$\boxed{T}$ Összegleképezés mátrixa a megfelelő mátrixok összege, skalárszoros leképezésé pedig a mátrix skalárszorosa lesz.

Biz: leképezés definíciójából, és mátrixának definíciójából

Leképezések szorzata

Def: $A \in Hom(U, V)$, $B \in Hom(V, W)$ esetén a $BA : U \to W$ leképezést a $(BA)(u) := B(A(u))$ $(\forall u \in U)$ képlettel értelmezzük. Azaz két lineáris leképezést úgy szorzunk össze, hogy egymás után alkalmazzuk őket.

fontos!

Leképezések szorzata is leképezés

$\boxed{T}$ Ha $A \in Hom(U, V)$, $B \in Hom(V, W)$, akkor $BA \in Hom(U, W)$, azaz lineáris leképezések szorzata is lineáris leképezés.

Biz: Ha $A \in Hom(U, V)$ és $B \in Hom(V, W)$ (akkor $BA \in Hom(U, W)$) biz.!

Legyen $u, v \in U$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, ekkor: def-ből!

$$(BA)(u+v) = B(A(u+v)) = B(A(u) + A(v)) =$$
$$= B(A(u)) + B(A(v)) = (BA)(u) + BA(v)$$

és

$$(BA)(\lambda u) = B(A(\lambda u)) = B(\lambda A(u)) \overset{\lambda B(A(u))}{=} \lambda (BA)(u)$$

Szorzat mátrixa

$\boxed{T}$ Ha $A \in Hom(U, V)$ és $B \in Hom(V, W)$ és B_1, B_2, B_3 U, V, W bázisai akkor

$$[BA]^{B_1}_{B_3} = [B]^{B_2}_{B_3} \cdot [A]^{B_1}_{B_2}$$

Azaz lineáris leképezések szorzatának mátrixa egyenlő a leképezések mátrixainak szorzatával

Biz: $[BA]_{B_3}^{B_1}$ mátrixának j-edik oszlopa, azaz a B_1-beli bázisvektorok B_3 bázis szerinti koordinátavektorai: ~~Tétel~~ $\boxed{\text{Def}}$ szerint $[B]_{B_3}^{B_2} \cdot [A(b_j)]_{B_2}$, és $[A(b_j)]_{B_2} = [A]_{B_2}^{B_1}$ j-edik oszlopa! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $[BA]_{B_3}^{B_1}$ j-edik oszlopa $[B]_{B_3}^{B_2} \cdot [A]_{B_2}^{B_1}$ j-edik oszlopa. $\Rightarrow$ j, i-edik elem:

$[B]_{B_3}^{B_2}$ i-edik sora $\cdot$ $[A]_{B_2}^{B_1}$ j-edik oszlopa.

Tétel: Ha $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$ tetszőleges mátrixok, akkor $(C \cdot B) \cdot A = C \cdot (B \cdot A)$, azaz a mátrixszorzás asszociatív.

Biz: A, B, C lineáris leképezések:

$C \cdot ((BA)(u)) = C \cdot (B \cdot (Au)) = C \cdot B \cdot (A(u))$.

(9.) Lineáris leképezések képtere, magtere, példák. Dimenziótétel.

Magtér

Def: Az $A : U \to V$ lineáris leképezés magtere (Ker A:=)

$$\text{Ker}A := \{ u \in U : A(u) = \underline{0} \}$$

Képtere pedig

Képtér

$$\text{Im}A := \{ A(u) : u \in U \}$$

Tehát a magtér mindazon U-beli vektorok halmaza, amelyek A által V nullvektorába képződnek.
A képtér pedig a V tér azon elemeinek halmaza, amelyek előállnak valamely U-beli vektor képeként.

Példa: - x-tengelyre vetítés:

képtér: maga az x

magtér: y tengely

- Az origó körüli (nyújtva) forgatás és az origón áthaladó tengelyre tükrözéskor:

képtér: a sík

magtér: az Origó

- deriválás

képtér: az összes valós polinom halmaza

magtér: konstans polinomok halmaza

$\boxed{T}$ Ha $A \in \text{Hom}(U, V)$, akkor $\text{Ker}A \leq U$ és $\text{Im}A \leq V$, tehát a képtér és a magtér egyaránt alterek.

Biz: A műveletre zártságot kell csak igazolni. (Tudjuk, hogy részhalmazok)

Ker (A): Ha $u, v \in \text{Ker}A$, akkor $A(u) = A(v) = 0$, így

$$A(u) + A(v) = 0 + 0 = A(u+v) = A(0)$$

$\lambda A(u) = \lambda 0 = 0 = A(u) = A(\lambda u) = 0$

$A(\lambda u) = \lambda A(u)$, mert $\lambda \cdot 0 = 0$ és 0 (önkéne) benne van Ker A-ban

$A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda 0 = 0$

Im A: ha $\lambda \in \mathbb{R}$ $A(u) + A(v) = A(u+v) \in \operatorname{Im} A$

$\lambda A(u) = A(\lambda u) \in \operatorname{Im} A$

Dimenzió-tétel

__Dimenziótétel:__ Ha $A: U \to V$ lineáris leképezés, akkor

$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim U$.

__Biz:__ Legyen $B' = \{b_1; b_2; \dots; b_k\}$ a Ker A egy bázisa. Mivel $b_1; b_2; \dots; b_k$ független ezért létezik a térnek egy olyan bázisa, amely tartalmazza B'-t. Legyen ez $B = \{b_1; b_2; \dots; b_k; b_{k+1}; b_{k+2}; \dots; b_n\} \in U$ bázis. Látható, hogy $\dim \operatorname{Ker} A = k$, valamint $\operatorname{Dim} U = n$. Azt kell igazolni, hogy $\dim \operatorname{Im} A = n-k$, vagyis $\{A(b_{k+1}); A(b_{k+2}); \dots; A(b_n)\}$ Im A bázisa.

Legyen $A(u)$ a képtér egy tetszőleges vektora!

Legyen az $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ akkor $A(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(b_i) =$
$= \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i A(b_i)$, hiszen $A(b_1) = A(b_2) = \dots = A(b_k) = 0$.

Tehát $\{A(b_{k+1}); A(b_{k+2}); \dots; A(b_n)\}$ generátorrendszer.

Tegyük fel, hogy összefüggő $0 = \sum_{i=k+1} \lambda_i A(b_i) =$

$= A\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i b_i\right) = A(u_i) \Rightarrow u \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow$

$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i b_i$,

ahonnan b_i-k függetlensége miatt ez csak triviális lineáris kombináció lehet! $\Rightarrow$ A kiindulási tér is független volt $\Rightarrow$ valóban Im A bázisa.

(10.) Lineáris transzformációk, illetve négyzetes mátrixok sajátértékei, sajátvektorai, ezek meghatározása, példák.

lin. transzf.

Def: A lineáris transzformációk olyan lineáris leképezések, melyek ugyanazon vektortéren képeznek, vagyis $A: U \to U$, ahol U valós vektortér.

sajátérték
sajátvektor
(sajátaltér)

Def: Legyen $A: V \to V$ egy lineáris transzformáció, $v \in V$ egy vektor a térből és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. Ekkor a $v \in V$ vektort az A transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük, ha $^{(1)}\, v \neq 0$ és $^{(2)}\, A(v) = \lambda v$ teljesül.
(Ha λ a transzf. saját értéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátaltér a nullvektorból és a λ-hoz tartozó sajátvektorokból áll: $\{v \in V: A(v) = \lambda \cdot v\}$)

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy négyzetes mátrix, $v \in \mathbb{R}^n$ egy oszlopvektor, és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. A v vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának mondjuk, ha (1) $v \neq \underline{0}$ (2) $A \cdot v = \lambda \cdot v$ teljesül

$\boxed{T}$ Lineáris transzformáció minden sajátvektora pontosan egy sajátértékhez tartozik.

Biz: Ha v sajátvektor $v \neq 0$. Tfh. 2 sajátértékhez is tartozik. Ekkor $A(v) = \lambda v$; $A(v) = \mu v \Rightarrow \lambda v = \mu v \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = \mu$; $(\lambda - \mu) v = 0 \Rightarrow$ Ez két esetben lehet. Vagy $v = 0$, de ez kizárt vagy $\underline{\lambda = \mu}$, mert $\lambda - \mu = 0$. Minden sajátvektor 1 s. értékhez tartozik.

Def: Az $A: V \to V$ lineáris transzformáció karak-
terisztikus polinomja $k_A(\lambda) := \det([A]_B^B - \lambda I)$.
Ahol B a V vektor egy tetszőleges bázisa.

$\boxed{T}$ (1) A karakterisztikus polinom a λ változónak egy n-edfokú polinomja, ahol $n = \dim V$

(2) A karakterisztikus polinom független a felírásra használt bázistól

(3) A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár pontosan akkor sajátértéke az A transzformációnak, ha $k_A(\lambda) = 0$, azaz λ gyöke a karakterisztikus polinomnak.

Biz: (1) A determináns definíciójából $\Rightarrow$ a karakterisztikus polinom olyan n tényezős szorzatok összege, ahol a szorzatok tényezői az $[A]_B^B - \lambda I$ mátrix elemei. E mátrix minden eleme legfeljebb elsőfokú polinomja λ-nak, ezért minden a szorzat tagja egy legfeljebb elsőfokú polinom $\Rightarrow$ Minden szorzat egy legfeljebb n-edfokú polinom, ahol pontosan egy n-edfokú tag lesz, mert csak a főátlóban szerepelnek λ-k. (-1 a főegyütthatója, mert kivonjuk a λ-t). Ezért a determináns ténylegesen λ-nak egy n-edfokú polinomja.

(3) λ egy A transzf. sajátértéke. Ekkor van egy $v \neq 0$ λ-hoz tartozó sajátvektora:
$$A(v) = \lambda v \Rightarrow A(v) - \lambda v = 0$$
id legyen az identikus lin. transzf., amely minden vektorhoz önmagát rendeli. Ekkor

$\lambda\, id$ is lin. transf., ami minden vektorhoz λ-szorosát rendeli, tehát ha λ A sajátértéke, akkor az előzőek alapján $(A - \underbrace{\lambda\, id}_{\lambda id = \lambda v})v = 0$ (mert $A(v) = \lambda\, id(v)$ ha v sajátvektor)

Viszont $A - \lambda\, id$ is egy lin. transf. és így ha λ A transf. sajátértéke, akkor $(A - \lambda\, id)v = 0$, vagyis $A - \lambda\, id$ transf. ~~ezt~~ a λ sajátértékhez tartozó saját vektorokat 0-ba viszi.

Legyen A a V tér transf. és B V egy bázisa. Ekkor az előző állítás: $([A]_B^B - \lambda I)v = 0$, ha $[A]_B^B$ az A transf. B bázison vett mátrixa. Így ha $[A]_B^B - \lambda I$ mátrixot egy sajátvektorral megszorozzuk a nullvektort kapjuk $\Rightarrow$ a mátrix összefüggő (mert v sajátvektor $\neq 0$ $\Rightarrow$ rangja $< n \Rightarrow$ determinánsa 0. $\Rightarrow \det([A]_B^B - \lambda I) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha λ az A transf. sajátértéke, ráadásul ez független a felíráshoz használt B bázistól.

Sajátvektorok és sajátértékek meghatározása: Karakterisztikus polinom gyökeiből.

Példa: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{karakterisztikus polinom}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2-\lambda & 5 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda) - 5) +$
$+ (0 + 3(2-\lambda)) = 2-\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = (2-\lambda)(\lambda - (1+\sqrt{3})) \cdot$
$\cdot (\lambda - (1-\sqrt{3}))$. Ebből a sajátértékek:
$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1+\sqrt{3};\ \lambda_3 = 1-\sqrt{3}$.

Ebből pl.: A $\lambda = 2$-höz tartozó sajátvektorokra igaz, hogy ~~$\det(A-2I)=0$~~ és

$(A-2I)x = 0$, ebből a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ebből x_2 szabad paraméter,

$x_1 = -x_2$

$x_3 = 0$

A sajátvektorok az $(-x_2, x_2, 0)$ alakú vektorok, ha $x_2 \neq 0$.

(11) Komplex számok: algebrai (kanonikus) és trigonometrikus alak, alapműveletek algebrai alakban, abszolút érték (hossz), konjugált. Komplex számok (~~szorzatának~~) szorzatának, hatványainak, n-edik gyökeinek kiszámítása trigonometrikus alakban, egységgyökök.

Komplex szám

Def: a komplex számok halmaza

$$\mathbb{C} := \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Minden komplex szám egy formális $a+bi = \underline{z}$ alakban írható fel, ahol a a valós rész, b a képzetes rész, i a képzetes egység.

Ez az algebrai vagy kanonikus alak.

Def: $\boxed{i^2 = -1}$

$$a+bi = a'+b'i \Rightarrow a=a' \text{ és } b=b'$$

Műveletek: $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Def: $z = a+bi$ komplex szám $\overline{z}$ konjugáltja:

$$\overline{z} = a-bi$$

osztás: nevező konjugáltjával bővítünk:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Lemma: Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számokra

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(4) Ha $z \neq 0 \Rightarrow \overbrace{z \cdot \overline{z}}^{\in \mathbb{R}} > 0$

Biz: kanonikus alakból

Lemma: $zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$ vagy $w = 0$

Def: $z \in \mathbb{C}$ akkor $\overset{= a+bi}{z}$ abszolútértéke:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Def: z komplex szám szöge α, ha az origóból a z-be mutató vektor a valós tengellyel α szöget zár be.

Lemma:

$|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$ (1) Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $|z|$ valós, és $|z| \geq 0$; valamint $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Pitagorasz-tétel → (2) $|z|$ a komplex számsíkon z komplex számnak megfelelő pont távolsága az origótól

szögf + háromsz. (3) Ha a z komplex szám szöge α, akkor

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Háromszög-egyenlőtlenség (4) Ha $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számok, akkor

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Def: Ha $z \in \mathbb{C}$ és z szöge α akkor z trigonometrikus alakja: $|z| (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) = z$

Lemma: Szorzás és osztás trigonometrikus alakban.

$z = a + bi$; $w = c + di$ $\in \mathbb{C}$, ahol

$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$w = |w| (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$

$z \cdot w = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha) |w| (\cos\beta + i \sin\alpha) =$

$= |z| \cdot |w| \cdot (\cos\alpha \cos\beta + i (\sin\alpha \sin\beta) =$

$= |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i (\sin(\alpha+\beta)))$.

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\alpha-\beta) + i \sin(\alpha-\beta))$

Ebből: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \alpha) + i \sin(n \alpha))$

Gyökvonás: $\sqrt[n]{z} = x \Longleftrightarrow x^n = z$

$x = |x| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$x^n = |x|^n (\cos(n\alpha) + i \cdot (\sin(n \cdot \alpha))) =$

$= |z| (\cos\beta + i \sin\beta)$

$\Downarrow$

$|x|^n = |z| \Rightarrow |x| = \sqrt[n]{|z|}$

$\beta = n \cdot \alpha + 2k\pi$

$\alpha = \frac{\beta + 2k\pi}{n} \Rightarrow$ n darab gyök!

Ebből: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]$ ahol $k \in \mathbb{Z}$

Def: $z \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök, ha $(|z^n| = 1)$ $z^n = 1$

Egységgyökök: $\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

(12) Kombinatorikai leszámlálási feladatok: ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, variáció, kombináció, példák. Egyszerű összefüggések a binomiális együtthatók között, Pascal-háromszög. Binomiális tétel.
Gráfelméleti alapfogalmak: gráf, egyszerű gráf, komplementer, fokszám, részgráf, feszített részgráf.

Permutáció:
Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor n elem egy permutációja az n db, egymástól megkülönböztethető elem egy sorbarendezését jelenti. n elem permutációinak száma n!

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Def: Az n természetes szám faktoriálisa $n! = \begin{cases} 1, \text{ ha } n=0 \\ 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \text{ ha } n>0 \end{cases}$

Példa: Kártyapakli sorbarendezéseinek száma.

Ismétléses permutáció:
Ha n elem között l ismétlődő van, amelyek sorban $k_1, k_2, \ldots, k_l$-szer ismétlődnek, akkor az n elem ismétléses permutációinak száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$, mert le kell osztanunk az ismétlődő elemek sorrendjeivel.
Példa: Sorba szeretnénk rakni 5 fehér, 3 kék, 4 piros golyót (az azonos színűeket nem tudjuk megkülönböztetni). Hány féleképpen lehetséges ez?

Variáció:
$k, n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq k \leq n$. Az n elem k-ad osztályú (ismétlés nélküli) variációján n db egymástól megkülönböztethető elemből kiválasztott k elem egy sorrendjét értjük.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Példa: Egy versenyen 10-en indultak, hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

Ismétléses variáció:

$n, k \in \mathbb{N}$. n elem k-ad osztályú ismétléses variációján egy olyan k hosszú sorozatot értünk, melynek tagjai n db egymástól megkülönböztethető elemből kerülnek ki, de minden elemet tetszőlegesen sokszor felhasználhatunk. Ez n^k-féleképpen lehetséges.

$$\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ db}} = n^k$$

Példa: A fagyizóban 10 féle fagylalt van. Hányféle elrendezésben kérhetünk 4 gombóc fagyit? (a sorrend számít)

Kombináció:

$n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Ekkor n elem k-ad osztályú kombinációján egy (rögzített) n elemből álló halmaz egy k-elemű részhalmazát értjük. (Hányféleképpen választhatok ki n elem közül k db-ot.)

Def: $\binom{n}{k}$ jelölés $= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ egy binomiális együttható

A sorrend nem számít! $\binom{n}{k}$-féleképpen lehetséges

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ db}} \,/\, k!$$

$k!$ lehetséges permutációk

Példa: Lottó: ~~Hogyan~~ Hányféleképpen lehet 90 lehetséges nyerőszámból kihúzni 5 lehetséges nyerőszámot?

Ismétléses kombináció:

$n, k \in \mathbb{N}$: n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációján azt a k hosszú sorozatot jelenti, amelynek minden eleme (rögzített) n elemből kerül ki, de mindegyiket tetszőlegesen sokszor felhasználhatjuk. A sorrend nem számít.

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ db}} \text{ osztva az ismétlődésekkel}$$

Ez elképzelhető egy $(n+k-1)$ hosszú 0/1 sorozat tagjaival. ~~Mindkét~~ (Például ha így választunk)

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \Rightarrow a_i$ annyi alkalommal választottuk az i-edik elemet. Összesen k elemet választunk.

Minden a_i helyére annyi 1-est írunk, ahányszor az értéke, minden + helyére egy 0-át. Ekkor $n-1+k$ jegyet írunk le, az ismétléses kombinációk száma pedig az ilyen sorozatok számával egyenlő. Ilyen sorozat pedig $\binom{n+k-1}{k}$ db van, hiszen k helyet kell kiválasztanunk a sorozatból.

Példa: Cukrászdában 20 féle sütemény van, mindegyikből legalább 6 db. Hányféleképpen vehetünk 5 db süteményt? (A sorrend nem számít.)

Binomiális tétel

Binomiális tétel

Ha $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n$$

$(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)$

Biz: A zárójel felbontás után a kifejtési tagok úgy adódnak, hogy az n tényező mindegyikéből kiválasztjuk az a vagy b valamelyikét, és ezeket összeszorozzuk. Tehát minden kifejtési tag $a^i b^{n-i}$ alakú lesz valamely $0 \leq i \leq n$ egészre. (Hányszor lehet kiválasztani i db a-t n-ből? $\Rightarrow \binom{n}{i}$-szer.)

Stöv (1): $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i\cdot 1^{n-i}=(1+1)^n=2^n$

Pascal-háromszög: A binomiális együtthatók háromszög alakba rendezése. $\Rightarrow$ látszik a 2 $\Rightarrow$ (1).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \cdot 2\\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \cdot 2\\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \cdot 2\\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \cdot 2\\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \cdot 2\\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Minden sorban az elemek összege 2^{i-1}

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

(x elemet nem választjuk + x elemet biztosan választjuk)

egy elem = a két fölötte álló elem összegével

Stöv (2): $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\mp\dots\pm\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}1^{n-i}=(1-1)^n=0^n=\underline{0}$

Gráf

Def: A $G=(V,E)$ pár egyszerű gráf, ha $V\neq\emptyset$ és $E\subseteq\binom{V}{2}:=\{\{u,v\}: u,v\in V, u\neq v\}$, azaz E elemei V bizonyos kételemű részhalmazai.

Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ jelöli G csúcsainak, $E(G)$ G éleinek halmazát $\Leftarrow$ $V(G)$, $E(G) \Rightarrow G=(V,E)$

Egy (nem egyszerű) gráfban lehet hurokél és párhuzamos él is.

Def: Fokszám: Egy csúcs fokszáma a csúcsra állított élek száma (Hurokél 2!)

Def: $G=(V,E)$-nek $G'=(V',E')$ részgráfja, ha $V' \subseteq V$, illetve $E' \subseteq E$ és E'-beli élek végpontjai benne vannak V'-ben.

Def: $G=(V,E)$-nek $G'=(V',E')$ feszített részgráfja ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ úgy, hogy E'-ben szerepel az összes olyan él, amely V' csúcsai között fut G-ben.

Def: Komplementer gráf: A G egyszerű gráf komplementere: $\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$

Vagyis a csúcshalmaz azonos, az élhalmaz pedig azon élek a teljes gráfból, amelyek nincsenek benne G-ben.

Def: Teljes gráf: Az összes lehetséges él szerepel az élhalmazában úgy, hogy még egyszerű maradjon.

T: Ha G véges gráf, akkor a fokszámainak összege az élek számának kétszerese.

(13.) Gráfok izomorfiája. Összefüggőség, séta, út, kör, komponens, fa. Fák egyszerű tulajdonságai. Feszítőfa, létezésének szükséges és elégséges feltétele

Izomorfia — Def: A G_1 és G_2 gráfok izomorfak, ha létezik egy-egy

$\varphi_V : V(G_1) \to V(G_2)$

és

$\varphi_E : E(G_1) \to E(G_2)$ bijekció,

hogy ha $uv \in E(G) \iff \varphi_V(u)\varphi_V(v) = \varphi_E(uv)$

Vagyis létezik kölcsönös (bijekció) megfeleltetés a pontok között úgy, hogy tetszőleges u, v esetén pontosan annyi él vezet u-ból v-be, mint u képéből v képébe.

Élsorozat — Def: Egy gráf élsorozata egy olyan $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k)$ sorozat, amire $e_i \in E(G)$ és $e_i = v_i v_{i+1}$

Séta: Olyan élsorozat, amelynek minden éle különböző.

Körséta: Olyan séta, hogy $v_1 = v_k$.

Út: Olyan séta, amelyben minden csúcs csak egyszer fordul elő. ~~(A végpontok lehetnek azonosak?)~~ de, a végpontok lehetnek azonosak.

Kör: Olyan út, amelynek végpontjai azonosak.

Összefüggőség — Def: A G gráf összefüggő, ha bármely két pontja között vezet séta.

Komponens — Def: Komponens: $K \subseteq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között $\exists$ G-séta, de $\nexists$ u-v séta, ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$

A gráf minden maximális feszített részgráfja.
Azok a csúcsok tartoznak egy komponensbe, amelyek között vezet élsorozat.

Fa **Def:** Egy G gráf fa, ha körmentes – azaz nem tartalmaz kört – és összefüggő.

Def: Feszítőfa: Egy olyan fa részgráfja G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz.

T G-nek ∃ feszítőfája $\Leftrightarrow$ G összefüggő

$\Rightarrow$: mivel feszítőfa $\Rightarrow$ fa $\Rightarrow$ összefüggő $\Rightarrow$ G is az.
$\Leftarrow$: összefüggő: ha körmentes: feszítőfa, ha nem körmentes, akkor hagyjunk el a körökből éleket (mindegyikből 1-et), amíg van kör.

T Egy n csúcsú körmentes gráf összefüggő $\Leftrightarrow$ éleinek száma $n-1$

$\Rightarrow$: Építsünk (fát) gráfot az n pontú üres gráfból. Kezdetben nincs él $\Rightarrow$ n komponensből áll. Ha behúzunk egy élt 1-gyel csökkentjük a komponenseinek számát. Mivel körmentes, csak olyan élt húzhatunk be, amely 2 komponens között fut. $\Rightarrow$ A komponensek száma egyre csökken, míg végül $\underline{n-1}$ él behúzása után 1 komponens marad $\Rightarrow$ nem tudunk több élt behúzni. $\Rightarrow$ $n-1$ éle van.
$\Leftarrow$: Ha $n-1$ élt húztunk be, akkor $n-(n-1)=1$ komponensből fog állni a gráf $\Rightarrow$ összefüggő.

T (Legyen) G n pontú $(n-1)$ élű, összefüggő, egyszerű gráf $\Rightarrow$ G körmentes

Biz: Az előzőhöz hasonlóan építjük a gráfot. Minden újonnan behúzott él 2 komponenst köt össze $\Rightarrow$ nem hoz létre kört. Mire $n-1$ élt behúzunk pont akkorra érünk meg a komponensek száma nagyobb lenni, mint 1, vagyis a gráf összefüggő lesz, de eddig nem alkothattunk kört, több vonalat pedig már nem húzunk.

Az előző két tételből: Ha G fa:

- $n-1$ darab éle van
- összefüggő
- körmentes

(minimális összefüggő, maximális körmentes)

Def levél: Egy fa v csúcsa levél, ha fokszáma 1.

T Minden legalább 2 pontú F fának van legalább 2 levele.

Biz: Tekintsük G leghosszabb útját, mondjuk az u-t és v-t összekötő P-t. Ekkor sem u-ból, sem v-ből nem indulhat több él, mert akkor (~~az hosszabb lenne~~) P nem lenne a leghosszabb, ∃ leghosszabb út, mert G fa $\Rightarrow$ körmentes. Így P két végpontja pont 2 levél

(Cayley-tétel: n ponton n^{n-2} féle fa létezik)

T: Legyen G n pontú $(n-1)$ élű, összefüggő, egyszerű gráf $\Rightarrow$ G körmentes

Biz: Az előzőhöz hasonlóan építjük a gráfot. Minden újonnan behúzott él 2 komponenst köt össze $\Rightarrow$ nem hoz létre kört. Mire $n-1$ élt behúzunk pontosan akkor szűnik meg a komponensek száma nagyobb lenni, mint 1, vagyis a gráf összefüggő lesz, de eddig nem alkothattunk kört, több vonalat pedig már nem húzunk.

Az előző két tételből: Ha G fa:

- $n-1$ darab éle van
- összefüggő
- körmentes

(minimális összefüggő, maximális körmentes)

Def: Levél: Egy fa v csúcsa levél, ha fokszáma 1.

T: Minden legalább 2 pontú F fának van legalább 2 levele.

Biz: Tekintsük G leghosszabb útját, mondjuk az u-t és v-t összekötő P-t. Ekkor sem u-ból, sem v-ből nem indulhat több él, mert akkor (az ~~hosszabb lenne~~) P nem lenne a leghosszabb, ∃ leghosszabb út, mert G fa $\Rightarrow$ körmentes. Így P két végpontja pont 2 levél.

(Cayley-tétel: n ponton n^{n-2} féle fa létezik)

(14.) Síkbarajzolhatóság, kapcsolata a gömbre rajzolhatósággal, Euler-formula, Kuratowski-tétel (biz. csak a könnyebb irányban). Síkbarajzolható gráf ~~homeomorfizmusának a fogalma~~ duálisának a fogalma. Példa olyan gráfra, amelynek léteznek nem izomorf duálisai.

<u>Def</u>: Egy diagram egy gráfnak a síkbarajzolása, ha az élek nem keresztezik egymást

<u>Def</u>: Egy gráf akkor síkba rajzolható, ha létezik síkbeli lerajzolása

<u>Tétel</u>: Egy gráf pontosan akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

<u>Biz</u>: Sztereografikus projekcióval:
Helyezzük el úgy a gömböt a síkon, hogy a déli sarkon érintse a síkot. Ekkor az északi sarkból ~~az~~ a sík pontjai vetítéssel bijektíven megfelelnek a gömb pontjainak. Ezáltal mindkét irány bizonyított. Úgy válasszuk meg a gömb D-i csúcsának a helyét a síkon, hogy az ne a gráf csúcsára essen. A bijekció miatt, ha a síkon nem metszik egymást a gráfélek, a gömbön sem fogják.

<u>Def</u>: A síkba rajzolt gráf a síkot tartományokra osztja. (Egy) A sík két pontja egy tartományban van, ha van közöttük olyan törtvonal, amely nem metsz gráfélt.

Euler-tétel

Euler-tétel: Ha G egy összefüggő, síkba rajzolt gráf, akkor

$$n+t=e+2,$$

ahol n: a csúcsainak, t: a tartományainak, e: az éleinek a száma

Biz:

1. ∄ kör ⇒ G fa ⇒ $\overset{e=n-1}{(n=e+1)}$, $t=1$
$n+1=e+2$ ✓

2. Ha ∃ kör: Hagyjuk el egy kör egyik élét. Ekkor az élek száma és a tartományok száma is eggyel csökken, majd végül fa lesz. Így mivel mindkét oldalt egyenlően csökkentettük az egyenletben, az eredetileg is igaz volt.

$\boxed{T}$ Egyszerű, síkba rajzolható gráf legalább 3-csúcsú egyszerű gráf esetén:

$$e \leq 3n-6$$

Biz: Összefüggő gráfokra: Vegyünk egy egyszerű síkbarajzolt összefüggő gráfot. Mivel egyszerű, minden tartományt legalább 3 él határolja, és minden él maximum 2 tartományt határol. Ezt összegezve $\underset{min}{3t} \leq \overset{max}{2e}$, mert minden tartománynál minden élt kétszer számoltunk. Mivel összefüggő és síkba rajzolható, alkalmazható rá az Euler-tétel

$n+t=e+2$ és tudjuk, hogy $3t=2e$

ebből

$$3n+3t=3e+6$$

$$3n+2e=3e+6 \qquad 3t \leq 2e$$

$$3n=e+6$$

$$e=3n-6$$

$$e \leq 3n-6$$

Következmény: K_5 nem síkbarajzolható

Biz: Tfh. az, ekkor igaz rá, hogy

$$e \leq 3n-6 \quad \text{de } n=5 \quad e=10$$

$$10 \leq 15-6=9 \;\lightning$$

$\boxed{T}$ Ha egy gráf síkba az előző tételben szereplő tulajdonságú, de ezenkívül minden tartományát legalább 4 él határolja $\Rightarrow 4t \leq 2e \Rightarrow t \leq \frac{e}{2}$

$$n+t=e+2$$

$$n+\frac{e}{2} \geq e+2$$

$$2n-4 \geq e \Rightarrow e \leq 2n-4$$

Köv: $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható (nem tartalmaz 3 hosszú kört)

Biz: Tfh. az, ekkor igaz rá $e \leq 2n-4$ és $n=6, e=9$

$$9 \leq 12-4=8 \;\lightning$$

Def: G és G' véges gráfok topologikusan izomorfak, ha G' megkapható G-ből az alábbi műveletek segítségével (többször is lehet őket végezni):

(1) Egy él közepére egy csúcsot helyezünk, vagyis eltöröljük az élt és egy új csúcsot hozunk létre, majd ezt összekötjük az eltörölt él 2 végpontjával

(2) Egy 2 fokszámú csúcsot egy éllel helyettesítünk.

Kuratowski tétel

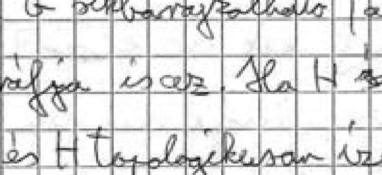
Kuratowski-tétel: Egy G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

Biz: Szükségesség: Ha G síkbarajzolható, akkor minden H részgráfja is az. Ha H síkba rajzolható és H topologikusan izomorf K-val, akkor K is síkba rajzolható. Így $K \neq K_5$ és $K \neq K_{3,3}$ ha G síkba rajzolható volt.

Duális

Def: Egy síkgráf G duálisa G^* az a gráf, amelynek csúcsainak az eredeti gráf tartományait feleltetjük meg, és két csúcsa között annyi él van, amennyi élben közös az eredeti gráf 2 megfelelő tartománya.

Egy gráfnak létezhetnek nem izomorf duálisai: Pl.:



$\nexists$ 4 fokszámú csúcs

$\exists$ 4 fokszámú csúcs

(15) Halmazok számossága: $|A|=|B|$, $|A|\leq|B|$ és $|A|<|B|$ definíciója, Cantor-Bernstein-tétel (biz. nélkül). Megszámlálhatóan végtelen és kontinuum számosságú halmaz fogalma. Példák: $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ számossága. Hatványhalmaz számossága (Cantor tétele), $\mathbb{N}$ hatványhalmazának számossága.

Def: Fgh egy függvény f az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit rendeli. Az f függvény injektív, ha más elemhez más elemet rendel, azaz ha $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ és szürjektív, ha B minden eleme előáll képként, vagyis $\forall b \in B$ $\exists a$, hogy $f(a)=b$. Ha egy függvény injektív és szürjektív is, akkor azt a függvényt bijekciónak mondjuk.

Def: $|A|=|B|$, ha létezik közöttük bijekció.
$|A|\leq|B|$, ha $\exists$ A-ból B-be injekció
$|A|<|B|$, ha $|A|\leq|B|$ és $|A|\neq|B|$ (nincs szürjektív f)

Cantor-Bernstein tétel: Ha $|A|\leq|B|$ és $|B|\leq|A|$, akkor $|A|=|B|$

Def: Az A halmaz megszámlálható, ha $|A|\leq|\mathbb{N}|$. Az $\mathbb{N}$ halmaz számosságát $\aleph_0$ jelöli

Egy halmaz ~~elemei~~ pontosan akkor megszámlálható, ha elemei felsorolhatóak úgy, hogy mindegyik előbb-utóbb sorra kerüljön.

Példák: $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

mert: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots$

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

0	1	2	3	4	5	6	...
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	
2	2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	
3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	
4	4	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	
5	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	
$\vdots$	...						

Áll: Ha A és B megszámlálható halmazok $A \cup B$ is megszámlálható.

Biz: $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$

Köv: Véges sok megszámlálható halmaz számossága is megszámlálható.

T: Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz számossága is megszámlálható.

Biz: egymás alá felírjuk a sorozatokat, majd kígyóval

T: A $(0,1)$ intervallumba tartozó valós számok halmaza megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

Biz: indirekt: tudnánk sorrendet állítani. Írjuk fel őket egymás alá. Ezután alkossuk a következő számot: $w = 0, w_1 w_2 w_3 \ldots$, ahol $w_i = 2$, ha $a_{ii} \neq 2$ és $w_i = 1$, ~~ha~~ $a_{ii} = 2$. Ez a szám biztosan különbözik minden felsorolttól legalább egy számjegyben. Tehát nem soroltuk fel. Ellentmondásra jutottunk, viszont $\omega \in (0,1)$.

Ebből $\mathbb{R}$ szintén nem megszámlálható, mert $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

Kontinuum

Def: $|\mathbb{R}|$ számossága a kontinuum számosság

T Egy A véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és egytől diszjunkt, kontinuum számosságú B halmaz uniója is kontinuum számosságú, vagyis $|A \cup B| = |B|$

Biz: Legyen B_1 a B-nek egy $\aleph_0$ számosságú részhalmaza, $B_2 := B \setminus B_1$.
Ekkor $|A \cup B_1| = |B_1|$, vagyis $\exists f$, hogy f $A \cup B_1$ elemeit bijektíven B_1-re képezi. Ekkor

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \cup B_1 \\ x, & \text{ha } x \in B_2 \end{cases}$$ bijektív.

Hatvány-halmaz

Def: Egy H halmaz hatványhalmaza H összes lehetséges részhalmazának halmaza.

$|P(H)| = 2^{|H|}$, mert egy elem vagy benne van vagy nincs egy részhalmazban

T Cantor-tétele: $|H| < |P(H)|$ $\forall H$-ra

Biz: 1.) $|H| \leq |P(H)|$ 2.) $|H| \neq |P(H)|$

1.) $f: H \to P(H)$ injektív, ilyen van: $f(x) = \{x\}$

2.) Indirekt tfh. $|H| = |P(H)|$, tehát $\exists g: H \to P(H)$
bijektív. Ekkor $G := \{h \in H \mid h \notin g(h)\}$ Ekkor
azon elemek halmaza H-ból, amelyeket a hozzá rendelt részhalmaz nem tartalmaz.

$\exists \gamma: g(\gamma) = G$, a G definíciója alapján: $\gamma \in G \iff \gamma \notin g(\gamma) = G$ ↯

$\boxed{I}$ Megszámlálható halmaz hatványhalmaza kontínuum számosságú

Biz: végtelen kettedestört alakkal $|[0,1)| = |P(\mathbb{N})|$

$0, \overset{a_1}{1} \overset{a_2}{1} 1\ 0\ 1\ 1 \ldots$ Ha $a_i = 1$ akkor i benne van a részhalmazban, ha 0, akkor nincs benne. Ez egy-egyértelmű megfeleltetés $\mathbb{N}$ részhalmazai és $[0,1)$ között = kontínuum.

Kontínuum - hipotézis: Nincs olyan halmaz, aminek számossága nagyobb, mint $|\mathbb{N}|$, de kisebb, mint $|\mathbb{R}|$, vagyis, hogy $\aleph_0 < |H| < 2^{\aleph_0}$

Ez sem nem cáfolható, sem nem bizonyítható!