ANALÍZIS(2) | **VIZSGADOLGOZAT** | **2006. június 15.**

Mérnök Informatikus szak | A és B kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{4}{x}y = x^3 + 1\,, \qquad x > 0$$

H: $y' - \frac{4}{x}y = 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4}{x}\,dx$ Elég egy megoldást keresni

$\ln y = 4\ln x \Rightarrow y = x^4 \Rightarrow y_H = Cx^4\,,\ C \in \mathbb{R}$ 6

I: $y_{ip} = c(x)\cdot x^4$ 2

$y_{ip}' = c'\cdot x^4 + c\cdot 4x^3$

$c'x^4 + \cancel{c\,4x^3} - \cancel{\frac{4}{x}cx^4} = x^3 + 1 \Rightarrow c' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$ 3

$\Rightarrow c = \ln x + \frac{x^{-3}}{-3} \Rightarrow y_{ip} = x^4\ln x - \frac{x}{3}$ 2

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = Cx^4 + x^4\ln x - \frac{x}{3}$ 2

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel az f függvény x_0 bázispontú harmadfokú Taylor polinomját és a hozzá tartozó hibatag Lagrange féle alakját!

b) A Taylor polinom definíciójának felhasználásával adja meg az $f(x) = \cos x + \sin 2x + 3$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bázispontú Taylor polinomját!

a) $T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$ 3

$f(x) - T_3(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4 \qquad \xi \in (x_0, x)$ (vagy $\xi \in (x, x_0)$) 2

b) $f(x) = \cos x + \sin 2x + 3 \qquad f(\frac{\pi}{2}) = 3$

$f'(x) = -\sin x + 2\cos 2x \qquad f'(\frac{\pi}{2}) = -3$

$f''(x) = -\cos x - 4\sin 2x \qquad f''(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f'''(x) = \sin x - 8\cos 2x \qquad f'''(\frac{\pi}{2}) = 9$

$T_3(x) = 3 + \frac{-3}{1}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{9}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3$ 5

an2 v060615/1.

3. feladat (9+6=15 pont)

a) A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát! Mi a sor konvergencia sugara?

b) Ennek felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg} 3x^2$$

függvény Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

a.) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \qquad R=1$ 2

9

$$\int_0^x f'(x)\,dx = f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots)\,dt$$

$[0,x] \subset (-1,1)$: szabad tagonként integrálni

$$\operatorname{arctg} x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots =$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)$$

$R = 1$ (változatlan)

b.) $$\operatorname{arctg} 3x^2 = 3x^2 - \frac{3^3 x^6}{3} + \frac{3^5 x^{10}}{5} - + \dots =$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2} \right)$$

$$|3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. feladat (20 pont)

$$f(x,y) = (y^2+1)\,(x^5+x), \qquad P_0(-1,0)$$

a) $\operatorname{grad} f|_{P_0} = ?$

b) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -4\underline{i} + 3\underline{j}$

c) Írja fel a P_0 pontbeli érintősík egyenletét!

d) Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére differenciálható kétváltozós függvény esetére!

Van-e lokális szélsőértéke a fenti f-nek?

an2 v060615/2.

a) $\boxed{6}$ $\left.\begin{array}{l} f_x' = (y^2+1)(5x^4+1) \\ f_y' = 2y(x^5+x) \end{array}\right\}$ mindenütt $\exists$ és folyt. $\Rightarrow$ grad f mindenütt $\exists$

$$\operatorname{grad} f\big|_{P_0} = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = 6\underline{i} + 0\underline{j}$$

b.) $\boxed{5}$ $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}$; $\underline{e} = -\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}$

$$\Rightarrow \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (6\underline{i} + 0\underline{j})\left(-\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}\right) = -\frac{24}{5}$$

c.) $\boxed{4}$ $f_x'(P_0)(x-x_0) + f_y'(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$; $f(P_0) = -2$

$$6(x+1) + 0 - (z+2) = 0$$

d.) $\operatorname{grad} f(P_0) = \underline{0}$ $\quad$ ($f_x'(P_0) = 0$ és $f_y'(P_0) = 0$)

$\boxed{5}$ Sehol nincs lokális szélsőértéke, mert f mindenütt deriválható, de $f_x' \neq 0$, mert $y^2+1 \geq 1$, $5x^4+1 \geq 1$. Tehát a szükséges feltétel sehol sem teljesül.

5. feladat (15 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

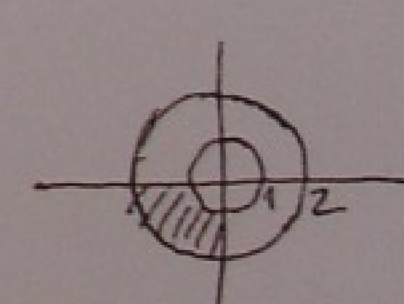
$$T = \{(x, y):\ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,;\quad x \leq 0\,;\quad y \leq 0\}$$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

c)

$$\iint_T \frac{1}{(2x^2 + 2y^2 + 1)^5}\ dT = ?$$

a) $\boxed{4}$ $\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}$ 2 $\qquad \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{array}$ 2



b.) $\boxed{5}$ $\mathcal{J} = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r' & x_\varphi' \\ y_r' & y_\varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

c.) $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_1^2\int_\pi^{3\pi/2} \frac{1}{(2r^2+1)^5}\, r\, d\varphi\, dr = \left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)\underbrace{\int_1^2 r\,(2r^2+1)^{-5}\,dr}_{\frac{1}{4}\int_1^2 \underset{f'}{4r}\,\underset{f^{-5}}{(2r^2+1)^{-5}}\,dr} =$

an2 v060615/3.

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{(2r^2+1)^{-4}}{-4}\Bigg|_1^2 = -\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{9^4}-\frac{1}{3^4}\right)$$

3

6. feladat (10 pont)*

Keresse meg a z_1, z_2, z_3 és a z_4 komplex számok valós és képzetes részét:

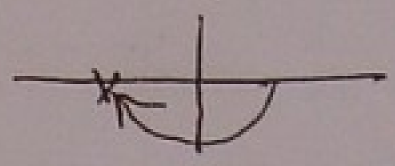
$$z_1 = e^{1-\frac{\pi}{4}j}, \qquad z_2 = \ln(-3), \qquad z_3 = \ln 0, \qquad z_4 = \ln(-3+3j),$$

amennyiben léteznek.

$$z_1 = e^1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$\mathrm{Re}\, z_1 = e\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{Im}\, z_1 = e\frac{-1}{\sqrt{2}}$ 3

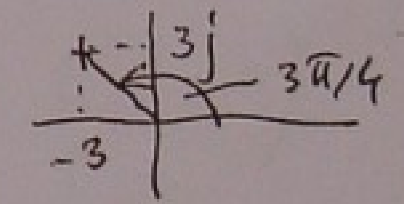
$z_2 = \ln 3 + j(-\pi)$



$\mathrm{Re}\, z_2 = \ln 3$, $\mathrm{Im}\, z_2 = -\pi$ 2

$z_3 = \ln 0$ nem értelmezett 2

$z_4 = \ln\sqrt{18} + j\frac{3\pi}{4}$



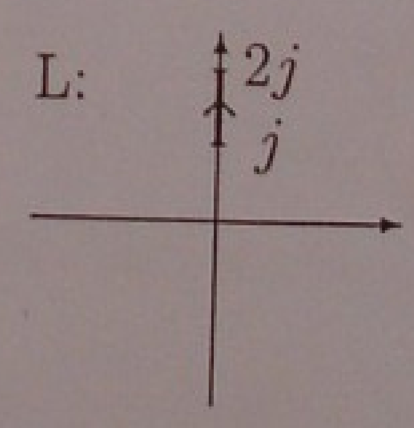
$\mathrm{Re}\, z_4 = \ln\sqrt{18}$, $\mathrm{Im}\, z_4 = \frac{3\pi}{4}$ 3 $-3+3j = \sqrt{18}\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$

7. feladat (15 pont)*

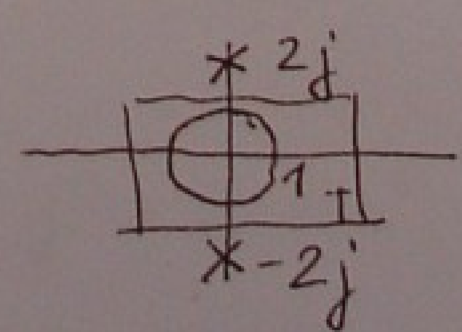
a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+4}\,dz = ?$

b) $\displaystyle\int_L \bar{z}z\,dz = ?$

L:



a.) f reg. Te.ö.f-n, így a Cauchy-féle alaptétel miatt $I_a = 0$. $\boxed{4}$

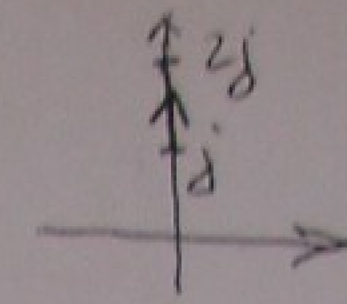


b.) $\displaystyle\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$ 2

an2 v060615/4.

$z(t) = 0 + jt \qquad t \in [1,2]$ (3)

$z'(t) = j$



$f(z(t)) = \bar{z}(t) \cdot z(t) = |z(t)|^2 = t^2$

$$\int_1^2 t^2 \cdot j \, dt = j \int_1^2 t^2 \, dt = j \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^2 = j \, \frac{8-1}{3}$$

(3) (3)

Pótfeladat (csak az elégséges és a közepes vizsgaeredményhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Írja fel az $f(x) = e^{2x}$ fügvény $x_0 = 0$, illetve $x_0 = 3$ bázispontú Taylor sorát és adja meg azok konvergenciatartományát!

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right), \quad u \in \mathbb{R}$$ (2)

$x_0 = 0$:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \dots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

(2) (1)

$x_0 = 3$:

$$e^{2x} = e^{2(x-3)+6} = e^6 e^{2(x-3)} = e^6 \left(1 + 2(x-3) + \frac{2^2 (x-3)^2}{2!} + \dots \right)$$ (3)

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} e^6 \frac{2^n}{n!} \cdot (x-3)^n \right) \qquad x \in \mathbb{R}$$ (1)

9. feladat (10 pont)

$u = 2x - y$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{6x - 3y + 1}{2x - y}$$

$u = 2x - y \Rightarrow u' = 2 - y' \Rightarrow y' = 2 - u'$ (2)

$2 - u' = \frac{3u+1}{u}$ (2) $\Rightarrow u' = -\frac{u+1}{u}$ $\qquad u \equiv -1$ megoldás, tehát $\underline{y = 2x+1}$ mo. (2)

$u \neq -1$

$\int \underbrace{\frac{u}{u+1}}_{\frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}} du = \int -dx \Rightarrow u - \ln|u+1| = -x + C$

$\underline{2x - y - \ln|2x-y+1| = -x + C}$; $C \in \mathbb{R}$

(4)

an2 v-060615/5.