1. Zárthelyi megoldásokkal

2001 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok? a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{\cos x^3}{x^3}\,dx$ **MO.** a) Nem:

$$\sin\frac{1}{x^3} \sim_\infty \frac{1}{x^3} \leadsto \sqrt{\sin\frac{1}{x^3}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}} \leadsto \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}} \sim_\infty x^{3/2} \text{ és } \nexists \int_1^\infty x^{3/2}\,dx$$

VAGY: $\sin\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} +0 \leadsto \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \leadsto \nexists \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}}\,dx$

b) Nem: $\frac{\cos x^3}{x^3} \sim_{x=0} \frac{1}{x^3}$ és $\nexists \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? a) $\sum_{n=1}^\infty n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^\infty n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

MO. a) Nem.

$$a_n \not\to 0 : \; b_n \doteq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leadsto b_n^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow 1/e \leadsto b_n^n \geq 1/3 \text{ nagy } n\text{ –ekre}$$

$$\leadsto b_n \geq \sqrt[n]{1/3} \longrightarrow 1 \leadsto a_n = n\cdot b_n \longrightarrow \infty$$

b) Igen. Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1\cdot 1/e < 1$

3. Konvergensek-e a következő numerikus sorok? (a) $\frac{1}{\sqrt2}-\frac12+\frac{1}{\sqrt3}-\frac13+\frac{1}{\sqrt4}-\frac14+\frac{1}{\sqrt5}-\frac15\pm\ldots$

(b) $1+\frac{1}{\sqrt2}-\frac12-\frac{1}{\sqrt3}+\frac13+\frac{1}{\sqrt4}-\frac14-\frac{1}{\sqrt5}+\ldots$

MO. (a) Divergens mert egy bezárójelezése az: $\nexists \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt n}-\frac1n\right)$ hisz $\frac{1}{\sqrt n}-\frac1n = \frac{n-\sqrt n}{\sqrt n\cdot n} \sim \frac{1}{\sqrt n}$

.

(b) Konvergens mert két, a Leibnitz-kritérium feltételeit kielégítő, és ezért konvergens sor,

a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$ összefésülése.

4. Határozza meg az $f_n(x)=\dfrac{x2^{nx}+nx^4}{2^{nx}+nx^2}$ függvénysorozat határfüggvényét, ahol az létezik!

MO. $f(x)=x$ ha $x<0$, $f(x)=x^2$ ha $x\geq 0$, mert

$$x\leq 0 \rightsquigarrow \quad f_n(x)=\frac{\frac{2^{nx}}{n}x+x^4}{\frac{2^{nx}}{n}+x^2} \longrightarrow x^2 \text{ hiszen}$$

$$(2^{nx}=(2^x)^n \text{ miatt }) \;\; x\leq 0 \rightsquigarrow \quad 2^x\leq 1 \rightsquigarrow \quad \frac{2^{nx}}{n}\longrightarrow 0$$

$$x>0 \rightsquigarrow \quad f_n(x)=\frac{x+\frac{n}{2^{nx}}x^4}{1+\frac{n}{2^{nx}}x^4} \longrightarrow x \text{ hiszen}$$

$$(2^{nx}=(2^x)^n \text{ miatt }) \;\; x>0 \rightsquigarrow \quad 2^x>1 \rightsquigarrow \quad \frac{n}{2^{nx}}\longrightarrow 0$$

5. Léteznek-e a következő határértékek? (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

MO. Igen: (a) $\dfrac{x^4-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$

(b) $\left|\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$

6. Döntse el, hogy folytonossá tehető-e az origóban az $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ függvény!

MO. Nem: $f(x,\sqrt{x})=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{}\dfrac{1}{2}\neq 0$, pedig $f(x,0)=\dfrac{0}{x^2+0}=0\xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{}0$