1. feladat (6+6+6=18 pont)
Írja fel az alábbi függvények $x_0 = -1$ körüli Taylor-sorát és azok konvergenciasugarát:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+10}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x+10)^2}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x+10}}.$$

Mo.

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+1)+9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x+1}{9}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}}(x+1)^n,$$

ha $|x+1| < 9$, tehát a sor konvergenciasugara 9.

$$f_2(x) = -f_1'(x) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}}(x+1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{9^{n+1}}(x+1)^{n-1}$$

az egyenletes konvergencia miatt, ha $|x+1| < 9$, tehát a sor konvergenciasugara 9.

$$f_3(x) = (x+1+9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{9}+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{3 \cdot 9^n}(x+1)^n,$$

ha $|x+1| < 9$, tehát a sor konvergenciasugara 9.

---

2. feladat (12 pont)
Legyen $f(x) = x \cos 3x^2$. Számolja ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét.

Mo. A cos függvény 0 körüli hatványsora: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$, tehát

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!},$$

tehát $f^{(100)}(0) = 0$, hiszen nem létezik olyan n egész szám, amelyre $4n+1 = 100$.
Mivel $101 = 4 \cdot 25 + 1$, így $f^{(101)}(0) = 101! \frac{-3^{2\cdot 25}}{(2 \cdot 25)!} = -101! \frac{3^{50}}{50!}$.

---

3. feladat (18 pont)
Hol folytonos illetve totálisan differenciálható az alábbi függvény?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{2x^4+7y^4}\,, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0\,, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mo. Ha $(x,y)\neq(0,0)$ akkor a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele .

Vizsgálandó a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték! Az $y=mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{3m^2x^4}{2x^4+7m^4x^4}=\frac{3m^2}{2+7m^4} \qquad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Longrightarrow \quad \nexists$ (polárkoordinátákkal is kijön) a határérték . Így a függvény az origóban nem folytonos, tehát nem totálisan differenciálható . Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor az

$$f'_x(x,y)=\frac{6xy^2(2x^4+7y^4)-3x^2y^2\cdot 8x^3}{(2x^4+7y^4)^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{6x^2y(2x^4+7y^4)-3x^2y^2\cdot 28y^3}{(2x^4+7y^4)^2}$$

parciális deriváltak folytonosak, tehát a függvény totálisan differenciálható .

---

4. feladat (6+14=20 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy kétváltozós függvénynek egy pontban lokális szélsőértékhelye van.
b) Keresse meg az

$$f(x,y)=(3x-y)^3\ -\ 9x^2\ +\ 12y$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát.

Mo. a) Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0,y_0)\in D_f$ pontban (amelynek egy környezetében léteznek a másodrendű parciális deriváltak, és azok folytonosak) lokális szélsőértékhelye van, ha a függvény gradiense az x_0 pontban $\underline{0}$ és

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0)\\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}=f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-\big(f''_{xy}(x_0,y_0)\big)^2>0.$$

b) $f'_x = 9(3x-y)^2 - 18x = 0$, $f'_y = -3(3x-y)^2 + 12 = 0$ egyenletrendszer megoldásai $x = 2$ és $y = 4$, vagy $y = 8$. $f''_{xx} = 54(3x-y) - 18$, $f''_{xy} = f''_{yx} = -18(3x-y)$, $f''_{yy} = 6(3x-y)$. A $(2,4)$ pontban $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 90 \cdot (12) - (-36)^2 < 0$, így ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A $(2,8)$ pontban $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = (-126) \cdot (-12) - 36^2 > 0$, és $f''_{xx} = -126 < 0$ így a $(2,8)$ pontban a függvénynek lokális maximuma van.

---

5. feladat (13 pont)
Milyen nemnegatív x, y, z esetén maximális x^2yz, ha feltesszük, hogy $x + y + z = 16$?

Mo. Keressük az $f(x,y) = x^2y(16-x-y)$ függvény maximumát az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 16$ tartományon . $f'_x = 2xy(16-x-y) - x^2y = xy(32-3x-2y) = 0$, ha $x = 0$, vagy $y = 0$ vagy $3x+2y = 32$, $f'_y = x^2(16-x-y) - x^2y = x^2(16-x-2y) = 0$, ha $x = 0$ vagy $16 - x - 2y = 0$. Így csak az $x = 8$, $y = 4$ stacionárius pont nincs a tartomány határán , és $f(8,4) = 1024$. A határt vizsgálva: $f(0,y) = f(x,0) = f(x, 16-x) \equiv 0$. Így a maximum 1024, és ehhez az $x = 8$, $y = 4$, $z = 4$ választás kell.

---

6. feladat (19 pont)
Számolja ki az $f(x,y) = \dfrac{-3x^2y}{x^2+y^2}$ függvény integrálját a $Q = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \leq 0\}$ tartományon.

Mo. Polártranszformációval

$$\iint_Q f(x,y)d(x,y) = \int_1^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\frac{3r^2\cos^2\varphi r\sin\varphi}{r^2} \cdot r d\varphi dr =$$

$$= 3\int_1^3 r^2 dr \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2\varphi(\cos\varphi)' d\varphi = 3\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{26}{3}$$

IMSC feladat (15 IMSC pont)

Egy 1 sugarú gömbbe beleillesztünk egy $\frac{1}{2}$ sugarú végtelen egyenes körhengert úgy, hogy annak egyik alkotója átmenjen a gömb középpontján. Határozza meg a két test közös részének térfogatát!

Mo.

$$V = \iint\limits_{(x-1/2)^2+y^2\le\frac14} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\,dx\,dy = \iint\limits_{(x-1/2)^2+y^2\le\frac14} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Polárkoordinátákra áttérve

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r\sqrt{1-r^2}dr d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac32}}{3}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac13(1-|\sin\varphi|^3)\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac13(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi = 2\left(\frac{\pi}{6}-\frac29\right)$$
