**ANALÍZIS(2)** — **VIZSGAZÁRTHELYI** — **2008. június 5.**

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

**1. feladat (9 pont)**

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását! (Elég az implicit alak is.)

$$y' = (3x+2)^5\,(y^2+2y+3)$$

1, $\boxed{9}$

$$y^2+2y+3 = (y+1)^2+2 > 0$$

$$\int \frac{dy}{2+(y+1)^2} = \int (3x+2)^5\,dx \quad 3$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right) \; 3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x+2)^6 + c \; 3$$

**2. feladat (10 pont)**

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+8}$ $\qquad x_0 = 0$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\qquad x_0 = -5$

2, a, $\boxed{5}$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2+8} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} \; 2 = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n x^{2n} \; 2, \text{ ha}$$

$\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$, azaz ha $\underline{\underline{x \in (-2,+2)}}$ 1 $=$ K.T.

b, $\boxed{5}$

$$g(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-3+(x+5)} \; 1 = \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+5}{3}} \; 1 =$$

$$= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x+5)^n \; 2, \text{ ha } \left|\frac{x+5}{3}\right| < 1, \text{ azaz ha}$$

$\underline{\underline{x \in (-8,-2)}} =$ K.T. 1



a) Hogyan definiáljuk egy $f$ függvény $x_0$ körüli Taylor sorát?

b) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy $f$ megegyezzék Taylor sorával?

c) Határozza meg az $f(x) = \sin x$ Taylor sorát $x_0 = 0$ esetén, és igazolja, hogy $f(x)$ megegyezik a Taylor sorával!

3, a, $\boxed{3}$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\boxed{3}$ b, $f(x) = T(x)$ az $x_0$-t tartalmazó $I$ intervallumon, ha az $\left\{f^{(n)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ deriváltak sorozata, ', egyenletesen korlátos $I$-n (, azaz $\exists\, K \in \mathbb{R}$: $|f^{(n)}(x)| < K$, ha $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$.)

c, $\boxed{9}$

| | |
|---|---|
| $f(x) = \sin x$ | $f(x_0) = f(0) = 0$ |
| $f'(x) = \cos x$ | $f'(x_0) = 1$ |
| $f''(x) = -\sin x$ | $f''(x_0) = 0$ |
| $f'''(x) = -\cos x$ | $f'''(x_0) = -1$ |
| $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ | $f^{(4)}(x_0) = 0$ |

5

Tehát $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ +1, & \text{ha } n = 4k+1;\ k \in \mathbb{N} \\ -1, & \text{ha } n = 4k+3;\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \; 2 \;; \quad \text{és } \left|\sin^{(n)}(x)\right| \le 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

tehát $T(x) = \sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén 2

4. 12 pont

$f(x,y)=\frac{x+2y}{2x+3y}$  $(x_0,y_0)=(1,-1)$

a) $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=?$  $df((x_0,y_0),(h,k))=?$

b) Milyen irányban lesz az $(x_0,y_0)$ pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg az egységvektort!
Adja meg ezt a maximális értéket is!

4, a, $\boxed{5}$

$f'_x(x,y)=\frac{(2x+3y)-2(x+2y)}{(2x+3y)^2}=\frac{-y}{(2x+3y)^2}$ ; $f'_x(1,-1)=\frac{1}{1}=1$ (2)

$f'_y(x,y)=\frac{2(2x+3y)-3(x+2y)}{(2x+3y)^2}=\frac{x}{(2x+3y)^2}$ ; $f'_y(1,-1)=\frac{1}{1}=1$ (2)

$df((x_0,y_0),(h,k))=f'_x(x_0,y_0)\cdot h+f'_y(x_0,y_0)\cdot k=h+k$ (2) ; $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\underline{i}+\underline{j}$ (2)

b, $\boxed{4}$ $\underline{e}\parallel \operatorname{grad} f$ ; $\underline{e}=\frac{1}{\sqrt2}(\underline{i}+\underline{j})=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (2)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}=\underline{e}\cdot\operatorname{grad} f=\frac{1}{\sqrt2}\cdot(1\cdot1+1\cdot1)=|\operatorname{grad} f|=\sqrt2$ (2)

**5. feladat (13 pont)**

Milyen kapcsolat van a parciális deriváltak létezése és a totális deriválhatóság között $m$-változós függvény esetén? (2 tétel)

Közülük a totális deriválhatóság szükséges feltételét megadó tételt bizonyítsa be!

5, a, $\boxed{5}$ $T_1$: Ha $f$ totálisan deriválható $\underline{x}_0$-ban, akkor $\underline{x}_0$-ban léteznek a parciális deriváltjai. (2)

$T_2$: Ha $f$ parciális deriváltjai léteznek, és folytonosak $\underline{x}_0$ egy környezetében, akkor $f$ totálisan diff.-ható $\underline{x}_0$-ban. (3)

b, $\boxed{8}$ $B_1$: $f$ tot. diff.-ható $\underline{x}_0$-ban, tehát

(4) $\left\{ f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)=\underline{h}\cdot\underline{A}+\underline{h}\cdot\underline{\varepsilon}(\underline{h}),\right.$ ahol $\underline{A}$ független $\underline{h}$-tól, és $\lim_{\underline{h}\to 0}\|\underline{\varepsilon}(\underline{h})\|=0$.

(4) $\left\{ \underline{h}=(0,\dots \overset{k}{h},0\dots)\right.$ esetén $\frac{f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)}{h}=A_k+\varepsilon_k(\underline{h})\longrightarrow A_k=\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_k}$ ✓

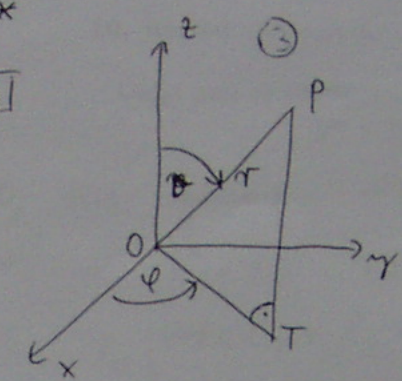
6. 9pont *

Adja meg a Descartes koordináták és a gömbi koordináták közötti kapcsolatot!
(Egy ábrán mutassa meg a gömbi koordináták jelentését!)

Gömbi koordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

$$x^2+y^2+z^2\le 9,\quad x\ge0,\quad y\ge0,\quad z\le0$$

6,* $\boxed{9}$




$\left.\begin{array}{l} x=r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=r\cos\vartheta\end{array}\right\}$ (3)  $\begin{array}{l}\vartheta\in[0,\pi]\\ \varphi\in[0,2\pi)\\ r\in[0,\infty)\end{array}$

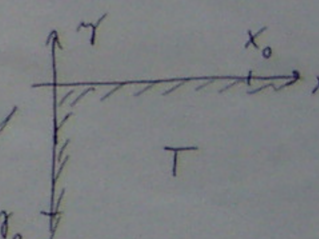
$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2\le 9\\ x\ge0;\ y\ge0;\ z\le0\end{array}\right\}\iff\left.\begin{array}{l}0\le r\le3\\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \vartheta\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{array}\right\}$ (3)

**7. feladat (8 pont)***

$$\iint_T e^{2y-3x}\,dT=?\qquad T:\ x\ge0,\ y\le0$$

7,* $\boxed{8}$

$\iint_T e^{2y-3x}\,dT=\lim_{x_0\to\infty}\lim_{y_0\to-\infty}\int_{x=0}^{x_0}e^{-3x}\,dx\cdot\int_{y=y_0}^{0}e^{2y}\,dy=$ (3)




$=\lim_{x_0\to\infty}\frac{-1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^{x_0}\cdot\lim_{y_0\to-\infty}\frac{1}{2}\left[e^{2y}\right]_{y_0}^{0}=$

$=\lim_{x_0\to\infty}\frac{-1}{3}\left(\underset{\downarrow\atop 0}{e^{-3x_0}}-1\right)\cdot\lim_{y_0\to-\infty}\frac{1}{2}\left(1-\underset{\downarrow\atop 0}{e^{2y_0}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ (3) (2)

−4

**8. feladat (10 pont)**

Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi függvény?

$$f(z) = (x^3 + 2xy) + j\,(3x^2y + 6y)$$

Ahol differenciálható, ott írja fel az $f'(z)$ deriváltat!

8,* $\boxed{10}$

$f(z) = \underbrace{(x^3+2xy)}_{u(x,y)} + j\underbrace{(3x^2y+6y)}_{v(x,y)}$

Cauchy–Riemann egyenletek:

$u'_x = 3x^2+2y \overset{!}{=} v'_y = 3x^2+6$ (2) $\Rightarrow y = 3$

$u'_y = 2x \overset{!}{=} -v'_x = -(6xy)$ (2) $\Rightarrow x = 0$ (2)

Tehát f csak a $z = 0+3j = 3j$-ben diff.-ható ((0,3)-ban u, v tot. diff.-ható), és f sehol nem reguláris (2)

$f'(3j) = u'_x(0,3) + j\,v'_x(0,3) = 6 + 0\cdot j = 6$ (2)

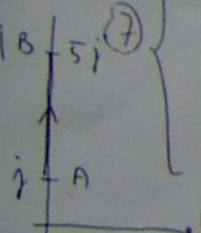
**9. feladat (14 pont)**

Határozza meg $I_1$ és $I_2$ valós és képzetes részét!

$$I_1 = \int_L j\,\bar z\,dz \qquad I_2 = \int_L (2z + \cos 3z)\,dz$$

$L$: az $A = j$ és $B = 5j$ pontokat összekötő szakasz $A$-ból $B$-be irányítva.

9,* $\boxed{14}$




(7) $I_1 = \int_L j\bar z\,dz = \int_{t=1}^{5} j\cdot\underbrace{(-jt)}_{\bar z}\cdot\underbrace{j}_{\dot z}\,dt = j\int_{t=1}^{5} t\,dt = \frac{j}{2}(25-1) = 12j$ (2) (2)

$z(t) = j\cdot t$ ; $\bar z = -jt$ (3)

$\dot z(t) = j$

(7) $I_2 = \int_L (2z + \cos(3z))\,dz = \left[z^2 + \frac{1}{3}\sin(3z)\right]_j^{5j}$ (4)

$= \underbrace{(5j)^2 - j^2}_{-24} + \frac{1}{3}\left(\underbrace{\sin(15j)}_{j\,\mathrm{sh}15} - \underbrace{\sin(3j)}_{j\,\mathrm{sh}3}\right) = -24 + j\,\frac{\mathrm{sh}15 - \mathrm{sh}3}{3}$ (1) (2)

Re $I_2$ = —— Im $I_2$ =

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

**Pótfeladatok.** Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

**10. feladat (10 pont)**

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''' + 2y'' - 3y' = 3 + 5e^{2x}$$

10, $\boxed{10}$ (H): $y''' + 2y'' - 3y' = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda+3)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 1$

$y_{H,á}(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{x}$ (4)

A konstans tagban van külső rezonancia!

$y_{i,p}(x) = Ax + Be^{2x}$ (2) ; $y'_{i,p} = A + 2Be^{2x}$

$y''_{i,p} = 4Be^{2x}$

$y'''_{i,p} = 8Be^{2x}$

$\underbrace{(8B + 2\cdot 4B - 3\cdot 2B)}_{10B\,=\,5}e^{2x} - 3A = 3 + 5e^{2x}$ (2) $\Rightarrow A = -1$, $\Rightarrow B = \frac{1}{2}$ (1)

$y_{i,á}(x) = y_{H,á}(x) + y_{i,p}(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{x} - x + \frac{1}{2}e^{2x}$ (1)

**11. feladat (10 pont)**

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n}{n!}$$

11, a, $\boxed{10}$ $a_n > 0$; ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

$a_n > 0$; ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (6)

b, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+2)^n} = \frac{n+3}{n+1}\cdot\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{(1+\frac{3}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n} \to \frac{e^3}{e^2} = e > 1$ (2) (2)

$\Rightarrow \sum\frac{(n+2)^n}{n!} = \infty$ (2)