---

1. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függvény x_0 pontbeli határértékének definícióját!
b) A definíció alapján igazolja, hogy $\lim\limits_{x_0 \to 3} \sqrt{3x+7} = 4$!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy x_0 torlódási pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)** .

b) Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor

$$|\sqrt{3x+7} - 4| \overset{\textbf{(3p)}}{=} \left| \frac{3x+7-16}{\sqrt{3x+7}+4} \right| \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{3|x-3|}{\sqrt{3x+7}+4} \overset{\textbf{(2p)}}{\le} \frac{3}{4}|x-3| \overset{\textbf{(1p)}}{<} \varepsilon,$$

ha $|x-3| < \delta(\epsilon) = \dfrac{4}{3}\varepsilon$ **(2p)** .

---

2. feladat (18 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3} + \frac{x^2+5x+4}{x^2+2x-8}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevezők zérushelyeiben, tehát az $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$ pontban lehet szakadása **(3p)** .

$$\lim_{x \to -4\pm} f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \lim_{x \to -4\pm} \frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-2)} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \frac{1}{2}, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x \to 2\pm} f(x) = -\operatorname{arctg} 1 + \lim_{x \to 2\pm} \frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-2)} = -\frac{\pi}{4} + 3 \lim_{x \to 2\pm} \frac{1}{x-2} = \pm\infty, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x \to 3\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} + 4, \textbf{(3p)}$$

így az $x = 3$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

3. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sh}(2x-4)}{\operatorname{arsh}(6-3x)} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}(\cos(3x))^{\frac{2}{x}} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(5x+3)}{\operatorname{ch}(4-5x)}$$

Mo. *a)* $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sh}(2x-4)}{\operatorname{arsh}(6-3x)} \overset{\textbf{(6p)}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2\operatorname{ch}(2x-4)}{\frac{-3}{\sqrt{1+(6-3x)^2}}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} -\frac{2}{3}.$$

b) 1^∞ típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0}(\cos(3x))^{\frac{2}{x}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln\cos(3x)}\right)^{\frac{2}{x}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{x\to 0} e^{2\frac{\ln\cos(3x)}{x}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{x}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(3x)}{x} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{1} \overset{\textbf{(1p)}}{=} 0$$

c) A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(5x+3)}{\operatorname{ch}(4-5x)} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{5x+3}-e^{-5x-3}}{e^{4-5x}+e^{5x-4}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{e^{5x}}\cdot\frac{e^{3}-e^{-10x-3}}{e^{4-10x}+e^{-4}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{e^3}{e^{-4}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} -e^7.$$

---

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x)=\dfrac{e^{3x^4}\ln(2x^2+3x+1)}{\operatorname{ch}(\sin x)}$ függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0=0$ pontban!

Mo. $f(0)=0$ **(2p)** . f'(x)=

$$=\frac{\left(12x^3e^{3x^4}\ln(2x^2+3x+1)+\frac{(4x+3)e^{3x^4}}{2x^2+3x+1}\right)\operatorname{ch}(\sin x)-e^{3x^4}\ln(2x^2+3x+1)\cos x\operatorname{sh}(\sin x)}{\operatorname{ch}^2(\sin x)}\textbf{(10p)}$$

$f'(0)=3$ **(3p)** , így az érintőegyenes egyenlete $y=3x$ **(2p)** .

5. feladat (20 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x-2)^3(x+3)^2$ függvény monoton növő, illetve monoton fogyó? Hol és milyen típusú szélsőértékei vannak a függvénynek? Adja meg a függvény maximumát illetve minimunát a $[-4, 1]$ intervallumon.

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x+3)^2 + 2(x-2)^3(x+3) =$$
$$= (x-2)^2(x+3)(3x+9+2x-4) = (x-2)^2(x+3)(5x+5)\textbf{(4p)}$$

így $f'(0) = 0$ ha $x = -3$, $x = -1$, vagy $x = 2$ **(3p)** .

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	infl. p.	$\nearrow$

(4p),

vagyis a függvény monoton fogy a $(-3,-1)$ intervallumon, és nő a $(-\infty,-3)$ és $(-1,\infty)$ intervallumokon, az $x=-3$ pontban lokális maximuma, az $x=-1$ pontban lokális minimuma van. **(2p)** A függvény az intervallumon a maximumát, illetve minimumát az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallum belsejében található lokális szélsőértékhelyeken veheti fel **(3p)** .

$$f(-4) = -216 < f(-1) = -108 < f(1) = -16 < f(-3) = 0 \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis a függvény maximuma az intervallumon 0, minimuma pedig -216.

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $A = 2\,\mathrm{m}^2$ területű lemezt használtunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a V térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?

Mo. Legyen az alaplap oldaléle a és a doboz magassága h. Ekkor a dobozhoz elhasznált lemez területe:

$$A = a^2 + 4ah \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{A-a^2}{4a} \quad \textbf{(2p)}$$

A doboz térfogata:

$$V(a) = a^2 h = \frac{Aa - a^3}{4} \quad (\mathbf{2p})$$

A doboz térfogatának szélsőértékénél

$$V'(a) = \frac{A - 3a^2}{4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{A}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \mathrm{m} \quad (\mathbf{2p})$$

ami azt jelenti, hogy

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \mathrm{m}, \qquad V_{\max} = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^3. \quad (\mathbf{2p})$$

A szélsőérték valóban maximum, hiszen $V''(a) = \dfrac{-3a}{2} < 0$.
