# A411

2021. november 25., csütörtök 8:40

A411

# A4 Valószínűségszámítás — XI. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. november 25.



## ZH 1. feladat

1) Ausztráliában az egy háztartásra jutó skorpiótámadások száma átlagosan évente 5. A támadások egymástól függetlenek, és egyszerre csak egy skorpió támad. Mi a valószínűsége, hogy

- a) fél éven belül több mint 3 támadás lesz? (2p)
- b) két egymás utáni támadás között több, mint 3 hónap telik el? (2p)
- c) ha eltelt már egy hónap támadás nélkül, akkor még 2 hónapig nem lesz? (2p)
- d) a 4. támadás az 5. hónap után lesz? (2p)

POISSON FOLYAMAT

$\lambda_t = 5 \cdot \frac{1}{2}$

$X \sim Poisson(5)$

$P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{2{,}5^0}{0!} + \frac{2{,}5^1}{1!} + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!}\right) e^{-2{,}5}$

$Y \sim EXP(5)$ $P(Y > \frac{1}{4}) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}}$

$P(Y>3 \mid Y>1) \overset{\text{örökifjúság}}{=} P(Y>2) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{6}}) = e^{-\frac{5}{6}}$

$Z \sim Erlang(4, \frac{5}{12})$ $P(Z>5) = 1 - \left(1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(5 \cdot \frac{5}{12})^k}{k!} e^{-\frac{25}{12}}\right)$



## ZH 2. feladat

2) Az $x^2 + Bx + 1 = 0$ egyenlet megoldásai között milyen valószínűséggel lesz valós, ha $B$ normális eloszlású 7 várható értékkel és 1 szórással?(3p)

$B \sim N(7,1)$

$B^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \geq 0$

$B^2 \geq 4$

$B \geq 2$ v. $B \leq -2$

$P(B \geq 2) = P(\overset{N(0,1)}{Z} \geq \frac{2-7}{1})$

$= 1 - \Phi(-5) = 1 - (1 - \Phi(5)) = \Phi(5) \approx 1$

$P(B \leq -2) = P(Z \leq \frac{-2-7}{1}) = \Phi(-9) = 0$

$\oplus = \underline{\underline{1}}$



## ZH 3. feladat

3) Legyen $X, Y \sim Uni(0,1)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

d.) EXTRA

$s-1$ $0$ $s$ $1$

## ZH 3. feladat

3) Legyen $X, Y \sim Uni(0,1)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

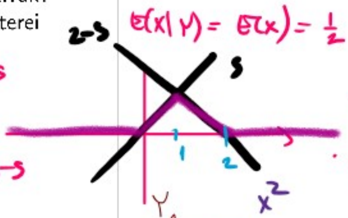
- a) Mennyi az $f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény?(6p)
- b) Mennyi $f(x,y), E(X|Y), CORR(X,Y) =?$ (3p)
- c) (extra) Milyen valószínűséggel lesznek $f(w) = -(w-X)^2 - Y$ parabola gyökei nemnegatívak? (Itt $w$ az algebrai változó, $X, Y$ a parabola paraméterei valváltozók.)(+4p)

$0<s<2$

$0<s-x<1$

$s-1<x<s$

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(s-x)\,dx \nearrow \int_0^s 1\,dx = s \qquad \searrow \int_{s-1}^{1} 1\,dx = 2-s$$

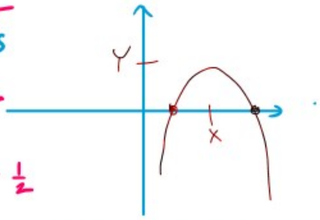


$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = 1\cdot 1 = \underline{1}$

$CORR(X,Y) = 0$

$E(X|Y) = E(X) = \frac{1}{2}$

d.)



$-w^2 - X^2 + 2Xw + Y = 0$

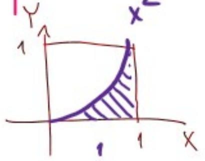
$$w_{1,2} = \frac{-2X \pm \sqrt{4X^2 + 4(Y - X^2)}}{-2}$$

$\nearrow \frac{-2x + 2\sqrt{Y}}{-2} = X - \sqrt{Y} > 0$

$\searrow \frac{-2X - 2\sqrt{Y}}{-2} = X + \sqrt{Y} > 0$

$X > \sqrt{Y}$ $\quad -X < \sqrt{Y}$ $\quad X^2 > Y$

$X > -\sqrt{Y}$



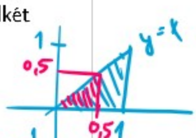
$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$



## ZH 4. feladat

4) Legyen $X, Y$ együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c \cdot x^2$ a $0 < x < 1, 0 < y < x$ tartományon. Számold ki a $c$-t. Mennyi $X$ várható értéke, $Y$ feltételes várható értéke és hogy mindkét változó értéke kisebb mint 0.5?

$(E(X), E(Y|X), P(X < 0.5, Y < 0.5) =?$ (6p)



$f(x,y) = 4x^2$

$$P(X<\tfrac{1}{2}, Y<\tfrac{1}{2}) = \int_0^{0,5}\int_0^{x} 4x^2\,dy\,dx = \int_0^{0,5} 4x^3\,dx \qquad \left[x^4\right]_0^{0,5} = \frac{1}{16}$$

$$\int_0^1\int_0^x c\cdot x^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[Cx^2 y\right]_0^x dx = \int_0^1 Cx^3\,dx = \left[C\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

$$f_1(x) = \int_0^x 4x^2\,dy = \left[4x^2 y\right]_0^x = \underline{4x^3} \qquad f_{2|1}(y|x) = \frac{4x^2}{4x^3} = \frac{1}{x}$$

$$E(X) = \int_0^1 4x^3\cdot x = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$E(Y|X) = \int_0^x \frac{1}{x}\cdot y\,dy = \left[\frac{y^2}{2x}\right]_0^x = \frac{x}{2}$$



## ZH 5. feladat

5) Egy légitársaságnál 2-motoros és 4-motoros gépek is vannak. Egy repülő akkor tud felszállni, ha a motorjainak **több, mint fele működik**. A motorok egymástól függetlenül $0.5-0.5$ valószínűséggel működnek.

- a) A kétféle gép közül melyik a valószínűbb, hogy felszáll?
- b) Ha kiválasztunk egy 2-motoros és egy 4-motoros gépet, és a szerelő emlékezete szerint összesen 3 motor működik (de arra nem emlékszik, melyikek), akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan egy repülő fel tud szállni a kettő közül?

2M $\quad$ 4 M

$Binom(2, \frac{1}{2})$ $\quad$ $Binom(4, \frac{1}{2})$

$\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$ $\quad < \quad$ $\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} + \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$

$$b.)\ P = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{8}{\binom{6}{3}}$$

## ZH 5. feladat folyt.

- c) A 2-motoros gépek alkotják a flotta 30%-át a 4-motorosok a maradékot. Ha egy gépről tudjuk, hogy működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 2-motoros?
- d)(extra) Legyen $p$ paraméter egy motor működésének valószínűsége. Milyen $p$-kre lesz valószínűbb, hogy a 4-motoros gép tud felszállni?

c./ BAYES TÉTEL, TELJES VSZÓG TÉTELE

$P(\text{működik}) = 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot \frac{5}{16}$

$P(2M \mid \text{működik}) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot \frac{5}{16}}$

d./ $\binom{2}{2}p^2(1-p)^0 < \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{4}p^4$

$p^2 < 4p^3 - 4p^4 + p^4$

$p^2(1-4p+3p^2) < 0$

$1-4p+3p^2 = 0$

$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$ ↗ $1$ ↘ $\frac{1}{3}$

$p \in [1, \frac{1}{3}]$



## Momentumgeneráló függvény (folytonos)

$$M_X(s) = E(e^{sx}) = \mathcal{L}\{f\}(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{sx}\,dx$$

A momentumgeneráló függvény

- egy várható érték $s$ függvényében,
- Laplace transzformáltja a sűrűségfüggvény előjelcserélt változatának,
- és a sűrűségfüggvény/súlyfüggvény kölcsönösen meghatározzák egymást.



A momentumgeneráló függvény sorfejtésében a tagok együtthatói tényleg momentumok:

$$e^{sX} = 1 + sX + \frac{(sX)^2}{2!} + \frac{(sX)^3}{3!} + \dots$$

$$E(e^{sX}) = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}^{1} + \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot sx\,dx}^{E(X)} + \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot (sx)^2/2!\,dx}^{E(X^2)/2} +$$

$$+ \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot (sx)^3/3!\,dx}^{E(X^3)/6} \dots =$$

$$= 1 + sE(X) + \frac{s^2E(X^2)}{2!} + \frac{s^3E(X^3)}{3!} + \dots$$

$E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(1 + sx + \frac{(sx)^2}{2!} + \dots\right)dx$